

关于《保辛水波动力学》的一个注记*

吴 锋, 钟万勰

(大连理工大学 工程力学系, 辽宁 大连 116023)

(本刊编委钟万勰来稿)

摘要: 研究完全非线性水波的数值模拟方法,将《保辛水波动力学》中提出的保辛摄动方法,扩展到非线性水波压强的分析,数值算例表明,该文方法可用于水波的非线性演化分析,也可用于模拟孤立波、尖锐波峰的涌波等非线性水波,并给出水波的压强分布。

关键词: 水波; 动力学; 位移法; 压强; 辛

中图分类号: O352; O353.2

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.390254

引 言

水波问题是许多工程领域的共性问题,其分析通常在 Euler 表示下进行^[1],以流速为基本未知量,但往往忽视水波的动力学属性.水波问题也可以位移为基本未知量,通过分析力学的 Hamilton 变分原理来建立水波方程^[2-7],其特点是能够保辛.最近,文献[8]提出了基于位移表示的水波动力学理论,并给出了线性水波、浅水波的位移周期行波解.针对一般水深周期行波解,文献[8]提出了保辛摄动法,可以直接给出质点粒子的轨迹,模拟出水面尖锐的周期行波解.

文献[8]提出保辛水波动力学的基本理论,并基于流函数给出了计算质点粒子轨迹的保辛摄动法,而没有涉及到压强的计算.压强是工程师特别关心的物理量,是工程结构安全分析的重要基础.本文将在文献[8]的基础上,研究计算压强的保辛摄动方法.为方便论述,本文所采用的基本符号、变量等均与文献[8]相同,部分公式则直接采用文献[8]中的公式.

1 位移法水波方程

本文采用位移描述水波的运动,在水平方向和竖直方向的坐标分别记为 (x, z) , 时间记为 t , 水深设为常数,记为 h , 水底为 $z = -h$. 静止水面记为 $z = 0$, 变形后的水面记为 $z = w(x, 0, t) = \eta(x, t)$. 波幅记为 η_0 , 即为水面波 $\eta(x)$ 的最大值.另外将波高记为 A , 表示水波波峰与波谷之见的相对高度,即为 $\eta(x)$ 的最大值和最小值之差.波长记为 L .

以变量 $u(x, z, t)$ 为例,为表示方便, $u(x, z, t)$ 对某个自变量求偏导时,以下标表示.如

* 收稿日期: 2018-09-25

基金项目: 国家自然科学基金(11472076;51609034;51278298);中央高校基本科研业务费(DUT17RC(3)069)

作者简介: 吴锋(1985—),男,副教授(E-mail: vonwu@dlut.edu.cn);

钟万勰(1934—),男,教授,中科院院士(通讯作者. E-mail: zwoffice@dlut.edu.cn).

$u(x, z, t)$ 对 x 和 z 的偏导分别记为 u_x 和 u_z . 但 $u(x, z, t)$ 对时间 t 的偏导记为 \dot{u} . 其余变量的偏导采用相同标记方法.

根据文献[8], 二维无黏水波问题的动能和势能分别为

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) d\Omega \quad (1)$$

和

$$U = \int_{\Omega} \rho g w d\Omega, \quad (2)$$

其中 ρ 为水密度, $u(x, z, t)$ 和 $w(x, z, t)$ 分别为水平方向和竖向方向的位移, g 为重力加速度. 再考虑不可压缩条件, 有修正项:

$$R = \int_{\Omega} p (u_x + w_z + u_x w_z - u_z w_x) d\Omega, \quad (3)$$

其中 p 是压强, 也是 Lagrange 参数, 与约束条件为对偶变量. 再根据最小作用量原理, 推得水波动力学方程可以写为

$$\begin{cases} \rho \ddot{u} = -\beta_x + \beta_z w_x - \beta_x w_z, \\ \rho \ddot{w} = -\beta_z + \beta_x u_z - \beta_z u_x, \\ u_x + w_z + u_x w_z - u_z w_x = 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$p = -\rho g(z + w) + \beta. \quad (5)$$

即将压强 p 分解为重力压强 $-\rho g(z + w)$ 和波动产生的动压强 $\beta(x, z, t)$ 之和. 水面要求压强为零, 则

$$\beta(x, 0, t) = \rho g w(x, 0, t). \quad (6)$$

如果要分析周期行波解, 则令

$$u = u(\xi, z), \quad \xi = x - Ct, \quad w = w(\xi, z), \quad \beta = \beta(\xi, z), \quad (7)$$

于是有

$$\begin{cases} \rho C^2 u_{\xi\xi} = \beta_z w_{\xi} - \beta_{\xi} (1 + w_z), \\ \rho C^2 w_{\xi\xi} = \beta_{\xi} u_z - \beta_z (1 + u_{\xi}), \\ u_{\xi} + w_z + u_{\xi} w_z - u_z w_{\xi} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

及边界条件

$$\begin{cases} \beta(\xi, 0) = \rho g w(\xi, 0), \\ w(\xi, -h) = 0, \\ u(\xi, z) = u(\xi + L, z), \\ w(\xi, z) = w(\xi + L, z). \end{cases} \quad (9)$$

2 乘法迭代

假设水是连续的, 没有破碎, 位移和动压强也是小量, 则式(4)中

$$\begin{cases} f_1 = \beta_z w_x - \beta_x w_z, \\ f_2 = \beta_x u_z - \beta_z u_x, \\ f_3 = u_x w_z - u_z w_x, \end{cases} \quad (10)$$

显然是比 u , w , β 高一阶的小量. 如果水的晃动很小, 可以视为线性变形的话, 则式(4)可近

似为

$$\rho\ddot{u} = -\beta_x, \rho\ddot{w} = -\beta_z, u_x + w_z = 0. \quad (11)$$

以上是线性水波的控制方程,可以精确求解.如果考虑非线性,则可以线性解为零阶近似解,代入 $f_i(i=1,2,3)$,于是形成如下的迭代格式:

$$\begin{cases} \rho\ddot{u}^{(n+1)} = -\beta_x^{(n+1)} + f_1^{(n)}, \\ \rho\ddot{w}^{(n+1)} = -\beta_z^{(n+1)} + f_2^{(n)}, \\ u_x^{(n+1)} + w_z^{(n+1)} + f_3^{(n)} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$f_1^{(n)} = \beta_z^{(n)} w_x^{(n)} - \beta_x^{(n)} w_z^{(n)}, f_2^{(n)} = \beta_x^{(n)} u_z^{(n)} - \beta_z^{(n)} u_x^{(n)}, f_3^{(n)} = u_x^{(n)} w_z^{(n)} - u_z^{(n)} w_x^{(n)}. \quad (13)$$

其实式(12)也可以从最小作用量变分原理导出,对应的作用量为

$$S = \int_0^t \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \rho ([\dot{u}^{(n+1)}]^2 + [\dot{w}^{(n+1)}]^2) + (f_1^{(n)} u^{(n+1)} + f_2^{(n)} w^{(n+1)}) + \beta^{(n+1)} (u_x^{(n+1)} + w_z^{(n+1)} + f_3^{(n)}) \right] d\Omega dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \rho g [w^{(n+1)}(x, 0, t)]^2 dx d\tau. \quad (14)$$

这表明该迭代是保辛的乘法摄动.每步迭代计算中,都可以通过对式(14)进行离散,然后变分导出线性的微分-代数方程,并采用保辛的祖冲之类算法求解该方程.本文采用线性水波晃荡的振型作为空间离散的基函数,因此相当于在波数域进行离散.对于水底平坦问题的水波晃荡解可参考文献[7].

3 行波解

分析行波解也可采用乘法迭代方法,此时有

$$\begin{cases} \rho C^2 u_{\xi\xi}^{(n+1)} = -\beta_{\xi}^{(n+1)} + f_1^{(n)}, \\ \rho C^2 w_{\xi\xi}^{(n+1)} = -\beta_z^{(n+1)} + f_2^{(n)}, \\ u_{\xi}^{(n+1)} + w_z^{(n+1)} + f_3^{(n)} = 0, \\ \beta^{(n+1)}(\xi, 0) = \rho g w^{(n+1)}(\xi, 0), \\ w^{(n+1)}(\xi, -h) = 0, \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$\begin{cases} f_1^{(n)} = \beta_z^{(n)} w_{\xi}^{(n)} - \beta_{\xi}^{(n)} w_z^{(n)}, \\ f_2^{(n)} = \beta_{\xi}^{(n)} u_z^{(n)} - \beta_z^{(n)} u_{\xi}^{(n)}, \\ f_3^{(n)} = u_{\xi}^{(n)} w_z^{(n)} - u_z^{(n)} w_{\xi}^{(n)}. \end{cases} \quad (16)$$

式(15)对应于一种变分原理:

$$\begin{aligned} \Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho C^2 ([u_{\xi}^{(n+1)}]^2 + [w_{\xi}^{(n+1)}]^2) d\Omega + \int_{\Omega} \beta^{(n+1)} (u_{\xi}^{(n+1)} + w_z^{(n+1)} + f_3^{(n)}) d\Omega + \\ \int_{\Omega} (u^{(n+1)} f_1^{(n)} + w^{(n+1)} f_2^{(n)}) d\Omega - \int_0^L \frac{1}{2} \rho g [w^{(n+1)}(\xi, 0)]^2 d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

根据变分原理可以推出式(15).每步迭代计算中,都可以通过对式(15)进行离散,然后变分导出线性方程进行求解.本文采用线性水波的行波解作为空间离散的基函数,因此相当于在波数域进行离散,线性水波的行波解可参考文献[8].

4 算例分析

4.1 浅水波

考虑 $L = 50 \text{ m}$ 和 $h = 1 \text{ m}$ 的矩形水池, 水密度为 $\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$, 重力加速度为 $g = 10 \text{ m/s}^2$, 初始水面形状为

$$\bar{\eta}(\xi, 0) = A \left[\alpha \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\alpha L}{2} - \alpha \xi \right) - \frac{2}{L} \tanh \left(\frac{\alpha L}{2} \right) \right], \quad (18)$$

其中, $\xi = x + u(x, 0)$, α 和 A 为两个形状参数, 通过调节 α 和 A 可以改变初始水面形状. α 或者 A 越小, 初始水面越平坦. 该算例在文献[6]中采用浅水方程 SWE-DP 和祖冲之算法分析过, 这里用乘法迭代计算, 并与文献[6]中的结果进行比较, 以测算本文方法的可靠性. 计算时参数选择 $\alpha = 0.1$ 和 0.3 , $A = 0.8$. 用本文方法计算时, 空间场取 40 个水波晃荡的振型进行近似, 采用保辛迭代法分析, 时间步长取 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, 每次迭代时均采用 2 阶的保辛算法计算, 迭代时要求两次迭代之间的位移差小于 10^{-5} .

表 1 给出了 SWE-DP 与本文方法计算得到的表面 $x = 25 \text{ m}$ 处的竖向位移 $w(25, 0, t)$ 和水底 $x = 25 \text{ m}$ 处的压强 $p(25, -H, t)$ 在 $t = 1, 2, 5 \text{ s}$ 时的计算结果. 图 1 和图 2 给出了不同参数下, 水波在不同时间的形态, 以及相应的压强分布. 表 1 中, SWE-DP 的计算结果取自文献[6]. 本文是完全非线性模型, 而 SWE-DP 采用了浅水假定, 两种模型之间可能存在一定差异, 也必然导致在计算浅水波时的结果存在一定的微小差异. 由表 1 可见, 两种模型的计算结果差异很小: 比较两种模型计算的不同时间垂直方向的位移, 最大差异为 8%; 比较压强, 两者之间的最大差异为 0.3%. 两种模型的计算结果基本吻合, 显示了本文方法的正确性.

表 1 SWE-DP 与本文方法的计算结果对比

Table 1 Comparisons between results computed with the SWE-DP and the proposed method

method	α	$w(25, 0, t) / \text{m}$			$p(25, -H, t) / \text{Pa}$		
		$t = 1 \text{ s}$	$t = 2 \text{ s}$	$t = 5 \text{ s}$	$t = 1 \text{ s}$	$t = 2 \text{ s}$	$t = 5 \text{ s}$
SWE-DP	0.1	0.040 8	0.023 4	-0.018 6	10 401	10 233	9 817
	0.3	0.079 6	-0.013 3	-0.032 0	10 875	9 915	9 681
this paper method	0.1	0.040 2	0.022 9	-0.018 7	10 398	10 231	9 816
	0.3	0.077 6	-0.014 5	-0.033 6	10 840	9 898	9 665

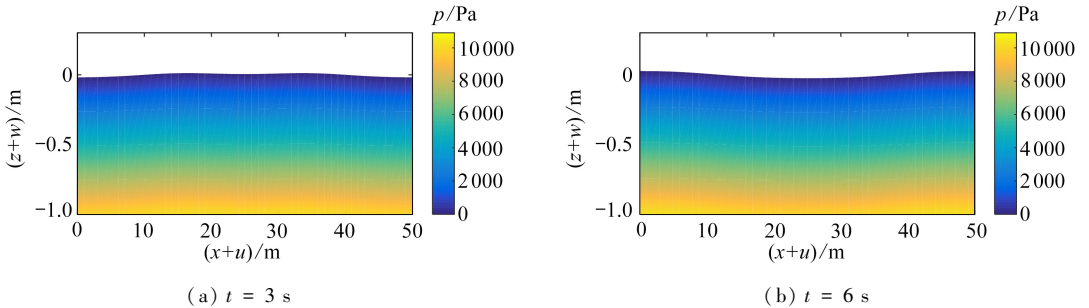


图 1 不同时刻压强分布, $\alpha = 0.1$

Fig. 1 The pressure distributions at different moments, $\alpha = 0.1$

4.2 行波

计算行波, 取 $h = 1 \text{ m}$. 以线性水波的行波解作为空间离散的基函数进行迭代计算, 初始迭代时波幅均取为 $\eta_0 = 0.1h$, 波长取 $L = 0.65, 1, 2, 10, 15, 20 \text{ m}$ 分别进行计算. 当波长由小变大,

对应的水波从深水波渐变为浅水波. 图 3 绘制了不同波长下行波的形态, 以及相对应的压强分布.

由图 3 可见, 本文方法可以统一地给出深水和浅水行波的位移、形态以及压强分布. $L = 0.65$ m 对应的行波很特别, 其水波表明存在尖锐的波峰, 这实际上是一种涌波 (swell wave). 随着波长的增加, 水波逐渐从涌波演变为孤立波. 当波长相对于水深较小时, 水波属于深水波, 如图 3(a) ~ 3(c); 当波长相对于水深较大时, 水波属于浅水波, 如图 3(d) ~ 3(f). 从压强分布可见: 对于深水波, 水表面的形态对水底压强分布的影响很小; 对于浅水波, 水表面的形态对水底压强的影响很大.

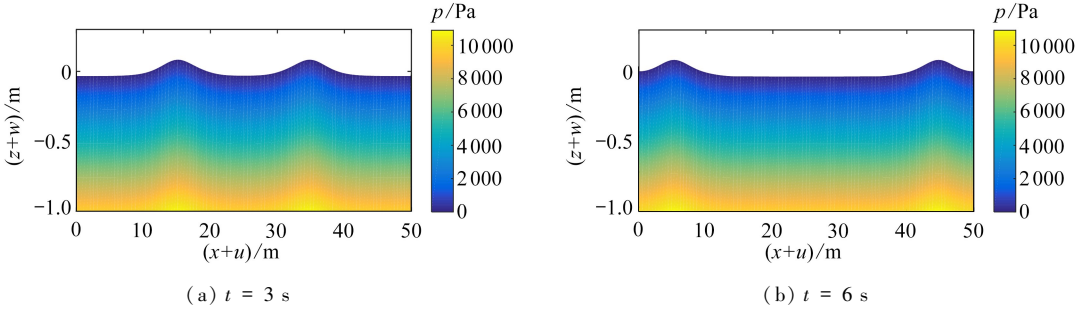
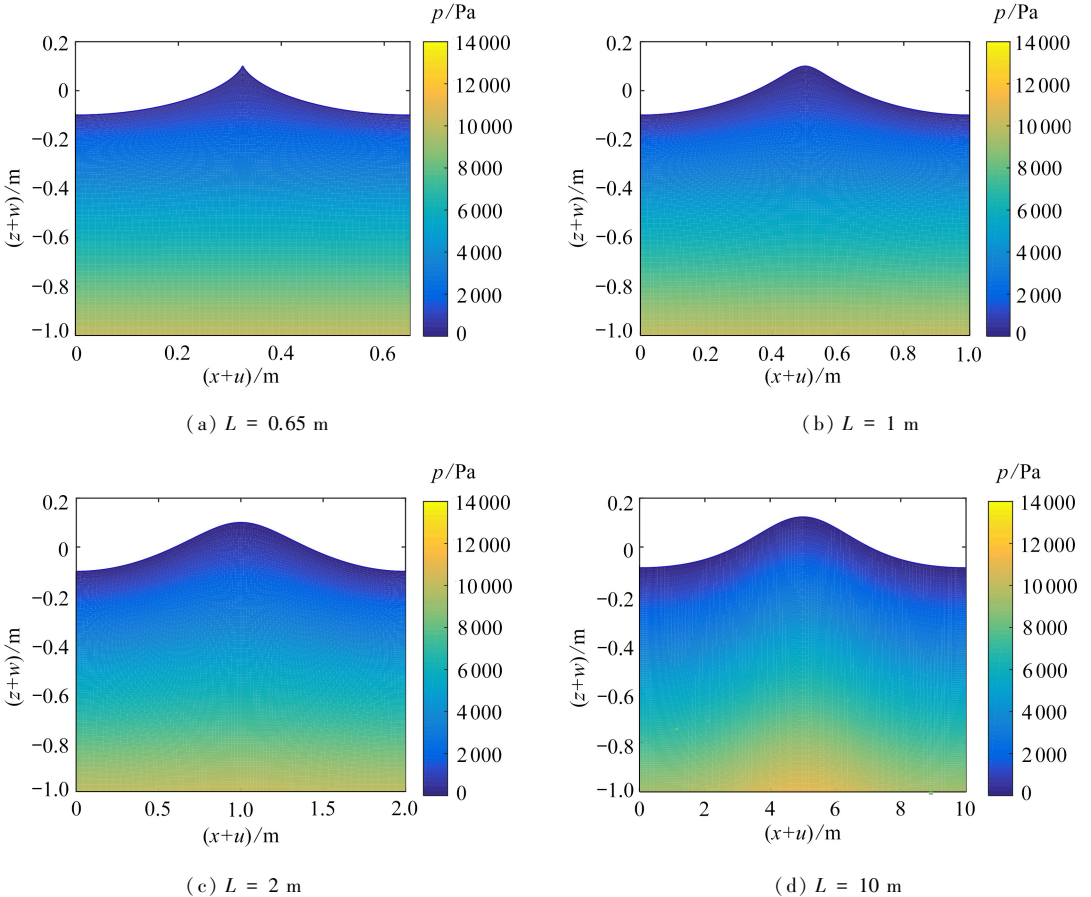


图 2 不同时刻压强分布, $\alpha = 0.3$

Fig. 2 The pressure distributions at different moments, $\alpha = 0.3$



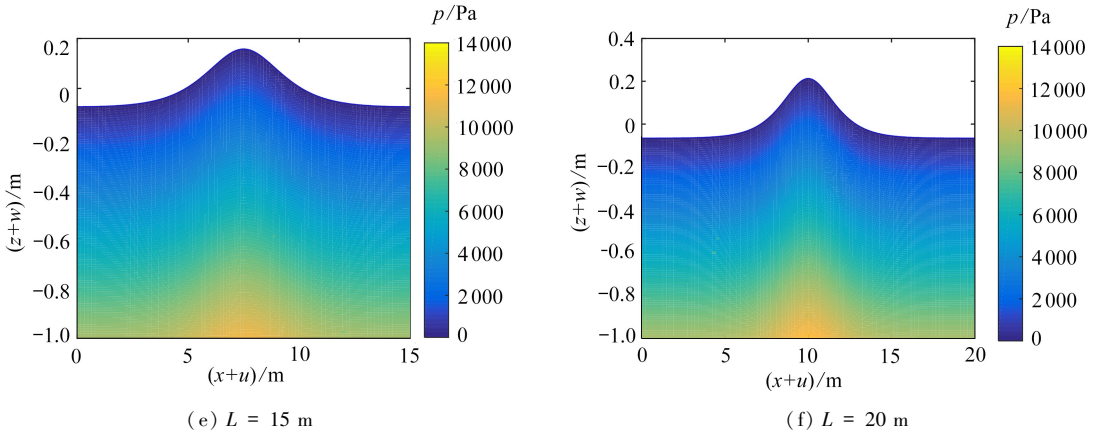


图 3 不同波长对应的波的形态及压强分布

Fig. 3 The wave shapes and pressure distributions for different wave lengths

5 结 论

对于工程中涉及到的水波问题,压强是需要特别关注的物理量.本文在《保辛水波动力学》一文的基础上,研究了同时考虑位移和压强的保辛摄动方法,该方法以线性水波解作为初迭代解,然后在每个迭代过程中均通过最小作用量变分原理进行离散,保证每个迭代过程均保辛,由此建立保辛的迭代格式.与《保辛水波动力学》中的不同之处在于,本文方法可以同时计算出位移和压强.具体的数值算例表明,本文方法适用于水波的非线性演化分析,也适用于孤立波、尖锐的涌波等自然界中出现的非线性波的模拟.

参考文献 (References):

- [1] 梅强中. 水波动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1984. (MEI Qiangzhong. *Water Wave Dynamics* [M]. Beijing: Science Press, 1984. (in Chinese))
- [2] 钟万颢, 姚征. 位移法浅水孤立波[J]. 大连理工大学学报, 2006, **46**(1): 151-156. (ZHONG Wanxie, YAO Zheng. Shallow water solitary waves based on displacement method[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2006, **46**(1): 151-156. (in Chinese))
- [3] 钟万颢. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006. (ZHONG Wanxie. *Symplectic Method in Applied Mechanics* [M]. Beijing: High Education Press, 2006. (in Chinese))
- [4] 钟万颢, 陈晓辉. 浅水波的位移法求解[J]. 水动力学研究与进展, 2006, **21**(4): 486-493. (ZHONG Wanxie, CHEN Xiaohui. Solving shallow water waves with the displacement method [J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2006, **21**(4): 486-493. (in Chinese))
- [5] 钟万颢, 吴锋. 力-功-能-辛-离散: 祖冲之方法论[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2016. (ZHONG Wanxie, WU Feng. *Force-Work-Energy-Symplecticity-Discretization: ZU Chongzhi's Methodology* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2016. (in Chinese))
- [6] 吴锋, 钟万颢. 浅水问题的约束 Hamilton 变分原理及祖冲之类保辛算法[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(1): 1-13. (WU Feng, ZHONG Wanxie. The constrained Hamilton variational principle for shallow water problems and the Zu-type symplectic algorithm[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(1): 1-13. (in Chinese))
- [7] 吴锋. 基于位移的水波数值模拟: 辛方法[M]. 大连: 大连理工大学, 2017. (WU Feng. *Numerical Modeling of Water Waves Based on Displacement: Symplectic Method* [M]. Dalian: Dalian

University of Technology Press, 2017.(in Chinese))

- [8] 钟万勰, 吴锋, 孙雁, 等. 保辛水波动力学[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(8): 855-874.
(ZHONG Wanxie, WU Feng, SUN Yan, et al. Symplectic water wave dynamics[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(8): 855-874.(in Chinese))

A Note on *Symplectic Water Wave Dynamics*

WU Feng, ZHONG Wanxie

(*Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,
Dalian, Liaoning 116023, P.R.China*)

(Contributed by ZHONG Wanxie, M. AMM Editorial Board)

Abstract: The numerical method for the simulations of fully nonlinear water waves was discussed. The symplectic perturbation method, developed in *Symplectic Water Wave Dynamics*, was extended to compute the pressure of the nonlinear water wave. Numerical examples show that the proposed method can be used to analyze the nonlinear evolutions of the nonlinear water waves, simulate the nonlinear water waves such as the solitary wave and the swell wave with sharp peaks, and find out the pressure distribution of the water wave.

Key words: water wave; dynamics; displacement method; pressure; symplectic

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (11472076; 51609034; 51278298)

引用本文/Cite this paper:

吴锋, 钟万勰. 关于《保辛水波动力学》的一个注记[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(1): 1-7.

WU Feng, ZHONG Wanxie. A note on *Symplectic Water Wave Dynamics*[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(1): 1-7.