

Euler-Bernoulli 梁的高阶二次摄动解 及收敛性讨论*

张大光

(江西理工大学 建筑与测绘工程学院,江西 赣州 341000)

摘要: 首次用解析的方式给出了 Euler-Bernoulli 梁后屈曲与非线性弯曲问题的高阶二次摄动解答.假定梁的中线不可伸长,用精确曲率公式与能量变分原理导出了非线性 Euler-Bernoulli 梁的模型.通过与精确解或高阶摄动解的比较,讨论了二次摄动解答的收敛性及适用域.得到主要结论如下:低阶摄动解适用于描述梁的初始后屈曲阶段及初始非线性弯曲阶段;更高阶次的摄动解适用于描述梁的深度后屈曲以及深度非线性弯曲.从这个意义上说,该文不仅仅指出某些文献上的部分结果不精确是由于摄动解答超出了其特定的适用域,并且还进一步发展完善了二次摄动法.

关键词: 二次摄动方法; 高阶摄动解; 后屈曲; 非线性弯曲

中图分类号: O347; O175

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.390272

引 言

摄动法又称小参数展开法.利用摄动法求解方程的渐进解通常要将物理方程和定解条件无量纲化.在无量纲方程中选择一个能反映物理特征的无量纲小参数作为摄动量,然后假设解可以按小参数展开成幂级数,将这一形式级数代入无量纲方程后,可得各级近似方程,依据这些方程可确定幂级数的系数,对级数进行截断,便得到原方程的渐进解.

摄动方法在非线性系统分析中有着广泛的应用^[1-9],然而与高阶摄动解相关的工作并不多见.宋涛和李家春^[10]给出了表面张力作用下深水波的高阶摄动解答,其中三角函数的降幂与积化和差公式由符号软件递归求得.在对圆薄板的非线性弯曲分析中,陈山林^[11]用推演分析的方法,求出了均布载荷与集中载荷作用的高阶钱伟长(钱氏)摄动解,并用权余法讨论了此种方法的渐近特性.然而,这种手工推算高阶摄动解,不仅阶数有限,而且其工作量很大,难以推广.叶开沅和周又和^[12]解决了这一问题,即在求得函数结构后,其系数的递推工作由计算机完成,文中给出了在中心集中载荷作用下的钱氏解的21阶摄动解,并得出如下结论:钱氏摄动解在圆板的中心挠度与厚度之比 $w_m/h < 1.63$ 时收敛,而在 $w_m/h > 2.18$ 时(出现中心下凹)其解发散.

在钱氏摄动法^[1]的基础上,沈惠申和张建武^[13]对单向压缩筒支矩形板后屈曲摄动分析,首次提出了二次摄动法,该方法被 Blázquez 和 Picón^[14]称为“沈-张方法”.该方法最有特色之

* 收稿日期: 2018-10-22; 修订日期: 2018-11-14

基金项目: 江西省教育厅科学技术研究项目(一般项目)(GJJ180458)

作者简介: 张大光(1981—),男,讲师,博士(E-mail: zhangdaguang2012@gmail.com).

处在于:第一,摄动参数 ε 可暂不赋予任何物理意义;第二,通过摄动参数转换,将该摄动参数用最大挠度代替.该方法可适用梁、板、壳结构非线性分析的各种问题.应用该方法 Shen(沈惠申)及其合作者^[15-22]用手工推算二次摄动解,成功地求解了各向同性和复合材料梁板壳结构在机械荷载、热荷载及其共同作用下的非线性弯曲、后屈曲和非线性振动问题.然而仅仅用手工推算二次摄动解,回答不了高阶摄动解的渐近性质、解答的解析结构以及各阶次摄动解的适用域等问题.

在飞机制造、造船工业、建筑结构、仪器设计等多个领域中,研究者们提出了大量关于梁板壳结构的大变形与稳定性问题,因而非线性弹性力学问题已经得到了各国力学家的关注.其中 Novozhilov(诺沃日洛夫)^[23]从几何的角度,将弹性力学问题分为四大类:第一类,大应变问题;第二类,小应变大转动问题,结果使物体大变形;第三类,小应变小转动,但应变的大小与转动的平方同量级,结果也使物体大变形,如 Von Kármán 板就是属于这一类;第四类,小应变小转动,而应变的大小与转动的大小同量级,这样就转化为线弹性力学的问题.在目前关于梁板壳的工作中,第三与第四类问题的研究工作很多,第一与第二类问题的研究工作相对较少,其数量少的主要原因之一是这两类问题求解难度高.

在本文中,假定梁的中线不可伸长,用精确曲率公式与能量变分原理导出了非线性 Euler-Bernoulli 梁的模型,并且首次借助符号计算软件成功地给出了高阶二次摄动解,用解析的方式给出了 Euler-Bernoulli 梁后屈曲与非线性弯曲问题的高阶二次摄动解答,并讨论了各阶摄动解的适用域.值得一提的是,本文的工作属于 Novozhilov^[23]所说的第二类问题.

1 基于精确曲率的非线性梁的建模

建立如图 1 所示的坐标系,对于两端简支的均匀梁,其长度为 L_x , 抗弯刚度为 EI ,沿 x 方向受水平压力 P , 横向方向受分布荷载 q_z , Δ_x 表示梁沿 x 方向的缩短量, w_0 表示梁的挠度,精确曲率具体表达式如下:

$$\frac{d\psi_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\arcsin \frac{dw_0}{dx} \right) = \frac{d^2 w_0}{dx^2} \left[1 - \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (1)$$

假定梁的中线不可伸长, Δ_x 对 x 求导的具体表达式如下:

$$\frac{d\Delta_x}{dx} = 1 - \left[1 - \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2)$$

本文公式推导过程与文献[20]略有所不同,平衡方程是由能量变分原理导出:

$$\delta \Pi = 0, \quad (3)$$

其中 $\Pi = U + V$, 虚应变能为

$$\begin{aligned} \delta U = & \delta \left\{ \int_0^{L_x} \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right]^{-1} dx \right\} = \\ & \int_0^{L_x} EI \left\{ \frac{d^2 w_0}{dx^2} \left[1 - \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right]^{-1} \delta \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right) + \right. \\ & \left. \frac{dw_0}{dx} \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right]^{-2} \delta \left(\frac{dw_0}{dx} \right) \right\} dx, \end{aligned} \quad (4a)$$

虚外力功为

$$\delta V = \delta \left\{ - \int_0^{L_x} q_z w_0 dx - P \int_0^{L_x} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2} \right] dx \right\} = - \int_0^{L_x} \left\{ q_z \delta(w_0) - P \frac{dw_0}{dx} \left[1 - \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right]^{-1/2} \delta \left(\frac{dw_0}{dx} \right) \right\} dx. \quad (4b)$$

通过变分运算与进一步整理,控制方程可以表达为

$$EI \left\{ \frac{d^4 w_0}{dx^4} \left[1 - \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right]^{-1} + 4 \frac{d^3 w_0}{dx^3} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{dw_0}{dx} \left[1 - \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right]^{-2} + \left(\frac{d^2 w_0}{dx^2} \right)^3 \left[1 + 3 \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right]^{-3} \right\} + P \frac{d^2 w_0}{dx^2} \left[1 - \left(\frac{dw_0}{dx} \right)^2 \right]^{-3/2} = q_z. \quad (5)$$

需注意到,方程(5)只适用于具有端部可移条件与中线不可伸长假定的梁。

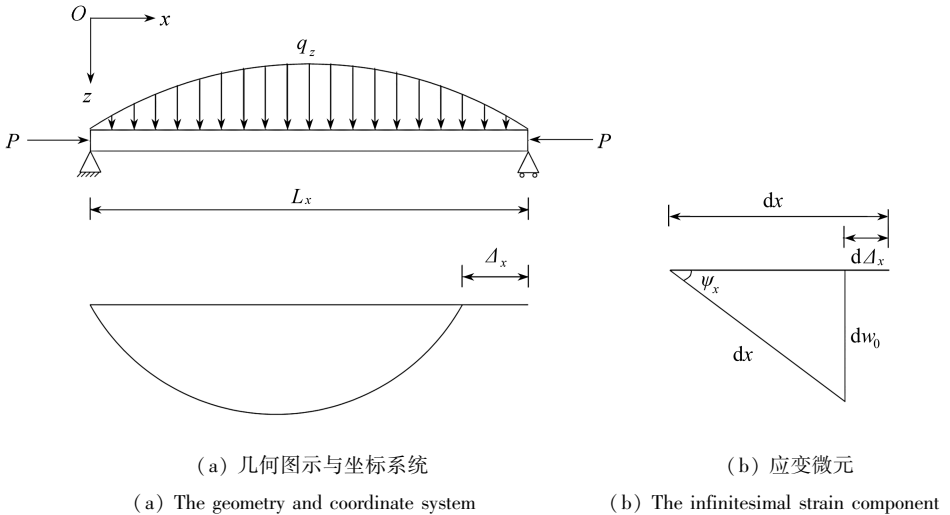


图 1 简支梁

Fig. 1 A uniform beam with simple supports

2 高阶二次摄动解

在本节中,将给出关于 Euler-Bernoulli 梁压缩后屈曲与非线性弯曲问题的高阶二次摄动解,并进一步讨论不同阶次摄动解的适用域及其渐近特性。

2.1 后屈曲

对于简支梁后屈曲问题的求解,首先引入如下无量纲参数:

$$X = \frac{\pi x}{L_x}, \quad W = \frac{w_0}{L_x}, \quad \lambda_p = \frac{L_x^2 P}{\pi^2 EI}. \quad (6)$$

在摄动解答的求解过程中,由于 W 的偶数项与 λ_p 的奇数项对解答没有贡献,所以在此假定 W 按奇数项展开, λ_p 按偶数项展开:

$$W = \sum_{i=1,3,5,\dots} \varepsilon^i W_i, \quad \lambda_p = \sum_{i=0,2,4,\dots} \varepsilon^i \lambda_i, \quad (7)$$

其中 ε 是小摄动参数. 将式(6)、(7)代入控制方程(5)中, 而后合并具有相同阶次的 ε 项, 即可得到一系列的摄动方程, 其解答可以通过逐阶求解各阶摄动方程得到. 值得指出的是, 以下的求解过程是借助符号计算软件(如 MATHEMATICA、MAPLE、REDUCE 等)一步步推导得到, 三角函数的积化和差运算以及合并同类项、摄动参数转换等等, 全部由计算机实现, 这与过去手工推算的工作(手工推算阶次有限, 而且工作量很大)有所不同, 所得到的第 1 阶方程 $O(\varepsilon)$ 表达如下:

$$\frac{d^4 W_1}{dX^4} + \lambda_0 \frac{d^2 W_1}{dX^2} = 0. \quad (8)$$

方程(8)与 Euler-Bernoulli 梁的线性屈曲方程形式相同, 假定可以满足简支边界条件 $W_1 = d^2 W_1/dX^2 = 0$ 的解答如下:

$$W_1 = A_{10}^{(1)} \sin X. \quad (9)$$

将方程(9)代入方程(8), 可以得到

$$\lambda_0 = 1. \quad (10)$$

第 3 阶方程 $O(\varepsilon^3)$ 表达如下:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 W_3}{dX^4} + \lambda_0 \frac{d^2 W_3}{dX^2} = & -\pi^2 \left(\frac{dW_1}{dX} \right)^2 \frac{d^4 W_1}{dX^4} - 4\pi^2 \frac{d^3 W_1}{dX^3} \frac{d^2 W_1}{dX^2} \frac{dW_1}{dX} - \\ & \pi^2 \left(\frac{d^2 W_1}{dX^2} \right)^3 - \lambda_2 \frac{d^2 W_1}{dX^2} - \lambda_0 \frac{3}{2} \pi^2 \left(\frac{dW_1}{dX} \right)^2 \frac{d^2 W_1}{dX^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

将式(9)代入方程(11)的右端, 可知 W_3 具有如下形式的解答:

$$W_3 = A_{30}^{(3)} \sin(3X). \quad (12)$$

将方程(12)代入方程(11), 可以得到

$$A_{30}^{(3)} = -\frac{1}{64} \pi^2 (A_{10}^{(1)})^3, \quad \lambda_2 = \frac{1}{8} \pi^2 (A_{10}^{(1)})^2. \quad (13)$$

出于简洁性的考虑, 更高阶次的方程与求解过程略去. 值得进一步说明的是, 当 $i \geq 3$ 时, W_i 具有如下形式的解析结构:

$$W_i = \sum_{k=3}^i A_{k0}^{(i)} \sin(kX). \quad (14)$$

以下将直接给出第 21 阶近似解答, W_m 与 λ_p 分别为

$$\begin{aligned} W_m = & A_{10}^{(1)} \varepsilon + \frac{1}{64} \pi^2 (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^3 + \frac{5}{1\ 024} \pi^4 (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^5 + \frac{543}{262\ 144} \pi^6 (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^7 + \\ & \frac{16\ 983}{16\ 777\ 216} \pi^8 (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^9 + \frac{576\ 585}{1\ 073\ 741\ 824} \pi^{10} (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^{11} + \\ & \frac{10\ 327\ 265}{34\ 359\ 738\ 368} \pi^{12} (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^{13} + \frac{384\ 217\ 197}{2\ 199\ 023\ 255\ 552} \pi^{14} (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^{15} + \\ & \frac{7\ 351\ 250\ 793}{70\ 368\ 744\ 177\ 664} \pi^{16} (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^{17} + \frac{574\ 978\ 439\ 133}{9\ 007\ 199\ 254\ 740\ 992} \pi^{18} (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^{19} + \\ & \frac{22\ 878\ 700\ 101\ 327}{576\ 460\ 752\ 303\ 423\ 488} \pi^{20} (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^{21} + O(\varepsilon^{22}), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_p = & 1 + \frac{1}{8} \pi^2 (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^2 + \frac{21}{512} \pi^4 (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^4 + \frac{581}{32 \ 768} \pi^6 (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^6 + \\
& \frac{18 \ 355}{2 \ 097 \ 152} \pi^8 (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^8 + \frac{156 \ 769}{33 \ 554 \ 432} \pi^{10} (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^{10} + \\
& \frac{22 \ 559 \ 431}{8 \ 589 \ 934 \ 592} \pi^{12} (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^{12} + \frac{841 \ 915 \ 651}{549 \ 755 \ 813 \ 888} \pi^{14} (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^{14} + \\
& \frac{32 \ 292 \ 973 \ 421}{35 \ 184 \ 372 \ 088 \ 832} \pi^{16} (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^{16} + \frac{1 \ 265 \ 242 \ 424 \ 171}{2 \ 251 \ 799 \ 813 \ 685 \ 248} \pi^{18} (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^{18} + \\
& \frac{25 \ 210 \ 015 \ 941 \ 449}{72 \ 057 \ 594 \ 037 \ 927 \ 936} \pi^{20} (A_{10}^{(1)} \varepsilon)^{20} + O(\varepsilon^{22}), \tag{16}
\end{aligned}$$

式中 $A_{10}^{(1)} \varepsilon$ 是与无量纲最大挠度 W_m 相关的二次摄动参数,由式(15)可得

$$\begin{aligned}
A_{10}^{(1)} \varepsilon = & W_m - \frac{1}{64} \pi^2 W_m^3 - \frac{17}{4 \ 096} \pi^4 W_m^5 - \frac{395}{262 \ 144} \pi^6 W_m^7 - \frac{5 \ 299}{8 \ 388 \ 608} \pi^8 W_m^9 - \\
& \frac{38 \ 627}{134 \ 217 \ 728} \pi^{10} W_m^{11} - \frac{1 \ 189 \ 133}{8 \ 589 \ 934 \ 592} \pi^{12} W_m^{13} - \frac{152 \ 139 \ 943}{2 \ 199 \ 023 \ 255 \ 552} \pi^{14} W_m^{15} - \\
& \frac{10 \ 013 \ 016 \ 777}{281 \ 474 \ 976 \ 710 \ 656} \pi^{16} W_m^{17} - \frac{168 \ 404 \ 549 \ 437}{9 \ 007 \ 199 \ 254 \ 740 \ 992} \pi^{18} W_m^{19} - \\
& \frac{11 \ 528 \ 728 \ 466 \ 637}{1 \ 152 \ 921 \ 504 \ 606 \ 846 \ 976} \pi^{20} W_m^{21} + O(W_m^{22}). \tag{17}
\end{aligned}$$

将式(17)代入式(16),则后屈曲路径可以表达为

$$\begin{aligned}
\lambda_p = & 1 + \frac{1}{8} \pi^2 W_m^2 + \frac{19}{512} \pi^4 W_m^4 + \frac{29}{2 \ 048} \pi^6 W_m^6 + \frac{12 \ 811}{2 \ 097 \ 152} \pi^8 W_m^8 + \\
& \frac{23 \ 787}{8 \ 388 \ 608} \pi^{10} W_m^{10} + \frac{1 \ 484 \ 013}{1 \ 073 \ 741 \ 824} \pi^{12} W_m^{12} + \frac{1 \ 497 \ 969}{2 \ 147 \ 483 \ 648} \pi^{14} W_m^{14} + \\
& \frac{12 \ 715 \ 437 \ 211}{35 \ 184 \ 372 \ 088 \ 832} \pi^{16} W_m^{16} + \frac{26 \ 894 \ 100 \ 023}{140 \ 737 \ 488 \ 355 \ 328} \pi^{18} W_m^{18} + \\
& \frac{1 \ 850 \ 236 \ 617 \ 359}{18 \ 014 \ 398 \ 509 \ 481 \ 984} \pi^{20} W_m^{20} + O(W_m^{22}). \tag{18a}
\end{aligned}$$

若将上式用浮点形式表达,则可以得到如下表达式:

$$\begin{aligned}
\lambda_p = & 1 + 1.234 W_m^2 + 3.615 W_m^4 + 13.61 W_m^6 + 57.96 W_m^8 + 265.6 W_m^{10} + \\
& 1.277 \times 10^3 W_m^{12} + 6.363 \times 10^3 W_m^{14} + 3.254 \times 10^4 W_m^{16} + \\
& 1.698 \times 10^5 W_m^{18} + 9.008 \times 10^5 W_m^{20} + O(W_m^{22}). \tag{18b}
\end{aligned}$$

通过计算给出的简支梁在水平轴向压力作用下的后屈曲荷载-挠度曲线,各阶摄动解与文献[24]用椭圆积分所求得精确解答相比较,详见图2.其中 $P_{cr} = \pi^2 EI/L_x^2$ 是 Euler 屈曲荷载,无量纲最大挠度为 w_{\max}/L_x .关于各阶摄动解的适用域,可以通过直接观察,初步得到结论如下:2阶摄动解在 $w_{\max}/L_x < 0.15$ 时适用;4阶摄动解在 $w_{\max}/L_x < 0.25$ 时适用;当 $0.25 < w_{\max}/L_x < 0.4$ 时,需要更高阶次的摄动解.需要补充说明一下,对于水平轴向压力继续增加,而中心挠度反而减小的情况,高阶二次摄动解答或许失效,这种情况在本文中并不深入讨论,读者若是对此感兴趣,请查看文献[24]中的第一章与第三章,当 $P/P_{cr} = 1.75$ 时, $w_{\max}/L_x = 0.403$ 是其转折点.

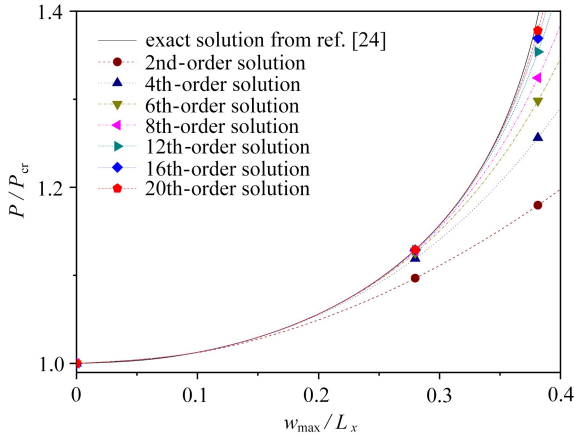


图 2 简支梁后屈曲不同阶次摄动解的结果比较

Fig. 2 Comparison of different order perturbation solutions for post-buckling of simply supported beams

2.2 非线性弯曲

对于梁的非线性弯曲问题，假定荷载为正弦荷载，即 $q_z = q_0 \sin(\pi x/L_x)$ ，引入如下无量纲参数：

$$X = \frac{\pi x}{L_x}, W = \frac{w_0}{L_x}, \lambda_q = \frac{L_x^3 q_0}{\pi^4 EI}, \tag{19}$$

并且假定

$$W = \sum_{i=1,3,5,\dots} \varepsilon^i W_i, \lambda_q = \sum_{i=1,3,5,\dots} \varepsilon^i \lambda_i. \tag{20}$$

将方程(19)、(20)代入方程(5)，而后合并具有相同阶次的 ε 项，得到的第一阶方程 $O(\varepsilon)$ 表达如下：

$$\frac{d^4 W_1}{dX^4} = \lambda_1 \sin X. \tag{21}$$

选取可以满足简支边界条件 $W_1 = d^2 W_1/dX^2 = 0$ 的解答如下：

$$W_1 = A_{10}^{(1)} \sin X. \tag{22}$$

将方程(22)代入方程(21)，可以得到

$$\lambda_1 = A_{10}^{(1)}. \tag{23}$$

第 3 阶方程 $O(\varepsilon^3)$ 表达如下：

$$\frac{d^4 W_3}{dX^4} = \lambda_3 \sin X - \pi^2 \left(\frac{dW_1}{dX} \right)^2 \frac{d^4 W_1}{dX^4} - 4\pi^2 \frac{d^3 W_1}{dX^3} \frac{d^2 W_1}{dX^2} \frac{dW_1}{dX} - \pi^2 \left(\frac{d^2 W_1}{dX^2} \right)^3. \tag{24}$$

同样地， W_3 具有如下形式：

$$W_3 = A_{30}^{(3)} \sin(3X). \tag{25}$$

将方程(25)代入方程(24)，可以得到 $A_{30}^{(3)}$ 与 λ_3 ，分别为

$$A_{30}^{(3)} = -\frac{1}{54} \pi^2 (A_{10}^{(1)})^3, \lambda_3 = \frac{1}{2} \pi^2 (A_{10}^{(1)})^3. \tag{26}$$

同样出于简洁性的考虑，更高阶次的方程与求解过程略去。以下将直接给出第 21 阶近似

解答,中心挠度与荷载的关系:

$$\lambda_q = W_m + 4.752W_m^3 + 25.18W_m^5 + 137.7W_m^7 + 759.7W_m^9 + 4.195 \times 10^3W_m^{11} + 2.307 \times 10^4W_m^{13} + 1.260 \times 10^5W_m^{15} + 6.829 \times 10^5W_m^{17} + 3.664 \times 10^6W_m^{19} + 1.944 \times 10^7W_m^{21} + O(W_m^{22}). \quad (27)$$

本文通过计算,给出了简支梁在正弦荷载作用下的荷载-挠度曲线,各阶摄动解答详见图3.关于各阶摄动解的适用域,通过直接观察,可以初步得到结论如下:1阶摄动解在 $w_{\max}/L_x < 0.1$ 时适用;3阶摄动解在 $w_{\max}/L_x < 0.2$ 时适用;当 $0.2 < w_{\max}/L_x < 0.4$ 时,需要更高阶次的摄动解.

需要指出的是,在中心荷载作用下圆板的钱氏高阶摄动解^[12]的系数是有正有负的,而在式(18)与(27)中,Euler-Bernoulli 梁后屈曲与非线性弯曲问题的高阶二次摄动解答各阶次的系数都为正值.在本文中所用的几何方程是精确曲率表达式(1),适用于描述大转动问题,属于Novozhilov^[23]所说的第二类问题,而文献[12]中所用的是 Von Kármán 意义下的几何非线性,属于Novozhilov^[23]所说的第三类问题.从图2与图3中,可以直接观察出各阶摄动解的适用域.因此,需要进一步指出的是,文献[20-22]中的部分结果不精确是由于摄动解答超出了其特定的适用域.

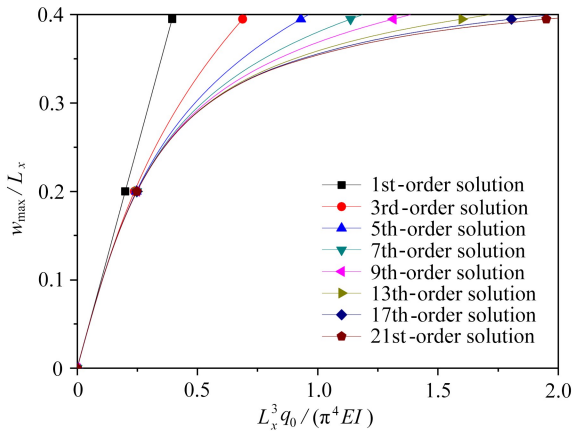


图3 简支梁非线性弯曲不同阶次摄动解的结果比较

Fig. 3 Comparison of different order perturbation solutions for nonlinear bending of simply supported beams

3 结 论

本文首次用解析的方式给出了 Euler-Bernoulli 梁后屈曲与非线性弯曲问题的高阶二次摄动解答.通过与精确解或高阶摄动解的比较,讨论了二次摄动解的收敛性及适用域.得到主要结论如下:

- 1) 低阶摄动解适于描述梁的初始后屈曲阶段及初始非线性弯曲阶段,更高阶次的摄动解适于描述梁的深度后屈曲以及深度非线性弯曲;
- 2) 两端简支的 Euler-Bernoulli 梁在端部压力作用下的后屈曲与在正弦荷载作用下的非线性弯曲问题,其高阶二次摄动解答各阶次的系数都为正值;
- 3) 文献[20-22]中的部分结果不精确是由于摄动解答超出了其特定的适用域.

致谢 本文作者衷心感谢江西理工大学博士科研启动基金(jxxjbs18022)对本文的资助。

参考文献(References):

- [1] CHIEN W Z. Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure[J]. *Acta Physica Sinica*, 1947, 7(2): 102-107.
- [2] HE J H. Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems[J]. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2005, 6(2): 207-208.
- [3] WEIGEND F, AHLRICHS R. Balanced basis sets of split valence, triple zeta valence and quadruple zeta valence quality for H to Rn: design and assessment of accuracy[J]. *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2005, 7(18): 3297-3305.
- [4] JOHNSON S G, IBANESCU M, SKOROBOGATIY M A, et al. Perturbation theory for Maxwell's equations with shifting material boundaries[J]. *Physical Review E*, 2002, 65(6): 066611.
- [5] VILLEGAS-MARTINEZ B M, SOTO-EGUIBAR F, MOYA-CESSA H M. Application of perturbation theory to a master equation[J]. *Advances in Mathematical Physics*, 2016(1): 9265039.
- [6] SOKOLOV A Y, CHAN G K-L. A time-dependent formulation of multi-reference perturbation theory[J]. *Journal of Chemical Physics*, 2016, 144: 064102.
- [7] 莫嘉琪, 林万涛, 杜增吉. 具双参数非线性高阶椭圆型方程的奇摄动解[J]. *系统科学与数学*, 2013, 33(2): 217-221. (MO Jiaqi, LIN Wantao, DU Zengji. A singularly perturbed solution for nonlinear higher order elliptic equations with two parameters[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2013, 33(2): 217-221. (in Chinese))
- [8] 包立平, 洪文珍. 一维弱噪声随机 Burgers 方程的奇摄动解[J]. *应用数学和力学*, 2018, 39(1): 113-122. (BAO Liping, HONG Wenzhen. Singular perturbation solutions to 1D stochastic Burgers equations under weak noises[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, 39(1): 113-122. (in Chinese))
- [9] 长龙, 刘全生, 菅永军, 等. 具有正弦粗糙度的环形微管道中脉冲流动[J]. *应用数学和力学*, 2016, 37(10): 1118-1128. (CHANG Long, LIU Quansheng, JIAN Yongjun, et al. Oscillating flow in annular microchannels with sinusoidally corrugated walls[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(10): 1118-1128. (in Chinese))
- [10] 宋涛, 李家春. 表面张力作用下深水波的高阶摄动解[J]. *力学学报*, 1989, 21(2): 145-153. (SONG Tao, LI Jiachun. Perturbation solution of high order for deep gravity-capillary water wave[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1989, 21(2): 145-153. (in Chinese))
- [11] 陈山林. 圆板大挠度的钱伟长解及其渐近特性[J]. *应用数学和力学*, 1982, 3(4): 513-518. (CHEN Shanlin. Chien's solution and its asymptotic behavior in large deflection of circular plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1982, 3(4): 513-518. (in Chinese))
- [12] 叶开沅, 周又和. 关于钱氏摄动法的高阶解的计算机求解和收敛性的研究[J]. *应用数学和力学*, 1986, 7(4): 285-293. (YEH Kaiyuan, ZHOU Youhe. On solving high-order solutions of Chien's perturbation method to study convergence by computer[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1986, 7(4): 285-293. (in Chinese))
- [13] 沈惠申, 张建功. 单向压缩筒支矩形板后屈曲摄动分析[J]. *应用数学和力学*, 1988, 9(8): 741-752. (SHEN Huishen, ZHANG Jianwu. Perturbation analyses for the postbuckling of simply

- supported rectangular plates under uniaxial compression[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1988, **9**(8): 741-752.(in Chinese)
- [14] BLÁZQUEZ A, PICÓN R. Analytical and numerical models of postbuckling of orthotropic symmetric plates[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2010, **136**(10): 1299-1308.
- [15] SHEN H S. Postbuckling analysis of stiffened laminated cylindrical shells under combined external liquid pressure and axial compression[J]. *Engineering Structures*, 1998, **20**(8): 738-751.
- [16] SHEN H S. Nonlinear bending of Reissner-Mindlin plates with free edges under transverse and in-plane loads and resting on elastic foundations[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1999, **41**(7): 845-864.
- [17] SHEN H S. Large deflection of composite laminated plates under transverse and in-plane loads and resting on elastic foundations[J]. *Composite Structures*, 1999, **45**(2): 115-123.
- [18] SHEN H S. Thermal postbuckling behavior of imperfect shear deformable laminated plates with temperature-dependent properties[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, **190**: 5377-5390.
- [19] YANG J, SHEN H S. Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, **255**(3): 579-602.
- [20] SHEN H S. A novel technique for nonlinear analysis of beams on two-parameter elastic foundations[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2011, **11**(6): 999-1014.
- [21] SHEN H S. Nonlinear analysis of lipid tubules by nonlocal beam model[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2011, **276**(1): 50-56.
- [22] SHEN H S, ZHANG C L. Nonlocal beam model for nonlinear analysis of carbon nanotubes on elastomeric substrates[J]. *Computational Materials Science*, 2011, **50**(3): 1022-1029.
- [23] 诺沃日洛夫 B B. 非线性弹性力学基础[M]. 朱兆祥, 译. 北京: 科学出版社, 1958.(NOVOZHILOV B B. *Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity*[M]. ZHU Zhaoxiang, transl. Beijing: Science Press, 1958.(Chinese version))
- [24] 武际可, 苏先越. 弹性系统的稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 1994: 107-108.(WU Jike, SU Xianyue. *Stability of Elastic Systems*[M]. Beijing: Science Press, 1994: 107-108.(in Chinese))

High-Order Analytical Solutions and Convergence Discussions of the 2-Step Perturbation Method for Euler-Bernoulli Beams

ZHANG Daguang

(School of Architectural and Surveying & Mapping Engineering,
Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou, Jiangxi 341000, P.R.China)

Abstract: High-order analytical solutions of the 2-step perturbation method were first obtained for post-buckling and nonlinear bending of Euler-Bernoulli beams. The nonlinear model with centerline inextensibility was derived with the exact curvature expression according to the energy variational principle. Based on the comparison with the exact solutions or high-order perturbation solutions, the asymptotic property and the suitable range of 2-step perturbation solutions were also discussed. The results show that, the lower-order perturbation solutions are suitable for the initial post-buckling stage and the initial nonlinear bending stage, and the higher-order perturbation solutions are necessary for the late post-buckling stage and the highly nonlinear bending stage. Therefore, the reason why some previous perturbation solutions are inaccurate lies in the offside beyond suitable ranges, and the 2-step perturbation method is developed and improved herein.

Key words: 2-step perturbation method; high-order analytical solution; post-buckling; nonlinear bending

引用本文/Cite this paper:

张大光. Euler-Bernoulli 梁的高阶二次摄动解及收敛性讨论[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(6): 620-629.

ZHANG Daguang. High-order analytical solutions and convergence discussions of the 2-step perturbation method for Euler-Bernoulli beams[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, 40(6): 620-629.