应用数学和力学,第 40 卷 第 7 期
2019 年 7 月 1 日出版
Applied Mathematics and Mechanics
Vol.40,No.7,Jul.1,2019

文章编号:1000-0887(2019)07-0713-15

一类具有非线性发生率与时滞的非局部扩散 SIR 模型的临界波的存在性*

张 秋[1], 陈广生[1,2]

(1. 西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071;
2. 广西科技师范学院 数学与计算机科学学院, 广西 来宾 546199)

摘要: 研究了一类具有时滞的非局部扩散 SIR 传染病模型的行波解.首先, 利用反证法证明了 I 是有界的, 并根据 I 的有界性研究了波速 $c > c^*$ 时行波解(波速大于最小波速的行波)的存在性.其次,利用 $c > c^*$ 的行波的存在性结果证明了临界波(波速等于最小波速的行波)的存在性.最后,讨论了 R_0 对临界波存在性的影响.

关 键 词: 行波解; 临界波速; 非局部扩散; 基本再生数
中图分类号: O175.14 **文献标志码**: A DOI: 10.21656/1000-0887.390208

引 言

传染病模型是生物数学中一类典型的数学模型,关于传染病模型行波解的存在性研究已有大量的结果[1-10].例如,Wang 和 Wu[11]研究了一般的 Kermack-McKendrick 模型行波解的存在性.Li 等[12]研究了人口数量变化的非局部时滞 SIR 传染病模型.文献[13]研究了具有非线性发生率的时滞 SIR 模型等等.

最近, 邹霞和吴事良[14]研究了以下具有时滞的非局部扩散 SIR 传染病模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S(x,t)}{\partial t} = d_1(J*S(x,t) - S(x,t)) - f(S(x,t))g(I(x,t-\tau)), \\ \dfrac{\partial I(x,t)}{\partial t} = d_2(J*I(x,t) - I(x,t)) + f(S(x,t))g(I(x,t-\tau)) - \gamma I(x,t), \\ \dfrac{\partial R(x,t)}{\partial t} = d_3(J*R(x,t) - R(x,t)) + \gamma I(x,t), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $d_i > 0(i=1,2,3)$ 表示扩散系数, γ 表示恢复率,$\tau \geqslant 0$ 表示疾病的潜伏时间,$J*u(x,t)$ 是关于空间 x 的标准卷积.$J*S(x,t)-S(x,t)$, $J*I(x,t)-I(x,t)$, $J*R(x,t)-R(x,t)$ 分别表示由易感者、感染者、恢复者的扩散导致的净增长率.假设 J, f 和 g 满足条件:

(H1) $f, g \in C((0,+\infty),(0,+\infty))$, $f(0)=g(0)=0$, $f'(S)>0$, $\forall S \geqslant 0$,且 $g'(I) > 0$,$g''(I) \leqslant 0$, $\forall I \geqslant 0$;

* **收稿日期**: 2018-07-26; **修订日期**: 2018-11-09
基金项目: 国家自然科学基金(面上项目)(11671315)
作者简介: 张秋(1989—),女, 硕士生(通讯作者. E-mail: 1204142234@qq.com);
陈广生(1979—), 男, 博士生(E-mail: cgswavelets@126.com).

(H2) $J \in C^1(\mathbf{R})$, $J(x)=J(-x)\geqslant 0$, $\int_{\mathbf{R}} J(x)\mathrm{d}x=1$ 且 J 具有紧支撑.

在条件(H1)和(H2)下, 邹霞和吴事良[14]证明了当 $c>\max\{c^*,(3/2)d_2\sigma_0\}$, $R_0=(f(S_{-\infty})g'(0))/\gamma>1$ 时, 系统(1)存在满足边界条件 $S(-\infty)=S_{-\infty}, I(\pm\infty)=0$ 的行波解, 并得到了当 $R_0\leqslant 1$ 或者 $R_0>1, 0<c<c^*$ 时, 系统(1)不存在行波解的结论, 其中 $\sigma_0=S_{-\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} J(y)|y|\mathrm{d}y$. 随后, Zhang 等[15]也研究了系统(1)的行波解的存在性问题, 他们利用 Schauder 不动点定理和双边 Laplace 变换建立了系统(1)的行波解的存在性与不存在性. 文献[14]是在大传播速度(即 $c>\max\{c^*,(3/2)d_2\sigma_0\}$)条件下得到系统(1)的行波解的存在性, 文献[15]是在小传播速度(即 $c>c^*$)条件下得到行波解的存在性. 然而, 文献[14-15]没有讨论当波速 $c=c^*$ 时, 系统(1)的行波解的存在性问题. 众所周知, 反应扩散系统在 $c>c^*$ 条件下行波解的存在性已有很多研究, 但当 $c=c^*$ 时行波解的存在性讨论很少, 相关结果可参阅文献[9,16-18], 其中 Wu[18]在 Fu 等[6]研究的基础上,讨论了以下模型临界波的存在性:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S_j(t)}{\partial t}=d[S_{j+1}(t)+S_{j-1}(t)-2S_j(t)]-\beta S_j(t)I_j(t),\\[2mm] \dfrac{\partial I_j(t)}{\partial t}=[I_{j+1}(t)+I_{j-1}(t)-2I_j(t)]+\beta S_j(t)I_j(t)-\gamma I_j(t).\end{cases}\tag{2}$$

Wu[18]通过讨论系统(2)中 I 的有界性, 证得了在波速 $c>c^*$ 条件下行波解的存在性, 从而得到当 $c=c^*$ 时行波解的存在性. 最近, Yang 等[17]利用文献[18]中的方法建立了以下模型临界波的存在性:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial t}=d_1(J*S(x,t)-S(x,t))-\beta S(x,t)I(x,t),\\[2mm] \dfrac{\partial I(x,t)}{\partial t}=d_2(J*I(x,t)-I(x,t))+\beta S(x,t)I(x,t)-\gamma I(x,t).\end{cases}\tag{3}$$

注意到, 系统(3)是系统(1)的一个特例, 那自然要问:系统(1)是否存在具有临界波速的行波解? 回答是肯定的.

为了研究系统(1)的临界波, 仅需考虑系统(1)的子系统(由于系统(1)的第三个方程与前两个方程不是耦合的):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial t}=d_1(J*S(x,t)-S(x,t))-f(S(x,t))g(I(x,t-\tau)),\\[2mm] \dfrac{\partial I(x,t)}{\partial t}=d_2(J*I(x,t)-I(x,t))+f(S(x,t))g(I(x,t-\tau))-\gamma I(x,t).\end{cases}\tag{4}$$

令 $(S(x+ct),I(x+ct))=(S(z),I(z))$, 其中 $z=x+ct$. 将其代入系统(4)可得如下相应的行波系统:

$$\begin{cases}cS'(z)=d_1(J*S(z)-S(z))-f(S(z))g(I(z-c\tau)),\\ cI'(z)=d_2(J*I(z)-I(z))+f(S(z))g(I(z-c\tau))-\gamma I(z),\end{cases}\tag{5}$$

其中边界条件为

$$(S,I)(-\infty)=(S_{-\infty},0),\ I(+\infty)=0,\tag{6}$$

且 S 在 $+\infty$ 处的取值是任意的.

现在, 给定 $f(S_{-\infty})g'(0)>\gamma$, 定义最小传播速度:

$$c^* := \inf_{\lambda>0} \frac{d_2\int_{-\infty}^{+\infty} J(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y - d_2 + f(S_{-\infty})g'(0)\mathrm{e}^{-\lambda c\tau} - \gamma}{\lambda}.$$

本文受文献[17-18]的启发，主要研究系统(4)当 $c = c^*$ 时行波解的存在性.因此，首先利用反证法证明 I 是有界的，并根据 I 的有界性研究波速 $c > c^*$ 时行波解的存在性.其次,利用 $c > c^*$ 时行波的存在性结果证明临界波的存在性.最后，讨论 R_0 对临界波存在性的影响.

这里需要指出的是,文献[14]在证明行波解的存在性时，对建立 I 的有界性附加了一定的条件，而本文使用文献[17-18]中的技巧，在没有限制的条件下,利用反证法证明了 I 的有界性，进而建立了当 $c > c^*$ 时行波解的存在性.由于时滞的存在和函数 g 的性质的影响，在证明 I 的有界性时，很多证明细节与文献[17-18]是不同的.

本文的安排如下：第 1 节研究当 $c > c^*$ 时行波解的有界性；第 2 节证明当 $c = c^*$ 时行波解的存在性；第 3 节给出具体实例,验证了所得的临界波结果;最后,对全文内容进行总结.

1 行波解的有界性

本节主要研究系统(4)行波解的有界性.由文献[14]可得，当 $R_0 > 1$ 和 $c > c^*$ 时，系统(4) 存在满足 $0 < S < S_{-\infty}, I > 0$ 的解(S,I)，且 $S(-\infty) = S_{-\infty}, I(-\infty) = 0$.

引理 1 若函数 (S,I) 是系统(5)波速为 $c > c^*$ 的行波解且 $0 < S < S_{-\infty}, I > 0$，则函数 $\int_{\mathbf{R}} J(y)\dfrac{I(z-y)}{I(z)}\mathrm{d}y, \dfrac{f(S(z))g(I(z-c\tau))}{I(z)}, \left|\dfrac{I'(z)}{I(z)}\right|$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

证明 首先，对方程(5)的第二个方程的两边同时除以 I，可得

$$c\frac{I'(z)}{I(z)} = d_2\int_{\mathbf{R}} J(y)\frac{I(z-y)}{I(z)}\mathrm{d}y - d_2 + \frac{f(S(z))g(I(z-c\tau))}{I(z)} - \gamma. \tag{7}$$

因为 $0 < S < S_{-\infty}$，可得 I'/I 的有界性与 $\int_{\mathbf{R}} J(y)\dfrac{I(z-y)}{I(z)}\mathrm{d}y, \dfrac{f(S(z))g(I(z-c\tau))}{I(z)}$ 的有界性有关.

为了方便起见，记 $u(z) := I'/I$ 和 $\mu = (d_2+\gamma)/c$.则式(7)为

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{d_2}{c}\int_{\mathbf{R}} J(y)\frac{I(z-y)}{I(z)}\mathrm{d}y - \mu + \frac{f(S(z))g(I(z-c\tau))}{cI(z)} = \\ &\frac{d_2}{c}\int_{\mathbf{R}} J(y)\mathrm{e}^{\int_z^{z-y}u(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}y - \mu + \frac{f(S(z))g(I(z-c\tau))}{cI(z)} \geq \\ &\frac{d_2}{c}\int_{\mathbf{R}} J(y)\mathrm{e}^{\int_z^{z-y}u(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}y - \mu. \end{aligned}$$

记 $\kappa := \dfrac{d_2}{c}$ 和 $G(z) := \exp\left(\mu z + \int_0^z u(s)\mathrm{d}s\right)$.因此，对 $G(z)$ 关于 z 求导，有

$$G'(z) = (\mu + u(z))G(z) \geq \kappa\int_{\mathbf{R}} J(y)\mathrm{e}^{\int_z^{z-y}u(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}yG(z) \geq 0. \tag{8}$$

所以 $G(z)$ 是非减的且$\lim_{z\to-\infty} G(z) = 0$.由条件(H2)可知，$r > 0$,其中 r 是 $\operatorname{supp} J$ 的半径.因此，取 $0 < 2r_0 < r$.对方程(8)从 $-\infty$ 到 z 积分，可得

$$G(z) \geq \kappa\int_{-\infty}^{z}\int_{\mathbf{R}} J(y)\mathrm{e}^{\int_x^{x-y}u(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}yG(x)\mathrm{d}x =$$

$$\kappa\int_{\mathbf{R}}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\int_{-\infty}^{z}G(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant$$

$$\kappa\int_{\mathbf{R}}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\int_{z-r_0}^{z}G(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant$$

$$\kappa r_0\int_{\mathbf{R}}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}G(z-r_0-y)\mathrm{d}y,$$

则

$$\int_{-\infty}^{0}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\frac{G(z-r_0-y)}{G(z)}\mathrm{d}y \leqslant (\kappa r_0)^{-1}. \tag{9}$$

然后，对方程(8)关于 x 从 $z-r_0$ 到 z 积分，可得

$$G(z)-G(z-r_0-y) \geqslant \kappa\int_{\xi-r_0}^{z}\int_{\mathbf{R}}J(y)\mathrm{e}^{\int_x^{x-y}u(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}yG(x)\mathrm{d}x =$$

$$\kappa\int_{\mathbf{R}}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\int_{z-r_0}^{z}G(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant$$

$$\kappa r_0\int_{-\infty}^{-2r_0}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}G(z-r_0-y)\mathrm{d}y \geqslant$$

$$\kappa r_0\int_{-\infty}^{-2r_0}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\mathrm{d}yG(z+r_0).$$

因为 $r>2r_0$ 和 $\int_{-\infty}^{-2r_0}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\mathrm{d}y>0$ 且

$$\omega_0 := \frac{1}{\kappa r_0\int_{-\infty}^{-2r_0}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\mathrm{d}y},$$

所以，对任意的 $\xi\in\mathbf{R}$，有

$$G(z+r_0) \leqslant \omega_0 G(z). \tag{10}$$

由于

$$\int_{\mathbf{R}}J(y)\frac{I(z-y)}{I(z)}\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\frac{G(z-y)}{G(z)}\mathrm{d}y,$$

结合式(9)和(10)可得

$$\int_{\mathbf{R}}J(y)\frac{I(z-y)}{I(z)}\mathrm{d}y =$$

$$\int_{-\infty}^{0}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\frac{G(z-y)}{G(z)}\mathrm{d}y + \int_{0}^{+\infty}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\frac{G(z-y)}{G(z)}\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\int_{-\infty}^{0}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\frac{G(z-y)}{G(z)}\mathrm{d}y + \int_{0}^{+\infty}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\omega_0\int_{-\infty}^{0}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\frac{G(z-r_0-y)}{G(z)}\mathrm{d}y + \int_{0}^{+\infty}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\mathrm{d}y \leqslant$$

$$\frac{\omega_0}{\kappa r_0} + \int_{0}^{+\infty}J(y)\mathrm{e}^{\mu y}\mathrm{d}y.$$

又因为 $G(z)$ 是非减的，故

$$G(z) \geqslant G(z-c\tau).$$

整理得

$$\exp\left(\mu z + \int_0^z u(s)\,\mathrm{d}s\right) \geqslant \exp\left(\mu z - \mu c\tau + \int_0^{z-c\tau} u(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

则

$$\exp\left(\mu c\tau - \int_z^{z-c\tau} u(s)\,\mathrm{d}s\right) \geqslant 1.$$

因此

$$\exp\left(\int_z^{z-c\tau} u(s)\,\mathrm{d}s\right) \leqslant \exp(\mu c\tau). \tag{11}$$

由条件(H1)知，对任意的 $t \in [0, I(z-c\tau)]$，有

$$\begin{aligned}\frac{f(S(z))g(I(z-c\tau))}{I(z)} &= \frac{f(S(z))g(I(z-c\tau))}{I(z-c\tau)}\frac{I(z-c\tau)}{I(z)} \leqslant \\ &f(S_{-\infty})\frac{g(I(z-c\tau))}{I(z-c\tau)}\exp\left(\int_{z-c\tau}^z u(s)\,\mathrm{d}s\right) \leqslant \\ &f(S_{-\infty})g'(0)\exp(\mu c\tau),\end{aligned}$$

则

$$\frac{f(S(z))g(I(z-c\tau))}{I(z)} \leqslant \exp(\mu c\tau) f(S_{-\infty})g'(0).$$

所以

$$|u(z)| \leqslant \kappa\int_{\mathbf{R}} J(y)\frac{I(z-y)}{I(z)}\mathrm{d}y + \frac{d_2+\gamma}{c} + \frac{\exp(c\mu\tau)}{c}f(S_{-\infty})g'(0).$$

因此，$\int_{\mathbf{R}} J(y)\frac{I(z-y)}{I(z)}\mathrm{d}y$ 和 $\left|\frac{I'}{I}\right|$ 是有界的. □

下面介绍几个引理用于证明 I 的有界性.

引理 2 任取 $c_k \in (c^*, c^*+1)$ 且 (c_k, S_k, I_k) 是系统(5)波速为 $c = c_k$ 的一序列行波解，且 $0 < S_k < S_{-\infty}$，$I_k > 0$.如果存在一个序列 $\{z_k\}$ 使得当 $k \to +\infty$ 时 $I_k(z_k) \to +\infty$，则 $S_k(z_k) \to 0$.

证明 反证法.假设不成立，则存在一个序列 $\{z_k\}$（仍用 z_k 表示）使得 $S_k(z_k) \geqslant \varepsilon$，其中,$k \in \mathbf{N}$ 和 $\varepsilon > 0$.由式(5)的第一个方程，可得 $S_k'(z) \leqslant 2d_1 S_{-\infty}/c^*$.因此,$S_k(z) \geqslant \varepsilon/2$，$\forall z \in [z_k - \delta, z_k]$.由引理 1 得，存在实数 $L_1 > 0$ 满足 $|I_k'/I_k| \leqslant L_1$.因此，对所有的 $k \in \mathbf{N}$，有

$$\frac{I_k(z_k)}{I_k(z)} = \exp\left\{\int_z^{z_k}\frac{I_k'(s)}{I_k(s)}\mathrm{d}s\right\} \leqslant \mathrm{e}^{L_1\delta}, \qquad \forall z \in [z_k - \delta, z_k].$$

当 $k \to +\infty$ 时，$I_k(z_k) \to +\infty$，则

$$I_k(z) \geqslant \mathrm{e}^{-\delta L_1} I_k(z_k) \to +\infty.$$

又因为

$$\frac{I_k(z)}{I_k(z-c\tau)} = \exp\left\{\int_{z-c\tau}^z \frac{I_k'(s)}{I_k(s)}\mathrm{d}s\right\} \leqslant \mathrm{e}^{c\tau L_1}.$$

因此，当 $k \to +\infty$，有

$$\min_{z \in [z_k-\delta, z_k]} I_k(z-c\tau) \geqslant \mathrm{e}^{-c\tau L_1} I_k(z) \geqslant \mathrm{e}^{-c\tau L_1}\mathrm{e}^{-\delta L_1} I_k(z_k) \to +\infty.$$

注意到

$$\frac{g(I_k(z-c\tau)) - g(0)}{I_k(z-c\tau) - 0} = g'(t_0), \qquad t_0 \in [0, I_k(z-c\tau)].$$

根据条件(H1)可知 $0 < g'(I_k(z - c\tau)) < g'(t_0) < g'(0)$.则由式(5)的第一个方程得

$$\max_{z\in[z_k-\delta,z_k]} S'_k(z) \leqslant \frac{2d_1 S_{-\infty}}{c^*} - f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) g'(t_0) I_k(z - c\tau) \to -\infty .$$

这与 $S_k(z) < S_{-\infty}$ 矛盾.证毕. □

引理 3 若 (S,I) 是系统(5)波速为 $c > c^*$ 时的行波解且 $0 < S(\xi) < S_{-\infty}$, $I > 0$, 如果 $\limsup_{z\to+\infty} I(z) = +\infty$,那么 $\lim_{z\to+\infty} I(z) = +\infty$.

证明 假设 $m := \liminf_{z\to+\infty} I(z) < +\infty$.则存在点列 $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 满足 $\lim_{k\to+\infty} z_k = +\infty$ 和 $I(z_k) \to m$.因此, 对任意的 $k \in \mathbf{N}$, 有 $I(z_k) \leqslant m + 1$.

再者,对每一个 $k \in \mathbf{N}$,假设存在一个点 $y_k \in [z_k, z_k + 1]$ 使得 $I(y_k) = \max_{z\in[z_k,z_k+1]} I(z)$.又因为 $\limsup_{z\to+\infty} I(z) = +\infty$, 则当 $k \to +\infty$ 时, $I(y_k) \to +\infty$.因为 L_1 是引理 1 中给定的常数, 所以, 对所有的 $k \in \mathbf{N}$, 有 $I(y_k) > (m + 1)\mathrm{e}^{L_1 r}$, 其中 r 是 supp J 的半径.那么, 当 $|y - y_k| \leqslant r$ 时,有

$$\frac{I(y_k)}{I(y)} = \exp\left(\int_y^{y_k} \frac{I'(z)}{I(z)} \mathrm{d}z\right) \leqslant \mathrm{e}^{L_1 r}, \qquad \forall k \in \mathbf{N},$$

可得 $[y_k - r, y_k + r] \subset (z_k, z_k + 1)$.因此, 由式(5)的第二个方程可得出

$$\begin{aligned} 0 = {} & cI'(y_k) = \\ & d_2 \int_{\mathbf{R}} J(y)(I(y_k - y) - I(y))\mathrm{d}y + f(S(y_k))g(I(y_k - c\tau)) - \gamma I(y_k) \leqslant \\ & f(S(y_k))g(I(y_k - c\tau)) - \gamma I(y_k). \end{aligned} \tag{12}$$

由 $\lim_{k\to+\infty} I(y_k) = +\infty$ 和引理 2, 所以 $\lim_{k\to+\infty} S(y_k) = 0$.因此, $\lim_{z\to+\infty} I(z) = +\infty$.证毕. □

引理 4[19] 假设 $c > 0$, $B(\cdot)$ 是一个连续函数满足 $B(\pm\infty) := \lim_{z\to\pm\infty} B(z)$.令 $Z(z)$ 为一个可测函数且满足

$$cZ(z) = \int_{\mathbf{R}} J_j(y)\mathrm{e}^{\int_z^{z-y} Z(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}y + B(z).$$

因此, Z 是一致连续和一致有界.再者, $\psi^{\pm} := \lim_{z\to\pm\infty} Z(z)$ 存在且是方程

$$c\psi = \int_{\mathbf{R}} J_j(y)\mathrm{e}^{-\psi y}\mathrm{d}y + B(\pm\infty) \qquad (j = 1,2)$$

的特征根.

定理 1 若函数 (S,I) 是系统(5)波速为 $c > c^*$ 时的行波解且 $S(-\infty) = S_{-\infty}$, $I > 0$, 则 I 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

证明 反证法.假设 I 在 $\mathbf{R}$ 上无界, 则 $\limsup_{z\to+\infty} I(z) = +\infty$.因此由引理2和引理3,可得 $I(+\infty) = +\infty$ 和 $S(+\infty) = 0$.

记 $u(x) = I'(x)/I(x)$.对式(5) 的第二个方程两边同除以 I, 则有

$$u(z) = \frac{d_2}{c}\int_{\mathbf{R}} J(y) \frac{I(z - y)}{I(z)} \mathrm{d}y - \frac{d_2 + \gamma}{c} + \frac{f(S(z))g(I(z - c\tau))}{I(z)}.$$

因为 $S(+\infty) = 0$ 和 $S(-\infty) = S_{-\infty}$,所以由引理 4 可得 $\lim_{z\to+\infty} u(z)$ 存在, 且满足

$$d_2\left(\int_{\mathbf{R}} J(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y - 1\right) - c\lambda - \gamma = 0. \tag{13}$$

定义连续函数:

$$h(c,\lambda) = d_2\left(\int_{\mathbf{R}} J(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y - 1\right) - c\lambda - \gamma.$$

因此，h 满足 $h(0,c)=-\gamma<0$ 且

$$\left.\frac{\partial h}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=-c<0,\ \frac{\partial^2 h}{\partial\lambda^2}=d_2\int_{\mathbf{R}}J(y)y^2\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y>0,\ \lim_{\lambda\to+\infty}h(\lambda,c)=+\infty.$$

所以方程(13)存在唯一的正根 λ_0.因为 $I(z)>0$ 和 $\lim_{z\to+\infty}I(z)=+\infty$，因此 $\lim_{z\to+\infty}u(z)\geqslant 0$，则 $\lim_{z\to+\infty}u(z)=\lambda_0$.由文献[14]，可得 $I(z)\leqslant \mathrm{e}^{\lambda_1 z}$，其中 $0<\lambda_1<\lambda_2$ 是方程

$$d_2\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y-d_2-c\lambda+f(S_{-\infty})g'(0)\mathrm{e}^{-\lambda c\tau}-\gamma=0 \tag{14}$$

的两个特征根.将 λ_2 代入方程(14)，整理得

$$d_2\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}\mathrm{d}y-d_2-c\lambda_2-\gamma=-f(S_{-\infty})g'(0)\mathrm{e}^{-\lambda_2 c\tau}<0,$$

则 $0<\lambda_1<\lambda_2<\lambda_0$.因为 $\lim_{z\to+\infty}\theta(z)=\lambda_0$，从而存在 z_* 和 L 满足

$$I(z)\geqslant L\mathrm{e}^{((\lambda_0+\lambda_2)/2)z_*}.$$

这与 $\lambda_1<(\lambda_2+\lambda_0)/2$ 矛盾.因此，I 有界.证毕. □

正如文献[14]中所描述的，只要 I 有界，下面的结果都成立.因此在这里只给出部分证明.

定理 2 如果 $R_0>1$ 和 $c>c^*$，那么式(5)存在行波解 $(S(z),I(z))$ 满足 $0<S(z)<S_{-\infty}$，$0<I(z)$，$S(+\infty)=\sigma<S(-\infty)=S_{-\infty}$ 和 $I(\pm\infty)=0$，其中 $\sigma>0$.同时

$$\int_{\mathbf{R}}f(S(z))g(I(z-c\tau))\mathrm{d}z<+\infty,\ \int_{\mathbf{R}}I(z)\mathrm{d}z<+\infty.$$

证明 由文献[14]中定理 2.1，可得式(5)存在一个解 $(S(z),I(z))$ 且满足 $0<S(z)<S_{-\infty}$，$0<I(z)$，$S(+\infty)=\sigma$，$S(-\infty)=S_{-\infty}$ 和 $I(\pm\infty)=0$.对任意的 $\varphi,\upsilon\in\mathbf{R}$，有

$$\begin{aligned}&\int_{\upsilon}^{\varphi}(J*S(z)-S(z))\mathrm{d}z=\\&\quad\int_{\upsilon}^{\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)[S(\upsilon-y)-S(\upsilon)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi=\\&\quad-\int_{\upsilon}^{\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)y\int_0^1S'(\upsilon-ty)\mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi=\\&\quad\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)y\int_0^1[S(\upsilon-ty)-S(\varphi-ty)]\mathrm{d}t\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因此

$$\left|\int_{\upsilon}^{\varphi}(J*S(z)-S(z))\mathrm{d}z\right|<2S_{-\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}J(y)|y|\mathrm{d}y:=C_0.$$

再对式(5)的第一个方程从 υ 到 φ 积分，可得

$$\begin{aligned}&\int_{\upsilon}^{\varphi}f(S(z))g(I(z-c\tau))\mathrm{d}z=\\&\quad d_1\int_{\upsilon}^{\varphi}(J*S(z)-S(z))\mathrm{d}z+cS(\upsilon)-cS(\varphi)\leqslant d_1C_0+2cS_{-\infty}.\end{aligned}$$

因此

$$\int_{\mathbf{R}}f(S(z))g(I(z-c\tau))\mathrm{d}z<+\infty.$$

又因 $I(z)$ 有界，所以存在实数 M 使得 $I(z)\leqslant M$ 成立.对式(5)的第二个方程从 ζ 到 η 积分，有

$$\begin{aligned}\gamma\int_{\zeta}^{\eta}I(z)\mathrm{d}z=&d_2\int_{\mathbf{R}}J(y)(-y)\int_0^1[I(\eta-\theta y)-I(\zeta-\theta y)]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}y+\\&\int_{\zeta}^{\eta}f(S(z))g(I(z-c\tau))\mathrm{d}z-c(I(\eta)-I(\zeta)).\end{aligned} \tag{15}$$

因此

$$\gamma\int_{\zeta}^{\eta}I(z)\,\mathrm{d}z \leqslant 2d_2M\int_{\mathbf{R}}J(y)\,|-y|\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbf{R}}f(S(z))g(I(z-c\tau))\,\mathrm{d}z + 2cM.$$

所以

$$\int_{\mathbf{R}}I(z)\,\mathrm{d}\xi < +\infty.$$

因为 $I(z)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界, 所以, 由式(5)的第二个方程可得 $|I'(z)| < +\infty$ 且 $I(+\infty)=0$.最后, 类似于文献[14], 可得 $S(+\infty)=\sigma$,其中,$\sigma>0$.因此, 定理 2 成立.证毕. □

2 临界波行波解的存在性

本节考察当 $c=c^*$ 和 $R_0>1$ 时,系统(5)的行波解的存在性.为了证明当 $c=c^*$ 时的行波解的存在性,取一列严格递减序列 $\{c_k\}$ 使得$\lim_{k\to+\infty}c_k=c^*$.不失一般性,假设 $c_k\in[c^*,c^*+1]$ 且(S_k, I_k) 是式(5)的行波解.

引理 5 $\{I_k\}$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致有界.

证明 反证法.假设不成立,则存在一个序列 $\{z_k\}$ 使得当 $k\to+\infty$ 时,有 $I_k(z_k)\to+\infty$.由引理 2 可得, $S_k(z_k)\to0$.又因为对每一个 k, 均有 $I_k(\pm\infty)=0$ 和 $I_k(z)$ 有界.因此, 假设 $I_k(z_k)=\max_{\mathbf{R}}I_k(z)$.则 $I'_k(z_k)=0$.因此

$$\begin{aligned}&0=c_kI'_k(z_k)=\\&\quad d_2\int_{\mathbf{R}}J(y)(I_k(z_k-y)-I_k(z_k))\,\mathrm{d}y+f(S_k(z_k))g(I_k(z_k-c\tau))-\gamma I_k(z_k)\leqslant\\&\quad f(S_k(z_k))g(I_k(z_k-c\tau))-\gamma I_k(z_k).\end{aligned}$$

这与足够大的 k 矛盾, 故$\{I_k\}$ 是一致有界的.证毕. □

定理 3 假设 $R_0>1$ 和 $c=c^*$.则方程(5)存在行波解$(S_*(z),I_*(z))$ 满足 $0<S_*(z)<S_{-\infty}$, $I_*(z)>0$, $S_*(-\infty)=S_{-\infty}$ 和 $I_*(\pm\infty)=0$, 其中 $\sigma\geqslant0$.

证明 因为 $c^*<c_k<c^*+1$, 所以 $0<S_k(z)<S_{-\infty}$ 和 $0<I_k(z)<+\infty$.并且,$S_k(-\infty)=S_{-\infty}$, $I_k(\pm\infty)=0$ 和 $S_k(+\infty)=\sigma<S_{-\infty}$.又因为$(S_k,I_k)$ 满足

$$\begin{cases}c_kS'_k(z)=d_1\int_{\mathbf{R}}J(y)(S_k(z-y)-S_k(z))\,\mathrm{d}y-f(S_k(z))g(I_k(z-c_k\tau)),\\c_kI'_k(z)=d_2\int_{\mathbf{R}}J(y)(I_k(z-y)-I_k(z))\,\mathrm{d}y+\\\qquad f(S_k(z))g(I_k(z-c_k\tau))-\gamma I_k(z).\end{cases}\tag{16}$$

对式(16)的第二个方程在 $\mathbf{R}$ 上积分, 可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f(S_k(z))g(I_k(z-c_k\tau))-\gamma I_k(z))\,\mathrm{d}z=0,$$

则

$$\inf_{z\in\mathbf{R}}f(S_k(z)) < \frac{\gamma I_k(z)}{g(I_k(z-c_k\tau))},\qquad\forall k\in\mathbf{Z}.$$

因为 $|I'_k/I_k|\leqslant K$ 和条件(H1), 因此

$$\begin{aligned}&\inf_{z\in\mathbf{R}}f(S_k(z)) < \frac{\gamma I_k(z)}{g(I_k(z-c_k\tau))}=\\&\quad\gamma\frac{I_k(z)}{I_k(z-c_k\tau)}\frac{I_k(z-c_k\tau)}{g(I_k(z-c_k\tau))}\leqslant\gamma\mathrm{e}^{c_kK\tau}\frac{1}{g'(t)},\qquad\forall t\in[0,I_k(z-c_k\tau)].\end{aligned}$$

又因为 I_k 是一致有界的，所以存在一个常数 M 使得 $I_k(z-c\tau)<M$.所以

$$\inf_{z\in\mathbf{R}} f(S_k(z))<\gamma e^{c_kK\tau}\frac{1}{g'(M)}.$$

由条件(H1)可得 $f(x)$ 是单调递增且 $f(S_{-\infty})g'(0)>\gamma$，则存在 z_k 满足 $f(S_k(z_k))=\gamma e^{c_kK\tau}(1/g'(M))$.经过平移，可得 $f(S_k(0))=\gamma e^{c_kK\tau}(1/g'(M))$.又因为 $0<S_k<S_{-\infty}$ 且 $\{I_k\}$ 是一致有界的，所以 $\{I'_k\}$ 有界.因此，根据 Arzela-Ascoli 定理，当 $k\to+\infty$ 时，有 $S_k\to S_*$ 和 $I_k\to I_*$ 在 $C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ 上成立且满足

$$\begin{cases} c_*S'_*(z)=d_1\int_{\mathbf{R}}J(y)(S_*(z-y)-S_*(z))dy-f(S_*(z))g(I_*(z-c\tau)), \\ c_*I'_*(z)=d_2\int_{\mathbf{R}}J(y)(I_*(z-y)-I_*(z))dy+ \\ \qquad f(S_*(z))g(I_*(z-c\tau))-\gamma I_*(z), \end{cases} \tag{17}$$

以及

$$f(S_*(0))=\gamma e^{c^*K\tau}\frac{1}{g'(M)},\qquad 0\leqslant S_*\leqslant S_{-\infty},\ 0\leqslant I_*\leqslant+\infty.$$

类似于 $c>c^*$,可得 $I_*(\pm\infty)=0$.

首先，证明 $S_*>0$.反证法，假设存在常数 $y_0\in\mathbf{R}$ 使得 $S_*(y_0)=0$ 成立,则 $S'_*(y_0)=0$.因此,式(17)的第一个方程为 $\int_{\mathbf{R}}J(y)S_*(y_0-y)dy=0$.所以,$S_*\equiv0$ 且 $f(S_*)\equiv0$.这与 $f(S_k(0))$ 矛盾.因此,$S_*>0$.

其次，证明 $I_*>0$.反证法，假设存在 $y\in\mathbf{R}$ 使得 $I_*(y)=0$ 成立.类似于 $S_*(z)>0$ 的证明，可得 $I_*\equiv0$.则式(17)的第一个方程为

$$c^*S'_*(z)=d_1\int_{\mathbf{R}}J(y)(S_*(z-y)-S_*(z))dy. \tag{18}$$

记

$$H(v):=d_1\left(\int_{\mathbf{R}}J(y)e^{-vy}dy-1\right)-c^*v.$$

因为

$$H(0)=0,\ \left.\frac{\partial H}{\partial v}\right|_{v=0}=-c^*<0,\ \frac{\partial^2H}{\partial v^2}=d_1\int_{\mathbf{R}}J(y)y^2e^{-vy}dy>0,\ \lim_{v\to+\infty}H(v)=+\infty.$$

因此,$H(v)=0$ 有两个实根 0 和 v_0.由式(18)、文献[19]中性质 3.6 和 $S_*(z)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界,可得 $S_*(z)\equiv C$，其中 $C\in[0,S_{-\infty}]$.因为 $f(S_*(0))=\gamma e^{c^*K\tau}(1/g'(M))$，因此 $f(C)\equiv\gamma e^{c^*K\tau}(1/g'(M))$.再者，因为 $f(S_{-\infty})g'(M)>\gamma e^{c^*K\tau}>\gamma$,所以，选择 $\rho_k<0$ 使得

$$f(S_k(z))>\frac{f(S_{-\infty})+\gamma e^{c^*K\tau}(1/g'(M))}{2},\qquad \forall\xi<\rho_k,$$

$$f(S_k(\rho_k))=\frac{f(S_{-\infty})+\gamma e^{c^*K\tau}(1/g'(M))}{2}$$

成立.

接下来，证明存在一个正常数 T_0 使得 $\rho_k\geqslant-T_0$.反证法,当 $k\to+\infty$ 时，有 $\rho_k\to+\infty$.定义两个函数;

$$U_k(z)=S_k(\rho_k+z),\ V_k(z)=\frac{I_k(\rho_k+z)}{I_k(\rho_k)},\qquad \forall z\in\mathbf{R}.$$

则对每一个 $k\in\mathbf{N}$，有 $(U_k(z),V_k(z))$ 满足

$$\begin{cases}c_kU'_k(z)=d_1\int_{\mathbf{R}}J(y)(U_k(z-y)-U_k(z))\mathrm{d}y-f(U_k(z))g(I_k(\rho_k+z-c\tau)),\\ c_kV'_k(z)=d_2\int_{\mathbf{R}}J(y)(V_k(z-y)-V_k(z))\mathrm{d}y-\\ \qquad f(U_k(z))\dfrac{g(I_k(z+\rho_k-c\tau))}{I_k(\rho_k)}-\gamma V_k(z).\end{cases}\tag{19}$$

因为

$$\frac{g(I_k(z+\rho_k-c\tau))}{I_k(\rho_k)}=\frac{g(I_k(z+\rho_k-c\tau))}{I_k(z+\rho_k-c\tau)}U_k(z-c\tau)=g'(t_1)U_k(z-c\tau),$$
$$\forall t_1\in[0,I_k(z+\rho_k-c\tau)],$$

则式(19)的第二个方程为

$$c_kV'_k(z)=d_2\int_{\mathbf{R}}J(y)(V_k(z-y)-V_k(z))\mathrm{d}y-f(U_k(z))g'(t_1)V_k(z-c\tau)-\gamma V_k(z).$$

又因为

$$V_k(z)=\frac{I_k(z+\rho_k)}{I_k(\rho_k)}=\exp\left(\int_{\rho_k}^{z+\rho_k}\frac{I'_k(x)}{I_k(x)}\mathrm{d}x\right),$$

则 $V_k(z)$ 在 $\mathbf{R}$ 上局部一致有界.又因为对所有的 $k\in\mathbf{N}$,均有 $U_k(z)<S_{-\infty}$.因此,当 $k\to+\infty$ 时，有 $U_k(z)\to U_{+\infty}(z)$ 和 $V_k(z)\to V_{+\infty}(z)$,其中 $U_{+\infty}(z)\in C^1_{\mathrm{loc}}(R)$,$V_{+\infty}(z)\in C^1_{\mathrm{loc}}(R)$.因为 $\lim_{k\to+\infty}I_k(\rho_k)=0$，所以 $(U_{+\infty}(z),V_{+\infty}(z))$ 满足

$$c^*U'_{+\infty}(z)=d_1\int_{\mathbf{R}}J(y)(U_{+\infty}(z-y)-U_{+\infty}(z))\mathrm{d}y,\tag{20}$$

$$c^*V'_{+\infty}(z)=d_2\int_{\mathbf{R}}J(y)(V_{+\infty}(z-y)-V_{+\infty}(z))\mathrm{d}y+$$
$$f(U_{+\infty}(z))g'(0)V_{+\infty}(z-c\tau)-\gamma V_{+\infty}(z).\tag{21}$$

类似地，由文献[19]中性质 3.6、式(19)和 $U_{+\infty}(z)$ 有界，可得 $U_{+\infty}(z)\equiv C_1$ 成立，其中 C_1 是任意常数.因为

$$f(U_k(0))=f(S_k(\rho_k))=\frac{f(S_{-\infty})+\mathrm{e}^{c^*K\tau}(\gamma/g'(M))}{2}.$$

所以

$$f(U_{+\infty}(z))=\frac{f(S_{-\infty})+\mathrm{e}^{c^*K\tau}(\gamma/g'(M))}{2}.$$

将 $f(U_{+\infty}(z))$ 代入到方程(21),整理得

$$c^*V'_{+\infty}(z)=d_2\int_{\mathbf{R}}J(y)(V_{+\infty}(z-y)-V_{+\infty}(z))\mathrm{d}y+$$
$$\frac{f(S_{-\infty})+\mathrm{e}^{c^*K\tau}(\gamma/g'(M))}{2}g'(0)V_{+\infty}(z-c^*\tau)-\gamma V_{+\infty}(z).$$

令

$$Q(\chi):=d_2\left(\int_{\mathbf{R}}J(y)\mathrm{e}^{-\chi y}\mathrm{d}y-1\right)-c^*\chi+$$

$$\frac{f(S_{-\infty})+\mathrm{e}^{c^*K\tau}(\gamma/g'(M))}{2}g'(0)\mathrm{e}^{-\chi c^*\tau}-\gamma.$$

因为 $S_k(-\infty)=S_{-\infty}$ 和引理 4，因此，由式(5)的第二个方程可得

$$\psi_k:=\lim_{z\to-\infty}\frac{I'_k(z)}{I_k(z)}$$

存在且是方程

$$d_2\int_{\mathbf{R}}J(y)\mathrm{e}^{-\psi y}\mathrm{d}y-c^*\psi+f(S_{-\infty})g'(0)\mathrm{e}^{-c^*\psi\tau}-\gamma=0$$

的一个特征根 $\{\psi_\pm\}$,则当 $k\to+\infty$ 时，$\psi_\pm\to\psi^*$ 且满足

$$d_2\int_{\mathbf{R}}J(y)\mathrm{e}^{-\psi y}\mathrm{d}y-c^*\psi+f(S_{-\infty})g'(0)\mathrm{e}^{-c^*\psi\tau}-\gamma=0. \tag{22}$$

因此

$$\begin{aligned}Q(\psi^*)=&\frac{f(S_{-\infty})+\mathrm{e}^{c^*K\tau}(\gamma/g'(M))}{2}g'(0)\mathrm{e}^{-\psi^*c^*\tau}-\\&\gamma-(f(S_{-\infty})g'(0)\mathrm{e}^{-\psi^*c^*\tau}-\gamma)\leqslant\\&f(S_{-\infty})g'(0)\mathrm{e}^{-\psi^*c^*\tau}-f(S_{-\infty})g'(0)\mathrm{e}^{-\psi^*c^*\tau}=0.\end{aligned}$$

所以 $Q(\chi)=0$ 有两个根χ_1,χ_2，且 $0<\chi_1<\chi_2$.类似地，再由文献[19]中性质 3.6 和式(21)，可得

$$V_{+\infty}(z)=T_3\mathrm{e}^{\chi_1}+T_4\mathrm{e}^{\chi_2}, \tag{23}$$

其中 $T_j(j=3,4)$ 是常数.

另一方面，当 $k\to+\infty$ 时,有

$$V_k(z)=\frac{I_k(\rho_k+z)}{I_k(\rho_k)}=\mathrm{e}^{\int_{\rho_k}^{\rho_k+z}(I'_k(s)/I_k(s))\mathrm{d}s}\to\mathrm{e}^{\psi^*z},$$

则 $V_{+\infty}(z)=\mathrm{e}^{\psi^*z}$.因为$\chi_1<\psi^*<\chi_2$,这与式(22)矛盾.所以，存在一个 $T_0>0$ 使得$\rho_k\geqslant-T_0$ 成立.因此

$$\begin{aligned}&f(S_k(-T_0))>\frac{f(S_{-\infty})+\mathrm{e}^{c^*K\tau}\gamma(1/g'(M))}{2}\Rightarrow\\&\quad f(S_*(-T_0))\geqslant\frac{f(S_{-\infty})+\mathrm{e}^{c^*K\tau}\gamma(1/g'(M))}{2}.\end{aligned}$$

这与$f(S_k(z))\equiv\mathrm{e}^{c^*K\tau}\gamma(1/g'(M))$ 矛盾.因此，可得 $I_*(\xi)>0$.

接下来,可证 $S_*(z)<S_{-\infty}$ 在 $\mathbf{R}$ 上成立.假设存在实数 ϖ 使得 $S_*(\varpi)=S_{-\infty}$.从而,$S'_*(\varpi)=0$ 且 $S_*(\varpi)$ 满足

$$\begin{aligned}0=c^*S'_*(\varpi)=d_1\int_{\mathbf{R}}J(y)(S_*(\varpi-y)-S_*(\varpi))\mathrm{d}y-f(S_*(\varpi))g(I_*(\varpi-c\tau))\leqslant\\-f(S_*(\varpi))g(I_*(\varpi-c\tau)).\end{aligned}$$

这与 $I_*>0$ 矛盾.

最后，证明 $S_*(-\infty)=S_{-\infty}$.尽管证明的思想与文献[17]中给定的相似，但为了文章的完整性还是给出详细的证明.设 $\varsigma=\liminf_{x\to-\infty}S_*(x)=S_{-\infty}$.反证法,假设$\varsigma<S_{-\infty}$，则存在点列$\{\eta_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 使得$\lim_{n\to+\infty}\eta_n=-\infty$ 和 $\lim_{n\to+\infty}S_*(\eta_n)=\varsigma$ 成立.定义函数：

$$\phi_n(x):=S_*(x+\theta_n),\ \psi_n(x):=I_*(x+\theta_n),\qquad x\in\mathbf{R}.$$

因此，当 $n\to+\infty$ 时，$\psi_n(x)\to 0$.提取子序列(仍然用$\{\theta_n\}$表示)，当 $n\to+\infty$ 时，$\lim_{n\to+\infty}\theta_n=-\infty$ 且 $\phi_n\to\phi_{+\infty}$，其中 $\phi_{+\infty}\in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$.因此 $\phi_{+\infty}$ 满足

$$c^*\phi'_{+\infty}(z)=d_1\int_{\mathbf{R}}J(y)(\phi_{+\infty}(z-y)-\phi_{+\infty}(z))\mathrm{d}y.$$

所以，$\phi_{+\infty}\equiv\varsigma$.因此

$$\lim_{n\to+\infty}S_*(x+\theta_n)=\varsigma. \tag{24}$$

又因为(c_k,S_k,I_k)是系统(16)的行波解，所以

$$c_kS'_k(z)=d_1\int_{\mathbf{R}}J(y)(S_k(z-y)-S_k(z))\mathrm{d}y-f(S_k(z))g(I_k(z-c\tau)). \tag{25}$$

对式(19)的第一个方程从 $-\infty$ 到 θ_n 积分，可得

$$c_k[S_k(\theta_n)-\sigma]=d_1\int_{-\infty}^{\theta_n}\int_{\mathbf{R}}J(y)(S_k(z-y)-S_k(z))\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\int_{-\infty}^{\theta_n}f(S_k(z))g(I_k(z-c\tau))\mathrm{d}z,$$

其中 $n\in\mathbf{N}$.又因为 $S_k(-\infty)=S_{-\infty}$ 且 $J(x)=J(-x)$，可得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\theta_n}\int_{\mathbf{R}}J(y)(S_k(z-y)-S_k(z))\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\\&\quad\int_{\mathbf{R}}J(y)\int_{-\infty}^{\theta_n}(S_k(z-y)-S_k(z))\mathrm{d}z\mathrm{d}y=\\&\quad\int_{\mathbf{R}}J(y)(-y)\int_{-\infty}^{\theta_n}\int_0^1S'_k(z-ty)\mathrm{d}t\mathrm{d}z\mathrm{d}y=\\&\quad\int_{\mathbf{R}}J(y)(-y)\int_0^1[S'_k(\theta_n-ty)-S_{-\infty}]\mathrm{d}t\mathrm{d}y=\\&\quad\int_{\mathbf{R}}J(y)y\int_0^1S_k(\theta_n+ty)\mathrm{d}t\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因此，对 k 取极限，有

$$c^*[S_*(\theta_n)-S_{-\infty}]=d_1\int_{\mathbf{R}}J(y)y\int_0^1S_*(\theta_n+ty)\mathrm{d}t\mathrm{d}y-\int_{-\infty}^{\theta_n}f(S_*(z))g(I_*(z-c\tau))\mathrm{d}z.$$

因为 S_*,I_* 均有界且$\int_{\mathbf{R}}f(S_*(z))g(I_*(z-c\tau))\mathrm{d}z<+\infty$.则对 n 取极限，有

$$0>c^*[\varsigma-S_{-\infty}]\geqslant 0.$$

因此，$S_*(-\infty)=S_{-\infty}$.证毕. □

3 应用实例

这一节主要通过具体的生物模型进一步验证临界波的存在性.

在系统(5)中，令 $f(S)=S,g(I)=\beta I/(1+\alpha I)$，则

$$f(S(x,t))g(I(x,t-\tau))=\beta S(x,t)\frac{I(x,t-\tau)}{1+\alpha I(x,t-\tau)},$$

那么，系统(5)就变为如下具有非线性发生率的时滞反应扩散方程：

$$\begin{cases}cS'(z)=d_1(J*S(z)-S(z))-\beta S(z)\dfrac{I(z-c\tau)}{1+\alpha I(z-c\tau)},\\cI'(z)=d_2(J*I(z)-I(z))+\beta S(z)\dfrac{I(z-c\tau)}{1+\alpha I(z-c\tau)}-\gamma I(z),\end{cases} \tag{26}$$

其中$\beta > 0$表示感染率，γ表示恢复率，对于系统(26)，条件(H1)和(H2)显然成立.边界条件：$(S(-\infty), I(-\infty)) = (S_{-\infty}, 0)$是初始无病平衡点，$(S(+\infty), I(+\infty)) = (S_{+\infty}, 0)$是某一个无病平衡点，且$S(+\infty)$为任意实数.显然，系统(26)是在文献[20]的基础上考虑到霍乱具有潜伏期且易感者与感染者的活动可能是非局部的因素下建立的模型.

对系统(26)的第二个方程在初始无病平衡点线性化，则特征方程为

$$c\lambda = d_2\int_{-\infty}^{+\infty} J(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y - d_2 + \beta S_{-\infty}\mathrm{e}^{-\lambda c\tau} - \gamma .$$

显然，给定$\beta S_{-\infty} > \gamma$，则系统(26)的最小传播速度为

$$c^* := \inf_{\lambda > 0} \frac{d_2\int_{-\infty}^{+\infty} J(y)\mathrm{e}^{-\lambda y}\mathrm{d}y - d_2 + \beta S_{-\infty}\mathrm{e}^{-\lambda c\tau} - \gamma}{\lambda}.$$

因为$g'(I) = \beta/(1 + \alpha I)^2$，所以$g'(I) > 0$且$g'(0) = \beta$.又$S(z) \leqslant S_{-\infty}$，因此$f(S(z)) \leqslant S_{-\infty}$，则由系统的(26)的第二个方程可得

$$\left|\frac{I'}{I}\right| \leqslant \frac{d_2}{c}\int_{\mathbf{R}} J(y)\,\frac{I(z-y)}{I(z)}\,\mathrm{d}y + \frac{d_2 + \gamma}{c} + \beta S_{-\infty}\,\frac{\exp(\tau(d_2 + \gamma))}{c},$$

所以引理 1 成立.由此可知引理 2、引理 3 和引理 4 都成立，则$I(z)$是有界的，所以定理 1 成立.因此，类似于文献[14]的方法，易得当波速$c > c^*$时，系统(26)存在满足边界条件的行波解，所以定理 2 成立.

任意选取一列严格递减序列$\{c_k\}$使得$\lim_{k\to+\infty} c_k = c^*$.由于当波速$c > c^*$时，系统(26)存在满足边界条件的行波解.不失一般性，假设$c_k \in [c^*, c^* + 1]$且(S_k, I_k)是系统(26)的行波解.则(S_k, I_k)满足下面的模型：

$$\begin{cases} c_k S_k'(z) = d_1(J * S_k(z) - S_k(z)) - \beta S_k(z)\,\dfrac{I_k(z - c_k\tau)}{1 + \alpha I_k(z - c_k\tau)}, \\ c_k I_k'(z) = d_2(J * I_k(z) - I_k(z)) + \beta S_k(z)\,\dfrac{I_k(z - c_k\tau)}{1 + \alpha I_k(z - c_k\tau)} - \gamma I_k(z), \end{cases} \tag{27}$$

其中

$$(S_k(-\infty), I_k(-\infty)) = (S_{-\infty}, 0),\ (S_k, I_k)(+\infty) = (S_{+\infty}, 0).$$

又因为引理 2 和定理 1 成立，所以对每一个k，都有I_k有界且$I_k(\pm\infty) = 0$，则证得引理 5 成立，因而$\{I_k\}$是一致有界的，即总可以找到一个$M > 0$使得$I_k \leqslant M$.又因为I_k有界，则由系统(27)的第二个方程可得，$|I_k'/I_k|$有界，则存在一个常数$K > 0$使得$|I_k'/I_k| \leqslant K$.

因此由理论结果可知，当$R_0 > (1 + \alpha M)^2\mathrm{e}^{c^*K\tau}$且$c = c^*$时，系统(26)存在满足边界条件的行波解，即定理 3 对于模型(26)依然成立.

4 总　　结

本文研究了一类具有非线性发生率与时滞的非局部扩散 SIR 模型的临界波的存在性，文献[14-15]中没有讨论当$c = c^*$时，系统(5)的行波解是否存在.受到文献[17-18]的启发，本文证明了系统(5)在$R_0 > g'(0)\mathrm{e}^{c^*}K\tau/g'(M)$和$c = c^*$时，存在行波解.而对于$1 < R_0 \leqslant g'(0)\mathrm{e}^{c^*}K\tau/g'(M)$和$c = c^*$，同样认为其是临界波存在的条件，这将是笔者下一步需要研究的问题.

参考文献(References):

[1] VAN DEN DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. *Mathematical Biosciences*, 2002, **180**(1/2): 29-48.

[2] YANG F Y, LI Y, LI W T, et al. Traveling waves in a nonlocal dispersal Kermack-McKendrick epidemic model[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*(*Series B*), 2013, **18**(7): 1969-1993.

[3] WANG H Y. Spreading speeds and traveling waves for non-cooperative reaction-diffusion systems[J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2011, **21**(5): 747-783.

[4] WANG H Y, WANG X S. Traveling wave phenomena in a Kermack-Mckendrick SIR model[J]. *Journal of Dynamics & Differential Equations*, 2016, **28**(1): 143-166.

[5] WANG J B, LI W T, YANG F Y. Traveling waves in a nonlocal dispersal SIR model with nonlocal delayed transmission[J]. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulations*, 2015, **27**(1/3): 136-152.

[6] FU S C, GUO J S, WU C C. Traveling wave solutions for a discrete diffusive epidemic model[J]. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 2016, **17**(9): 1739-1751.

[7] ZHANG T R, WANG W D, WANG K F. Minimal wave speed for a class of non-cooperative diffusion-reaction system[J]. *Journal of Differential Equations*, 2016, **260**(3): 2763-2791.

[8] WANG X S, WANG H Y, WU J H. Traveling waves of diffusive predator-prey systems: disease outbreak propagation[J]. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 2017, **32**(9): 3303-3324.

[9] LI Y, LI W T, YANG F Y. Traveling waves for a nonlocal dispersal SIR model with delay and external supplies[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, **247**: 723-740.

[10] LI Y, LI W T, LIN G. Traveling waves of a delayed diffusive SIR epidemic model[J]. *Communications on Pure & Applied Analysis*, 2015, **14**(3): 1001-1022.

[11] WANG Z C, WU J H. Travelling waves of a diffusive Kermack-McKendrick epidemic model with non-local delayed transmission[J]. *Proceedings Mathematical Physical & Engineering Sciences*, 2010, **466**(2113): 237-261.

[12] LI W T, YANG F Y, MA C, et al. Traveling wave solutions of a nonlocal delayed SIR model without outbreak threshold[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*(*Series B*), 2014, **19**(2): 467-484.

[13] BAI Z G, WU S L. Traveling waves in a delayed SIR epidemic model with nonlinear incidence[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, **263**: 221-232.

[14] 邹霞, 吴事良. 一类具有非线性发生率与时滞的非局部扩散 SIR 模型的行波解[J]. 数学物理学报, 2018, **38**(3): 496-513.(ZOU Xia, WU Shiliang. Traveling waves in a nonlocal dispersal SIR epidemic model with delay and nonlinear incidence[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2018, **38**(3): 496-513.(in Chinese))

[15] ZHANG S P, YANG Y R, ZHOU Y H. Traveling waves in a delayed SIR model with nonlocal dispersal and nonlinear incidence[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2018, **59**(1): 011513. DOI: 10.1063/1.5021761.

[16] CHEN Y Y, GUO J S, HAMEL F. Traveling waves for a lattice dynamical system arising in a diffusive endemic model[J]. *Nonlinearity*, 2016, **30**(6). DOI: 10.1088/1361-6544/aa6b0a.

[17] YANG F Y, LI W T. Traveling waves in a nonlocal dispersal SIR model with critical wave speed

[J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 2017, **458**(2): 1131-1146.

[18] WU C C. Existence of traveling waves with the critical speed for a discrete diffusive epidemic model[J]. *Journal of Differential Equations*, 2017, **262**(1): 272-282.

[19] ZHANG G B, LI W T, WANG Z C. Spreading speeds and traveling waves for nonlocal dispersal equations with degenerate monostable nonlinearity[J]. *Journal of Differential Equations*, 2012, **252**(9): 5096-5124.

[20] CAPASSO V, SERIO G. A generalization of the Kermack-McKendrick deterministic epidemic model[J]. *Mathematical Biosciences*, 1978, **42**(1/2): 43-61.

Existence of Critical Traveling Waves for Nonlocal Dispersal SIR Models With Delay and Nonlinear Incidence

ZHANG Qiu[1], CHEN Guangsheng[1,2]

(1. *School of Mathematics and Statistics*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *P.R.China*;

2. *College of Mathematics and Computer Science*, *Guangxi Science & Technology Normal University*, *Laibin*, *Guangxi* 546199, *P.R.China*)

Abstract: The existence of traveling wave solutions for nonlocal dispersal SIR epidemic models with delay was studied. Firstly, the boundedness of I was proved by contradiction. Then according to the boundedness of I, the existence of traveling waves with $c > c^*$ was established. Secondly, through further analysis of traveling waves with super-critical speeds, the existence of traveling waves with the critical speed was derived. Finally, the influence of basic reproduction number R_0 on the existence of $c > c^*$ was discussed.

Key words: traveling wave solution; critical wave speed; nonlocal dispersal; basic reproduction number

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (General Program) (11671315)

引用本文/Cite this paper:

张秋, 陈广生. 一类具有非线性发生率与时滞的非局部扩散 SIR 模型的临界波的存在性[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(7): 713-727.

ZHANG Qiu, CHEN Guangsheng. Existence of critical traveling waves for nonlocal dispersal SIR models with delay and nonlinear incidence[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(7): 713-727.