文章编号:1000-0887(2019)06-0694-07

非凸多目标优化模型的一类鲁棒逼近最优性条件*

赵　丹[1],　孙祥凯[2]

(1. 郑州升达经贸管理学院 应用数学研究所, 郑州 451191;
2. 重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067)

摘要: 通过引入一类非凸多目标不确定优化问题,借助鲁棒优化方法,先建立了该不确定多目标优化问题的鲁棒对应模型;再借助标量化方法和广义次微分性质,刻画了该不确定多目标优化问题的鲁棒拟逼近有效解的最优性条件,推广和改进了相关文献的结论.

关　键　词: 多目标优化问题; 拟有效解; 鲁棒最优性条件

中图分类号: O221.6; O224　　**文献标志码:** A　　DOI: 10.21656/1000-0887.390289

引　　言

设 X 和 Y 为 Banach 空间, $K \subseteq Y$ 为非空闭凸锥, C 为 X 中的非空集合.对于任意的 $i=1,2,\cdots,m$, $f_i:X \to \mathbf{R}$ 为 Lipschitz 连续函数, $g:X \to Y$ 为连续凸函数.考虑多目标优化问题模型:

$$(\mathrm{MP})\qquad \begin{cases}\min(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)),\\ \text{s.t.}\quad x \in C,\ g(x) \in -K.\end{cases}$$

本文记 $F_0 := \{x \in C : g(x) \in -K\}$ 为 MP 的可行集.

当前,MP 不仅广泛应用于经济分析、算法设计、金融工程以及通信网络等各种领域,而且也取得了许多十分有意义的理论成果[1-5].然而,在实际应用问题的多目标优化模型中,受客观的或人为的等多种不确定因素影响,这些不确定因素可能使得多目标优化模型的有效解变得高度不可行.因此在作决策时,必须要同时兼顾多个评价指标以及数据的不确定性.不确定多目标优化问题的研究应运而生.作为研究不确定多目标优化问题的重要工具,鲁棒优化方法[6]得到了众多学者的关注,并取得了一系列的理论及应用成果[7-10].另一方面,由于多目标优化问题本身的复杂性,要直接求其最优值或最优解并不总是可行的,通常需要借助数值方法求其近似值或逼近解.因此多目标优化问题的逼近解刻画十分必要[11-13].然而,目前只有文献[14]刻画了约束函数带有不确定信息的不确定凸多目标优化问题的鲁棒逼近最优性条件.基于此,本文考虑目标函数与约束函数均带有不确定信息的 MP 的不确定优化模型:

---

* 收稿日期: 2018-11-16; 修订日期: 2019-04-10
基金项目: 国家自然科学基金(11701057);重庆市自然科学基金重点项目(cstc2017jcyjBX0032);河南省教育厅人文社科项目(2019-ZZJH-202)
作者简介: 赵丹(1982—),女,讲师,硕士(E-mail: zd_1008@126.com);
孙祥凯(1984—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail: sxkcqu@163.com).

$$(\mathrm{UMP})\quad \begin{cases}\min(f_1(x,u_1),f_2(x,u_2),\cdots,f_m(x,u_m)),\\ \text{s.t.}\quad x\in C,\ g(x,v)\in -K.\end{cases}$$

对于任意的 $i=1,2,\cdots,m$，u_i 和 v 分别为序列紧拓扑空间 U_i 和 V 的不确定参数，$f_i:X\times U_i\to\mathbf{R}$ 与 $g:X\times V\to Y$ 为两个给定函数.

为刻画 UMP 的鲁棒逼近最优性条件，借助鲁棒优化方法，本文首先引入 UMP 的鲁棒对应模型：

$$(\mathrm{RUMP})\quad \begin{cases}\min\left(\max\limits_{u_1\in U_1}f_1(x,u_1),\max\limits_{u_2\in U_2}f_2(x,u_2),\cdots,\max\limits_{u_m\in U_m}f_m(x,u_m)\right),\\ \text{s.t.}\quad x\in C,\ g(x,v)\in -K,\quad \forall v\in V.\end{cases}$$

此处，RUMP 的可行集记为 $F:=\{x\in C:g(x,v)\in -K,\forall v\in V\}$.随后引入 RUMP 的一类新的拟逼近有效解概念，即 UMP 的鲁棒拟逼近有效解概念.最后，借助标量化方法和广义次微分性质，刻画了 UMP 的鲁棒拟逼近有效解的最优性条件，推广和改变了已有文献的结论.

1　预备知识

假设 X 与 Y 为 Banach 空间，X^* 与 Y^* 分别为 X 与 Y 的对偶空间，X^* 中的闭单位球记为 B^*.$C\subseteq X$ 为非空集合，$K\subseteq Y$ 为非空闭凸锥.K 的对偶锥为 $K^*=\{y^*\in Y^*\mid\langle y^*,y\rangle\geqslant 0,\forall y\in Y\}$.指示函数 $\delta_C:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 定义为

$$\delta_C(x):=\begin{cases}0, & x\in C,\\ +\infty, & x\notin C.\end{cases}$$

对任意的 $x^*\in X^*$ 与 $x\in X$，x^* 与 x 的内积为 $\langle x^*,x\rangle$.对于任意的 $\xi\in X^*$，ξ 的范数定义为

$$\|\xi\|:=\sup\{\langle\xi,d\rangle\mid d\in X,\ \|d\|\leqslant 1\}.$$

广义实值函数 $f:X\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 的有效域定义为 $\mathrm{dom}f=\{x\in R^n:f(x)<+\infty\}$.若 $\mathrm{dom}f\neq\varnothing$，则称 f 是真函数.若 $-f$ 为凸函数，则称 f 为凹函数.若对于任意的 $x\in X$，存在实数 $L>0$ 以及 x 的邻域 $N(x)$，使得对于任意的 $y,z\in N(x)$，

$$|f(y)-f(z)|\leqslant L\|y-z\|,$$

则称函数 f 是 Lipschitz 连续函数.Lipschitz 连续函数 f 在 $x\in X$ 关于方向 $d\in X$ 的单边方向导数以及 Clarke 广义方向导数分别定义为

$$f'(x;d):=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+td)-f(x)}{t},$$

$$f^{\mathrm{c}}(x;d):=\lim_{y\to x,t\to 0^+}\frac{f(y+td)-f(y)}{t}.$$

若 $f'(x;d)$ 存在，并且 $f'(x;d)=f^{\mathrm{c}}(x;d)$，则称 Lipschitz 连续函数 f 在 Clarke 意义下为拟可微函数或正则函数.Lipschitz 连续函数 f 在 $x\in X$ 处的 Clarke 次微分定义为

$$\partial^{\mathrm{c}}f(x):=\{\xi\in X^*\mid f^{\mathrm{c}}(x;d)\geqslant\langle\xi,d\rangle,\forall d\in X\}.$$

若函数 f 为凸函数，则 Clarke 次微分 $\partial^{\mathrm{c}}f(x)$ 退化为凸分析意义下的经典次微分定义，即

$$\partial f(\bar{x}):=\{x^*\in X^*:f(x)\geqslant f(\bar{x})+\langle x^*,x-\bar{x}\rangle,\forall x\in X\}.$$

关于 Lipschitz 连续函数的基本概念及结论，详情可参见文献[15].

类似地，考虑函数 $g:X\to Y$.若对于任意的 $x,y\in X$ 与 $\alpha\in[0,1]$，

$$g(\alpha x+(1-\alpha)y)-\alpha g(x)-(1-\alpha)g(y)\in -K,$$

则称 g 为 K-凸函数.若 $-g$ 为 K-凸函数，则称 g 为 K-凹函数.对于任意的 $\lambda\in K^*$，称 λg 为 λ

与函数 g 的复合函数.

本节最后给出 ε- 半凸函数的基本定义与结论.

定义 1[12] 设 $\Omega \subseteq X$ 以及 $\varepsilon \geqslant 0$.若 f 在 $x \in \Omega$ 处是正则的 Lipschitz 连续函数,并且满足

$$d \in X,\ x + d \in \Omega,\ f^{c}(x;d) + \sqrt{\varepsilon}\,\| d \| \geqslant 0 \Rightarrow f(x + d) + \sqrt{\varepsilon}\,\| d \| \geqslant f(x),$$

则称函数 f 在 $x \in \Omega$ 处是 ε- 半凸函数.若对于任意的 $x \in \Omega$, 函数 f 均为 ε- 半凸函数,则称函数 f 在 Ω 上是 ε- 半凸函数.

注 1 若 $\varepsilon = 0$, 则定义 1 中的 ε- 半凸函数为文献[16]中的半凸函数概念.特别地,对于任意的 $\varepsilon \geqslant 0$, 若函数 f 为凸函数,则 f 为 ε- 半凸函数.

命题 1[13] 设 $\varepsilon \geqslant 0$ 以及函数 f 在 $x \in \Omega$ 处是 ε- 半凸函数.若存在 $\xi \in \partial^{c} f(x)$, 使得对于任意的 $d \in X$, 有 $\xi(d) + \sqrt{\varepsilon}\,\| d \| \geqslant 0$, 则

$$f(x + d) + \sqrt{\varepsilon}\,\| d \| \geqslant f(x).$$

2 鲁棒逼近最优性刻画

借助鲁棒优化、Clarke 广义次微分以及标量化方法,本节研究了 UMP 的鲁棒拟逼近有效解的最优性条件.由于 UMP 的其他鲁棒有效解,如强有效解、弱有效解以及真有效解的研究可类似处理,所以不再一一赘述.

下面首先引入 UMP 的鲁棒拟逼近有效解.为方便起见,记

$$\varepsilon := (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m) \in R^m_+,\ \theta := \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i.$$

定义 2 设 $\varepsilon \in R^m_+$ 和 $\bar{x} \in F$.若不存在 $x \in F$, 使得对于任意的 $i = 1, 2, \cdots, m$, 有

$$\max_{u_i \in U_i} f_i(x, u_i) + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\theta}} \| x - \bar{x} \| \leqslant \max_{u_i \in U_i} f_i(\bar{x}, u_i),$$

以及存在 $j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 使得

$$\max_{u_j \in U_j} f_j(x, u_j) + \frac{\varepsilon_j}{\sqrt{\theta}} \| x - \bar{x} \| < \max_{u_j \in U_j} f_j(\bar{x}, u_j),$$

则称 $\bar{x} \in F$ 为 UMP 的鲁棒拟 ε- 有效解.

注 2 (i) 若不确定集合 U 和 V 均为单点集,则 UMP 的鲁棒拟 ε- 有效解退化为 MP 的拟 ε- 有效解概念[11,13].类似地,若 $\varepsilon = 0$, 则 UMP 的鲁棒拟 ε- 有效解概念退化为 UMP 的鲁棒有效解概念[7].

(ii) 若 $m = 1$, 则 UMP 退化为不确定标量优化问题:

$$(\mathrm{UP})\quad \begin{cases} \min f_1(x, u_1), \\ \text{s.t.}\quad x \in C,\ g(x, v) \in -K. \end{cases}$$

相应地,若对于任意的 $x \in F$, 有

$$\max_{u_1 \in U_1} f_1(x, u_1) + \sqrt{\varepsilon_1}\,\| x - \bar{x} \| \geqslant \max_{u_1 \in U_1} f_1(\bar{x}, u_1),$$

则称 $\bar{x} \in F$ 为 UP 的鲁棒拟 ε- 最优解.

下述命题阐述了 UMP 的鲁棒拟 ε- 有效解的标量化刻画.

命题 2 设 $\varepsilon \in R^m_+$ 和 $\bar{x} \in F$.考虑标量优化问题:

$$(\mathrm{SP})\quad \min \left\{ \sum_{i=1}^{m} \max_{u_i \in U_i} f_i(x, u_i)\ \middle|\ x \in F \right\}.$$

若 $\bar{x}\in F$ 为 SP 的鲁棒拟 θ- 最优解,则 $\bar{x}\in F$ 为 UMP 的鲁棒拟 ε- 有效解.

证明　借助文献[11]命题 3.2 的证明方法,可得 $\bar{x}\in F$ 为 UMP 的鲁棒拟 ε- 有效解.证毕.

借助 Clarke 广义次微分以及命题 2,建立 UMP 的鲁棒拟 ε- 有效解的最优性条件.

定理 1　设 $\varepsilon\geqslant 0$ 以及 $\bar{x}\in F$.对于任意的 $i=1,2,\cdots,m$, $f_i:X\times U_i\to\mathbf{R}$ 为 Lipschitz 连续函数.$g:X\times V\to Y$ 为连续函数,并且对于任意的 $v\in V$,$g(\cdot,v)$ 为 K- 凸函数.假设存在 $\bar{u}_i\in U_i$, $i=1,2,\cdots,m$,$\bar{v}\in V$ 以及 $\bar{\lambda}\in K^*$, 使得

$$\begin{cases}0\in\sum_{i=1}^{m}\partial^c f_i(\cdot,\bar{u}_i)(\bar{x})+\partial((\lambda g)(\cdot,v))(\bar{x})+\partial\delta_C(\bar{x})+\sqrt{\theta}B^*,\\(\bar{\lambda}g)(\bar{x},\bar{v})=0,\end{cases}\tag{1}$$

以及

$$f_i(\bar{x},\bar{u}_i)=\max_{u_i\in U_i}f(\bar{x},u_i),\qquad i=1,2,\cdots,m.\tag{2}$$

若 $\sum_{i=1}^{m}f_i(\cdot,\bar{u}_i)$ 在 $\bar{x}$ 处是 θ- 半凸的,则 $\bar{x}\in F$ 为 UMP 的鲁棒拟 ε- 有效解.

证明　假设存在 $\bar{u}_i\in U_i,i=1,2,\cdots,m,\bar{v}\in V$ 以及 $\bar{\lambda}\in K^*$, 使得式(1)与(2)成立.因此由式(1)可知,存在 $\xi_i\in\partial^c f_i(\cdot,\bar{u}_i)(\bar{x}),i=1,2,\cdots,m,\eta\in\partial((\bar{\lambda}g)(\cdot,\bar{v}))(\bar{x}),\gamma\in\partial\delta_C(\bar{x})$, 以及 $\zeta\in B^*$, 使得

$$\sum_{i=1}^{m}\xi_i+\eta+\gamma+\sqrt{\theta}\zeta=0.\tag{3}$$

对于任意的 $x\in F$, 由 $\eta\in\partial((\bar{\lambda}g)(\cdot,\bar{v}))(\bar{x})$ 与 $\gamma\in\partial\delta_C(\bar{x})$ 可得

$$(\bar{\lambda}g)(x,\bar{v})-(\bar{\lambda}g)(\bar{x},\bar{v})\geqslant\langle\eta,x-\bar{x}\rangle,\tag{4}$$

$$\delta_C(x)-\delta_C(\bar{x})\geqslant\langle\gamma,x-\bar{x}\rangle.\tag{5}$$

从而由式(4)和(5)可知,对于任意的 $x\in F$,

$$(\bar{\lambda}g)(x,\bar{v})-(\bar{\lambda}g)(\bar{x},\bar{v})\geqslant\langle\eta+\gamma,x-\bar{x}\rangle.\tag{6}$$

进一步地,由 $(\bar{\lambda}g)(x,\bar{v})\leqslant 0,(\bar{\lambda}g)(\bar{x},\bar{v})=0$, 以及式(6)可得

$$\langle\eta+\gamma,x-\bar{x}\rangle\leqslant 0,\qquad\forall x\in F.\tag{7}$$

于是,由式(3)和(7)可得

$$\left\langle\sum_{i=1}^{m}\xi_i+\sqrt{\theta}\zeta,x-\bar{x}\right\rangle\geqslant 0,\qquad\forall x\in F,$$

故

$$\left\langle\sum_{i=1}^{m}\xi_i,x-\bar{x}\right\rangle+\sqrt{\theta}\,\|x-\bar{x}\|\geqslant 0,\qquad\forall x\in F.$$

又因为 $\sum_{i=1}^{m}f_i(\cdot,\bar{u}_i)$ 在 $\bar{x}$ 处是 θ- 半凸的,所以由命题 1 可知

$$\sum_{i=1}^{m}f_i(x,\bar{u}_i)+\sqrt{\theta}\,\|x-\bar{x}\|\geqslant\sum_{i=1}^{m}f_i(\bar{x},\bar{u}_i),\qquad\forall x\in F.$$

从而,由式(2)以及 $\max_{u_i\in U_i}f(x,u_i)\geqslant f_i(x,\bar{u}_i),i=1,2,\cdots,m$, 可知

$$\sum_{i=1}^{m}\max_{u_i\in U_i}f_i(x,u_i)+\sqrt{\theta}\,\|x-\bar{x}\|\geqslant\sum_{i=1}^{m}\max_{u_i\in U_i}f_i(\bar{x},u_i),\qquad\forall x\in F.$$

所以 $\bar{x}$ 为 SP 的鲁棒拟 θ- 最优解.由命题 2 可知, $\bar{x}\in F$ 为 UMP 的鲁棒拟 ε- 有效解.证毕.

若 $\varepsilon=0$，则易得 UMP 的鲁棒拟有效解的最优性条件.

推论 1 设 $\bar{x}\in F$.对于任意的 $i=1,2,\cdots,m$，$f_i:X\times U_i\to\mathbf{R}$ 为 Lipschitz 连续函数.$g:X\times V\to Y$ 为连续函数，并且对于任意的 $v\in V$，$g(\cdot,v)$ 为 K-凸函数.假设存在 $\bar{u}_i\in U_i,i=1,2,\cdots,m$，$\bar{v}\in V$ 以及 $\bar{\lambda}\in K^*$，使得

$$0\in\sum_{i=1}^{m}\partial^c f_i(\cdot,\bar{u}_i)(\bar{x})+\partial((\lambda g)(\cdot,v))(\bar{x})+\partial\delta_C(\bar{x}),\ (\bar{\lambda}g)(\bar{x},\bar{v})=0,$$

以及

$$f_i(\bar{x},\bar{u}_i)=\max_{u_i\in U_i}f(\bar{x},u_i),\qquad i=1,2,\cdots,m.$$

若 $\sum_{i=1}^{m}f_i(\cdot,\bar{u}_i)$ 在 $\bar{x}$ 处是半凸的，则 $\bar{x}\in F$ 为 UMP 的鲁棒拟有效解.

若 U 和 V 均为单点集，则可以得到下述结论.

推论 2 设 $\bar{x}\in F$.对于任意的 $i=1,2,\cdots,m$，$f_i:X\to\mathbf{R}$ 为 Lipschitz 连续函数.$g:X\to Y$ 为连续 K-凸函数.假设存在 $\bar{\lambda}\in K^*$，使得

$$0\in\sum_{i=1}^{m}\partial^c f_i(\bar{x})+\partial(\lambda g)(\bar{x})+\partial\delta_C(\bar{x})+\sqrt{\theta}B^*,\ (\bar{\lambda}g)(\bar{x})=0.$$

若 $\sum_{i=1}^{m}f_i$ 在 $\bar{x}$ 处是半凸的，则 $\bar{x}\in F_0$ 为 MP 的拟有效解.

定理 2 设 $\varepsilon\geqslant 0$ 以及 $\bar{x}\in F$.对于任意的 $i=1,2,\cdots,m$，$f_i:X\times U_i\to\mathbf{R}$ 为连续函数，并且对于任意的 $u_i\in U_i$，$f_i(\cdot,u_i)$ 为凸函数.假设 $g:X\times V\to Y$ 为连续函数，并且对于任意的 $v\in V$，$g(\cdot,v)$ 为 K-凸函数.若存在 $\bar{u}_i\in U_i,i=1,2,\cdots,m$，$\bar{v}\in V$ 以及 $\bar{\lambda}\in K^*$，使得

$$0\in\sum_{i=1}^{m}\partial f_i(\cdot,\bar{u}_i)(\bar{x})+\partial((\lambda g)(\cdot,v))(\bar{x})+\partial\delta_C(\bar{x})+\sqrt{\theta}B^*,\ (\bar{\lambda}g)(\bar{x},\bar{v})=0,$$

以及

$$f_i(\bar{x},\bar{u}_i)=\max_{u_i\in U_i}f(\bar{x},u_i),\qquad i=1,2,\cdots,m,$$

则 $\bar{x}\in F$ 为 UMP 的鲁棒拟 ε-有效解.

证明 对于任意的 $\varepsilon\geqslant 0$，由注 1 可知凸函数为正则的 ε-半凸函数.又因为有限个凸函数的和还是凸函数，所以由定理 1 可知 $\bar{x}\in F$ 为 UMP 的鲁棒拟 ε-有效解.证毕.

类似地，若 U 和 V 均为单点集，则可以得到下述结论.

推论 3 设 $\varepsilon\geqslant 0$ 以及 $\bar{x}\in F$.对于任意的 $i=1,2,\cdots,m$，$f_i:X\to\mathbf{R}$ 为连续凸函数.$g:X\to Y$ 为连续 K-凸函数.假设存在 $\bar{\lambda}\in K^*$，使得

$$0\in\sum_{i=1}^{m}\partial f_i(\bar{x})+\partial(\lambda g)(\bar{x})+\partial\delta_C(\bar{x})+\sqrt{\theta}B^*,\ (\bar{\lambda}g)(\bar{x})=0,$$

则 $\bar{x}\in F_0$ 为 MP 的拟 ε-有效解.

3 结 论

基于不确定多目标优化模型在经济、金融等各种领域的广泛应用背景，本文将鲁棒优化方法、Clarke 广义次微分以及标量化方法相结合，研究了一类带有不确定信息的非凸非光滑多目标优化模型的鲁棒拟逼近有效解的最优性条件.所得结论不仅推广和改进了相关文献结果，而且为解决现实实际问题提供了一定的理论基础.

另一方面，由于投资组合问题以及风险管理问题的数学模型中均会涉及到同时兼顾多个

指标以及数据的不确定性，因此如何将不确定多目标优化问题应用到相关实际领域，这将是笔者后续研究的课题.

参考文献（References）：

［1］ LUC D T. *Theory of Vector Optimization*［M］. Berlin：Springer-Verlag, 1989.

［2］ BOT R I, GRAD S M, WANKA G. *Duality in Vector Optimization*［M］. Berlin：Springer-Verlag, 2009.

［3］ 彭再云，李科科，张石生. *D*-η-*E*-半预不变凸映射与向量优化［J］. 应用数学和力学，2014，**35**（9）：1020-1032.（PENG Zaiyun, LI Keke, ZHANG Shisheng. *D*-η-*E*-semipreinvex vector mappings and vector optimization［J］. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**（9）：1020-1032.（in Chinese））

［4］ 赵勇，彭再云，张石生. 向量优化问题有效点集的稳定性［J］. 应用数学和力学，2013，**34**（6）：643-650.（ZHAO Yong, PENG Zaiyun, ZHANG Shisheng. Stability of the sets of effective points of vector valued optimization problems［J］. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, **34**（6）：643-650.（in Chinese））

［5］ 陈望，周志昂. 基于改进集的带约束集值向量均衡问题的最优性条件［J］. 应用数学和力学，2018，**39**（10）：1189-1197.（CHEN Wang, ZHOU Zhiang. Optimality conditions for set-valued vector equilibrium problems with constraints involving improvement sets［J］. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**（10）：1189-1197.（in Chinese））

［6］ BEN-TAL A, GHAOUI L E, NEMIROVSKI A. *Robust Optimization*［M］. Princeton：Princeton University Press, 2009.

［7］ LEE G M, LEE J H. On nonsmooth optimality theorems for robust multiobjective optimization problems［J］. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 2015, **16**（10）：2039-2052.

［8］ EHRGOTT M, IDE J, SCHÖBEL A. Minmax robustness for multi-objective optimization problems［J］. *European Journal of Operational Research*, 2014, **239**（1）：17-31.

［9］ SUN X K, PENG Z Y, GUO X L. Some characterizations of robust optimal solutions for uncertain convex optimization problems［J］. *Optimization Letters*, 2016, **10**（7）：1463-1478.

［10］ FAKHAR M, MAHYARINIA M R, ZAFARANI J. On nonsmooth robust multiobjective optimization under generalized convexity with applications to portfolio optimization［J］. *European Journal of Operational Research*, 2018, **265**（1）：39-48.

［11］ LORIDAN P. ε-solutions in vector minimization problems［J］. *Journal of Optimization Theory and Application*, 1984, **43**（2）：265-276.

［12］ SON T Q, STRODIOT J J, NGUYEN V H. ε-optimality and ε-Lagrangian duality for a nonconvex programming problem with an infinite number of constraints［J］. *Journal of Optimization Theory and Application*, 2009, **141**（2）：389-409.

［13］ SON T Q, KIM D S. ε-mixed type duality for nonconvex multiobjective programs with an infinite number of constraints［J］. *Journal of Global Optimization*, 2013, **57**（2）：447-465.

［14］ SUN X K, LI X B, LONG X J, et al. On robust approximate optimal solutions for uncertain convex optimization and applications to multi-objective optimization［J］. *Pacific Journal of Optimization*, 2017, **13**（4）：621-643.

［15］ CLARKE F H. *Optimization and Nonsmooth Analysis*［M］. New York：John Wiley & Sons, 1983.

［16］ MIFFLIN R. Semismooth and semiconvex functions in constrained optimization［J］. *SIAM*

Journal on Control and Optimization, 1977, **15**(6): 959-972.

Some Robust Approximate Optimality Conditions for Nonconvex Multi-Objective Optimization Problems

ZHAO Dan[1], SUN Xiangkai[2]

(1. *Institute of Applied Mathematics*, *Zhengzhou Shengda University of Economics*, *Business & Management*, *Zhengzhou* 451191, *P.R.China*;
2. *College of Mathematics and Statistics*, *Chongqing Technology and Business University*, *Chongqing* 400067, *P.R.China*)

Abstract: A class of nonconvex multi-objective optimization problems were introduced with data uncertainty. Then, with the robust optimization approach, the robust counterpart model for the uncertain multi-objective optimization problem was built. Moreover, with the scalarization method and the generalized subdifferential properties, the optimality conditions were characterized for robust quasi approximate efficient solutions to the uncertain multi-objective optimization problem. The work generalizes and improves some results in the recent literatures.

Key words: multi-objective optimization problem; quasi efficient solution; robust optimality condition

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11701057)

引用本文/Cite this paper:

赵丹, 孙祥凯. 非凸多目标优化模型的一类鲁棒逼近最优性条件[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(6): 694-700.

ZHAO Dan, SUN Xiangkai. Some robust approximate optimality conditions for nonconvex multi-objective optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(6): 694-700.