文章编号:1000-0887(2019)08-0910-07

光滑区域上二维无黏性无热传导 Boussinesq 方程组与三维轴对称不可压 Euler 方程组的指数增长全局光滑解*

孟德嘉， 邓大文

(湘潭大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105)

摘要： 研究二维无黏性无热传导 Boussinesq 方程组和三维轴对称不可压 Euler 方程组光滑解的增长情况,找各种区域使其上的方程组有快增长的解.对 Boussinesq 方程组,通过选取初始温度和速度的一个分量,可以把方程去耦为两部分.从关于涡量的部分求出涡量、速度场和使结论成立的区域,从关于温度的部分可见,温度的高阶导的增长仅依赖于速度场的一个分量.通过适当选取该分量,得到温度高阶导有指数增长的全局光滑解.对轴对称 Euler 方程组做类似的处理,适当选取速度场的径向分量,可把方程组去耦,最终得到一类光滑区域,在其上方程组有指数增长全局光滑解.该研究把 Chae、Constantin、Wu 对一个二维锥形区域上无黏性无热传导 Boussinesq 方程的结果,推广到一类光滑区域上, 并把他们的方法应用到三维轴对称不可压 Euler 方程组, 得到了类似的结果.

关 键 词： 二维 Boussinesq 方程； 无黏性； 无热传导； 轴对称 Euler 方程； 光滑解； 光滑区域

中图分类号： O175 **文献标志码：** A DOI：10.21656/1000-0887.390245

引 言

本文在 $\Omega \subset R^2$ 上考虑无黏性无热传导 Boussinesq 方程组：

$$\begin{cases} \omega_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\omega = \theta_{x_1}, \\ \theta_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega,\ t > 0, \\ \Delta\psi = \omega,\ \nabla^{\perp}\psi = \boldsymbol{u} = (-\psi_{x_2}, \psi_{x_1}), \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = (u^1(\boldsymbol{x},t), u^2(\boldsymbol{x},t))$ 是速度场, $\omega = u^2_{x_1} - u^1_{x_2}$ 是涡量, $\theta = \theta(\boldsymbol{x},t)$ 是温度场, ψ 是流函数,$\boldsymbol{n}$ 是 Ω 的单位外法向量.后文将用方程$(1)_i$ 表示方程组(1) 中第 i 行的方程, 其他方程类同.方程组(1)描述了在考虑温度的影响下流体的流动情况, 可用来模拟大气、洋流等现象[1-3].本文将证明在一类无界光滑区域上,方程组(1)有 θ 的任意阶导对时间都有指数增长的解.

* **收稿日期：** 2018-09-17；**修订日期：** 2019-05-30
作者简介： 孟德嘉(1993—),女,硕士(通讯作者. E-mail：Jerry_Mengdj@163.com)；
邓大文(1961—),男,教授,博士,硕士生导师.

另外,对轴对称不可压 Euler 方程组,证明类似的增长定理.熟知在柱坐标下,轴对称 Euler 方程组可写为[4]

$$\begin{cases} u_t^r + (u^r\partial_r + u^z\partial_z)u^r + \partial_r p = \dfrac{(u^\theta)^2}{r}, \\ u_t^\theta + (u^r\partial_r + u^z\partial_z)u^\theta = \dfrac{-u^\theta u^r}{r}, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega,\ t > 0, \\ u_t^z + (u^r\partial_r + u^z\partial_z)u^z + \partial_z p = 0, \\ \partial_r(ru^r) + \partial_z(ru^z) = 0, \\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{cases} \tag{2}$$

其中 (r,θ,z) 是柱坐标,各量不依赖于 θ,$\boldsymbol{u}(r,\theta,z) = u^r(r,z)\boldsymbol{e}_r + u^\theta(r,z)\boldsymbol{e}_\theta + u^z(r,z)\boldsymbol{e}_z$ 是速度场,$p = p(r,z)$ 是压力,$\boldsymbol{n}$ 是 Ω 的单位外法向量.令 $\omega = \partial_z u^r - \partial_r u^z$(即为涡量在 (r,θ,z) 坐标中的 θ 分量).把方程$(2)_1$ 和$(2)_3$"点积"$(\partial_z, -\partial_r)$(即求 $\partial_z(2)_1 - \partial_r(2)_3$)得到方程$(3)_1$,把方程$(2)_4$重写为方程$(3)_3$,方程$(2)_5$重写为方程$(3)_4$,得

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\omega}{r}\right)_t + (u^r\partial_r + u^z\partial_z)\left(\dfrac{\omega}{r}\right) = \dfrac{2}{r^2}u^\theta\partial_z u^\theta, \\ u_t^\theta + (u^r\partial_r + u^z\partial_z)u^\theta = \dfrac{-u^\theta u^r}{r}, \\ \psi_z = ru^r,\ \psi_r = -ru^z,\ \tilde{L}\psi = \dfrac{\omega}{r},\ \tilde{L} = \dfrac{1}{r}\partial_r\left(\dfrac{1}{r}\partial_r\right) + \dfrac{1}{r^2}\partial_{zz}, \\ \psi|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

本文将证明在一类无界光滑轴对称区域上,方程(3)有 u^θ 的任意阶导对时间都有指数增长的解.

二维无黏性无热传导 Boussinesq 方程组、三维 Boussinesq 方程组与三维不可压 Euler 方程组的全局正则性均是受关注的开问题[4-5],即还不知道局部正则解是不是一定可延拓为全局正则解.它们引发出很多研究(参看文献[6]及其中的文献).它们正则解的增长速度可视作这个问题的延伸.若局部正则解的某些量增长极快,在有限时间达到无穷,则其就不能延拓为全局正则解.

二维不可压 Euler 方程是二维无黏性无热传导 Boussinesq 方程组 $\theta \equiv 0$ 的特殊情况,也是三维不可压 Euler 方程的二维版本.已知它在光滑区域和 R^2 上有全局正则性[4,7-9].有关它的全局正则解增长的研究,因为已知 $\|\omega(\cdot,t)\|_{L^\infty}$ 恒常,所以研究都集中在 $\|\nabla\omega(\cdot,t)\|_{L^\infty}$,结果依赖于区域.在有界光滑区域中,Yudovich[10] 在 1963 年已证得涡量的梯度最多只有双指数幂增长,Kiselev 和 Sverak[11]在圆盘上构造了例子,证明了这是最佳的估计.Zlatos[12] 证明了在环面上($[-1,1]^2$上周期边值问题)$\|\nabla\omega(\cdot,t)\|_{L^\infty}$ 可以达到指数增长.在一个有尖点的区域,Kiselev 和 Zlatos[13]构造了一个 ω 在有限时间内变得不连续的局部光滑解,可理解为$\nabla\omega$ 增长极快,在有限时间内达到无穷.

若对 Boussinesq 方程用文献[11-13]中处理 Euler 方程的方法求解,将会遇到麻烦.在 Boussinesq 方程中,涡量一般不是被搬运,质点流动时它的涡量可以变动,所以没法保证涡量在任何时候都是正的,而且不能控制涡量为负的质点的位置,以致难以用 Biot-Savart 定律估计质点的速度,得到关于 $\nabla\omega$ 增长的结果.在 Boussinesq 方程中,对应于 Euler 方程涡量的量是涡量 ω 和温度梯度$\nabla\theta$.与二维 Euler 方程的 $\|\omega(\cdot,t)\|_{L^\infty}$ 不同,$\|\omega(\cdot,t)\|_{L^\infty}$ 和 $\|\nabla\theta(\cdot,t)\|_{L^\infty}$ 一般是依赖于 t 的,所以研究它们的增长是有意义的.对方程(1),Chae、Constantin、Wu[14] 在锥

形区域上构造速度场定常、θ_{x_2} 呈指数增长的全局光滑解，而且指出同样方法可以构造 θ_{x_2} 有双指数幂增长的解，但没有写出解的公式（据笔者理解，用同样方法得到的解不是光滑的）.本文改动了文献[14]中的方法，找到一类无界光滑区域，在其上构造 θ 对 x_2 的各阶偏导有指数增长的方程(1)的全局光滑解.

三维轴对称或一般不可压 Euler 方程组与二维不可压 Euler 方程也有基本的区别.在二维，涡量沿质点轨迹是保持不变的，但在三维，它可被拉伸，甚至变号，所以不能用处理二维情况的方法研究三维的方程.但熟知三维轴对称不可压 Euler 方程组跟二维无黏性无热传导 Boussinesq 方程组有相似的结构[4]，本文用 Chae、Constantin、Wu[14] 的方法，对它做类似的讨论，找到一类光滑无界区域，在其上构造一些 u^θ 对 r 的各阶偏导都有指数增长的全局光滑解.

本文在第 1 节讨论了二维 Boussinesq 方程，在第 2 节讨论了三维 Euler 方程.

1 令二维 Boussinesq 方程组有指数增长解的光滑区域

在本节中，$\omega = u^2_{x_1} - u^1_{x_2}$.

定理 1 令 $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(\xi)=c_1+c_2\xi+c_3\xi^{-1}$, $c_3>0$.令 $\Omega=\{(x_1,x_2)\mid x_2>0, x_1>f(x_2)\}$.则对任意正整数 n，方程(1)都有全局光滑解 (ω,θ)，使对任何 $(x_1,x_2)\in\Omega$，θ 对 x_2 的 $1,2,\cdots,n$ 阶偏导对 t 都有指数增长.详细地，有光滑解 (ω,θ,u^1,u^2)，其中 u^2，θ 都不依赖于 x_1，使对 $k=1,2,\cdots,n$，有

$$(\partial^k_{x_2})\theta(x_2,t)=\mathrm{e}^{kt}\theta_0^{(k)}(x_2\mathrm{e}^t),$$

其中 $\theta_0\in C^n((0,\infty);(0,\infty))$，且对 $1\leqslant k\leqslant n$，$\inf_{\xi\in(0,\infty)}\theta_0^{(k)}(\xi)>0$.特别地，若 $\theta_0(\xi)=\mathrm{e}^{\xi}$，则 (ω,θ) 是无穷光滑的，且当 $k=1,2,\cdots,n$ 时，$\partial^k_{x_2}\theta(\cdot)$ 对 t 都有指数增长.

证明 以下是证明大要.选初始温度 θ_0 不依赖于 x_1，再选 u^2 在任何时间都不依赖于 x_1，使“同层”的质点任何时候都同层，因为 θ 是被搬运的，所以对任何时间 t，$\theta(\cdot,t)$ 都不依赖于 x_1 ($\theta_{x_1}\equiv 0$).有两个后果.首先，方程 $(1)_1$、$(1)_3$、$(1)_4$ 封闭，可解出 ψ，u^1，ω.另外，方程 $(1)_2$ 退化为 $\partial_t\theta(x_2,t)-u^2(x_2,t)\partial_{x_2}\theta(x_2,t)=0$，适当选取 u^2 和 θ_0 就可使 $\partial^k_{x_2}\theta$ 有指数增长.以下是详细证明.

第一步　选

$$u^2(x_1,x_2)=-x_2,$$

求 u^1.从 $\boldsymbol{u}=\nabla^\perp\psi=(-\psi_{x_2},\psi_{x_1})$，存在 $\varphi(x_2)$ 使

$$\psi(x_1,x_2)=\int_0^{x_1}u^2(s,x_2)\,\mathrm{d}s+\varphi(x_2)=-x_1x_2+\varphi(x_2),\tag{4}$$

所以

$$u^1(x_1,x_2)=-\psi_{x_2}=x_1-\varphi'(x_2).\tag{5}$$

要决定 $\varphi(x_2)$，用边界条件 $(1)_4$，即 $\boldsymbol{u}$ 跟 $\partial\Omega$ 平行：

$$f'(x_2)=\frac{u^1(f(x_2),x_2)}{u^2(f(x_2),x_2)}=\frac{f(x_2)-\varphi'(x_2)}{-x_2},$$

得

$$\varphi'(x_2)=f(x_2)+x_2f'(x_2).\tag{6}$$

可取

$$\varphi(x_2)=\int_1^{x_2}(f(s)+sf'(s))\,\mathrm{d}s,\tag{7}$$

则

$$\omega(x_1,x_2)=u^2_{x_1}-u^1_{x_2}=2f'(x_2)+x_2f''(x_2),$$

故

$$\nabla\omega=(0,\ 3f''(x_2)+x_2f'''(x_2)),$$

所以

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla\omega=-x_2[3f''(x_2)+x_2f'''(x_2)].$$

令 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\omega=0$, 因为 $\omega_t=0$, 若要 ω 满足方程$(1)_1$, 则 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\omega=0$, 即 $0=3f''(x_2)+x_2f'''(x_2)$, 所以

$$f(x_2)=c_1+c_2x_2+c_3x_2^{-1}.$$

若取 $c_3>0$,则如定理 1 中定义的 Ω 是光滑区域.在 Ω 上,由式(5)、(6)和式(4)、(7)给出

$$u^1=x_1-f(x_2)-x_2f'(x_2),$$

$$\psi=-x_1x_2+\int_1^{x_2}(f(s)+sf'(s))\mathrm{d}s.$$

第二步 找出以 $\theta_0(\cdot)$ 为初值的解 θ 的公式.因为 $\theta_{x_1}=0$,所以方程$(1)_2$ 简化为 $\theta_t+u^2\theta_{x_2}=0$, 可得

$$\begin{cases}\partial_t\theta(x_2,t)-x_2\partial_{x_2}\theta(x_2,t)=0,\\ \theta(x_2,0)=\theta_0(x_2).\end{cases}\tag{8}$$

熟知方程(8)的解 θ 沿 x_2-t 平面中的质点轨迹的值不变,所以对$(\bar{x},\bar{t})\in(0,\infty)\times(0,\infty)$,要找解 θ 在该点的值,只需找经过该点的质点轨迹的出发点,这点处的初值就是 $\theta(\bar{x},\bar{t})$.

令 $\boldsymbol{X}(t;\bar{x},\bar{t})$ 为在 $\bar{t}$ 时经过 $\bar{x}$ 的轨迹,简记为 $\boldsymbol{X}(t)$.它满足

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{X}(t),\ \boldsymbol{X}(\bar{t})=\bar{x},$$

所以

$$\ln\frac{\boldsymbol{X}(t)}{\bar{x}}=\int_{\bar{t}}^{t}\frac{1}{\boldsymbol{X}(t)}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_{\bar{t}}^{t}-1\mathrm{d}t=\bar{t}-t,$$

即 $\boldsymbol{X}(t)=\bar{x}\mathrm{e}^{\bar{t}-t}$,其出发点为 $\boldsymbol{X}(0;\bar{x},\bar{t})=\bar{x}\mathrm{e}^{\bar{t}}$,所以 $\theta(\bar{x},\bar{t})=\theta_0(\bar{x}\mathrm{e}^{\bar{t}})$.将$(\bar{x},\bar{t})$ 写为(x_2,t),再对 x_2 求偏导,只要 $\theta_0\in C^n(0,\infty)$,则对 $1\leqslant k\leqslant n$, 有

$$(\partial^k_{x_2})\theta(x_2,t)=\mathrm{e}^{kt}\theta_0^{(k)}(x_2\mathrm{e}^t).$$

若 $\inf_{\xi\in(0,\infty)}\theta_0^{(k)}(\xi)>0$,则它们对 t 就有指数增长. □

2 令三维轴对称 Euler 方程组有指数增长解的光滑区域

在本节中, $\omega=u^r_z-u^z_r$.

定理 2 令 $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$, $f(r)=c_1+c_2r^2+c_3r^{-2}$,$c_3>0$.令 Ω 为轴对称区域$\{(r,\theta,z)\mid z>f(r)\}$.则对任意正整数 n,存在方程(2) 的全局光滑解(ω,u^θ),使对任意$(r,\theta,z)\in\boldsymbol{\Omega}$,$u^\theta$ 对 r 的 $1,2,\cdots,n$ 阶偏导都有指数增长.详细地,有光滑解$(\omega,u^r,u^\theta,u^z)$,其中 u^r,u^θ都不依赖于 z,使对 $k=1,2,\cdots,n$, 有

$$\partial^k_ru^\theta(r,t)=(u^\theta_0)^{(k)}(r\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{(k+1)t},$$

其中 $u^\theta_0\in C^n((0,\infty);(0,\infty))$,且对 $1\leqslant k\leqslant n$,$\inf_{\xi\in(0,\infty)}(u^\theta_0)^{(k)}(\xi)>0$.特别地,若 $u^\theta_0(\xi)=\mathrm{e}^\xi$,则$(\omega,u^\theta)$ 无穷光滑,且对 $k=1,2,\cdots,n$,有 $\partial^k_ru^\theta$ 呈指数增长.

证明 取 $u^r=-r$,则方程$(3)_2$ 变成 $u^\theta_t-ru^\theta_r+u^zu^\theta_z=u^\theta$.再取 u^θ 的初值 u^θ_0 不依赖于 z,可见方程$(3)_2$ 有唯一不依赖于 z 的解 $u^\theta(r,t)$.则 u^θ 在方程$(3)_1$ 中消失,从而方程$(3)_1$、$(3)_3$、

$(3)_4$ 封闭,可从中解出 ω, u^r, u^z,并确定使定理成立的光滑区域.再从方程$(3)_2$,可得 $\partial_r^k u^\theta$ 对 t 有指数增长.以下给出详细证明.

第一步 确定 ψ, u^z, ω 和 Ω.取 $u^r(r,t) = -r$,从方程$(3)_3$ 得 $\partial_z \psi = r u^r = -r^2$,故有

$$\psi(r,z) = -r^2 z + \varphi(r), \tag{9}$$

所以

$$u^z = -\frac{\partial_r \psi}{r} = -\frac{1}{r}[-2rz + \varphi'(r)] = 2z - \frac{\varphi'(r)}{r}. \tag{10}$$

利用边值条件$(3)_4$(即方程$(2)_5$),有

$$f'(r) = \frac{u^z(f(r),r)}{u^r(f(r),r)} = -\frac{1}{r}\left[2f(r) - \frac{\varphi'}{r}\right],$$

解得

$$\varphi'(r) = 2rf(r) + r^2 f'(r). \tag{11}$$

可取

$$\varphi(r) = \int_1^r [2sf(s) + s^2 f'(s)]\mathrm{d}s, \tag{12}$$

则

$$\omega = u_z^r - u_r^z = 3f'(r) + rf''(r),$$

故

$$\partial_r\left(\frac{\omega}{r}\right) = -\frac{3f'(r)}{r^2} + \frac{3f''(r)}{r} + f'''(r),\ \partial_z\left(\frac{\omega}{r}\right) = 0,$$

所以

$$u^r \partial_r\left(\frac{\omega}{r}\right) + u^z \partial_z\left(\frac{\omega}{r}\right) = \frac{3f'(r)}{r} - 3f''(r) - rf'''(r).$$

因为 $(\omega/r)_t = 0$, 所以要方程$(3)_1$成立,就要

$$\frac{3f'(r)}{r} - 3f''(r) - rf'''(r) = 0,$$

则

$$f(r) = c_1 + c_2 r^2 + c_3 r^{-2}.$$

若 $c_3 > 0$,则定理 2 中定义的 Ω 是避开 z 轴的光滑区域.再由式(10)、(11)和式(9)、(12)有

$$u^z = 2z - 2f(r) - rf'(r),$$

$$\psi = -r^2 z + \int_1^r [2sf(s) + s^2 f'(s)]\mathrm{d}s.$$

第二步 因为 $u^r = -r$ 和 u^θ 不依赖于 z, 故方程$(3)_2$退化为

$$u_t^\theta - r u_r^\theta = u^\theta. \tag{13}$$

令 $(\bar{r}, \bar{t})$ 为 r-t 区域$(0,\infty) \times (0,\infty)$ 中的任意点,通过该点的方程(13) 的特征线 $r(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} = -r(t),\ r(\bar{t}) = \bar{r},$$

即 $r(t) = \bar{r}\mathrm{e}^{\bar{t}-t}$,其出发点是 $r(0) = \bar{r}\mathrm{e}^{\bar{t}}$.沿此特征线,方程(13) 连同初值 $u^\theta(r,0) = u_0^\theta(r)$ 的问题变为

$$\frac{\mathrm{d}u^\theta(r(t),t)}{\mathrm{d}t} = u^\theta(r(t),t),\ u^\theta(r(0),0) = u_0^\theta(r(0)).$$

解之得 $u^\theta(r(t),t)=ce^t$,其中 $c=u^\theta(r(0),0)=u_0^\theta(r(0))=u_0^\theta(\bar{r}e^{\bar{t}})$,即 $u^\theta(r(t),t)=u_0^\theta(\bar{r}e^{\bar{t}})e^t$.
令 $t=\bar{t}$,得 $u^\theta(\bar{r},\bar{t})=u_0^\theta(\bar{r}e^{\bar{t}})e^{\bar{t}}$.所以

$$u^\theta(r,t)=u_0^\theta(re^t)e^t.$$

若 $u_0^\theta\in C^n((0,\infty);\mathbf{R})$,则对 $k=1,2,\cdots,n$,

$$\partial_r^k u^\theta(r,t)=(u_0^\theta)^{(k)}(re^t)e^{(k+1)t}.$$

若 $\inf_{\xi\in(0,\infty)}(u_0^\theta)^{(k)}(\xi)>0$,则 $\partial_r^k u^\theta(r,t)$ 对 t 有指数增长. □

3 结　　论

在文献[14]中,已证明在一个二维锥形区域中,存在温度梯度有指数增长的无黏性无热传导 Boussinesq 方程组的全局光滑解.本文做了两项工作:首先,改进了文献[14]中的方法,求得一类二维无界光滑区域使上述结论成立,且留意到温度的高阶导也有指数增长.另外,把方法应用到结构与二维无黏性无热传导 Boussinesq 方程组相似的三维轴对称不可压 Euler 方程组,求得一类光滑无界轴对称区域,其上的轴对称不可压 Euler 方程组存在速度的高阶导有指数增长的全局光滑解.这两个方程组的全局正则性是开问题,即还不知道局部光滑解是否一定可以延拓为全局光滑解.光滑解的增长情况可看作是该问题的延伸,若它们增长极快,以致在有限时间达到无穷,则局部光滑解就不能延拓为全局光滑解.所以构造对时间增长尽量快的光滑解是研究方程组(1)、(2)全局正则性的一种手段.

参考文献(References):

[1] TEMAM R, MIRANVILLE A. *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[2] MAJDA A. *Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean*[M]. Providence: American Mathemaical Society, 2003.

[3] PEDLOSKY J. *Geophysical Fluid Dynamics*[M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2013.

[4] MAJDA A J, BERTOZZI A L. *Vorticity and Incompressible Flow*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[5] YUDOVICH V I. Eleven great problems of mathematical hydrodynamic[J]. *Moscow Mathematical Journal*, 2003, **3**(2): 711-737.

[6] KISELEV A, TAN C. Finite time blow up in the hyperbolic Boussinesq system[J]. *Advances in Mathematics*, 2018, **325**: 34-55.

[7] BEALE J T, KATO T, MAJDA A. Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1984, **94**(1): 61-66.

[8] KATO T. On classical solutions of the two-dimensional nonstationary Euler equation[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1967, **25**(3): 188-200.

[9] MARCHIORO C, PULVIRENTI M. *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids*[M]. New York: Springer-Verlag, 1994.

[10] YUDOVICH V I. The flow of a perfect, incompressible liquid through a given region[J]. *Soviet Physics Doklady*, 1963, **7**: 789-791.

[11] KISELEV A, SVERAK V. Small scale creation for solutions of the incompressible two-dimensional Euler equation[J]. *Annals of Mathematics*, 2014, **180**(3): 1205-1220.

[12] ZLATOS A. Exponential growth of the vorticity gradient for the Euler equation on the torus[J]. *Advances in Mathematics*, 2015, **268**: 396-403.

[13] KISELEV A, ZLATOS A. Blow up for the 2D Euler equation on some bounded domains[J].

Journal of Differential Equations, 2015, **259**(7): 3490-3494.
[14] CHAE D, CONSTANTIN P, WU J. An incompressible 2D didactic model with singularity and explicit solutions of the 2D Boussinesq equations[J]. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 2014, **16**(3): 473-480.

Global Smooth Solutions With Exponential Growth to 2D Inviscid Boussinesq Equations Without Heat Conduction and 3D Axisymmetric Incompressible Euler Equations on Smooth Domains

MENG Dejia, DENG Dawen
(*School of Mathematics and Computational Science*, *Xiangtan University*, *Xiangtan*, *Hunan* 411105, *P.R.China*)

Abstract: The growth of smooth solutions to 2D inviscid Boussinesq equations without heat conduction and the 3D axisymmetric Euler equations was investigated, to find regions where these systems have fast growing solutions. Through appropriately choosing the initial temperature and the velocity component, the Boussinesq system was decoupled into 2 parts. From the part involving only the vorticity, the vorticity and velocity can be solved and the smooth regions determined. From the part involving the temperature, one can see that the growth of temperature derivatives depends only on the velocity component. Through choosing that component appropriately, solutions with temperature derivatives of exponential growth were constructed on certain unbound smooth regions. The same method was applied to the axisymmetric Euler equations. Through choosing the radial velocity component appropriately, the system can be decoupled and one can ultimately find a class of smooth domains, and on them smooth global solutions of exponential growth. This investigation extends the results of Chae, Constantin and Wu on the inviscid Boussinesq system without heat conduction on a 2D cone to a class of smooth domains. Their method was also applied to the 3D axisymmetric Euler equations to obtain a similar result.

Key words: 2D Boussinesq equation; inviscid; no heat conduction; axisymmetric Euler equation; smooth solution; smooth domain

引用本文/Cite this paper:
孟德嘉, 邓大文. 光滑区域上二维无黏性无热传导 Boussinesq 方程组与三维轴对称不可压 Euler 方程组的指数增长全局光滑解[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(8): 910-916.
MENG Dejia, DENG Dawen. Global smooth solutions with exponential growth to 2D inviscid Boussinesq equations without heat conduction and 3D axisymmetric incompressible Euler equations on smooth domains[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(8): 910-916.