

趋旋性微生物在幂律流体饱和水平多孔层中的热-生物对流稳定性分析*

戴德宣, 王少伟

(山东大学 土建与水利学院, 济南 250061)

摘要: 基于趋旋性微生物和幂律流体模型,研究了在含有非 Newton 流体饱和和多孔介质中生物对流的线性稳定性问题.利用 Galerkin 数值方法求解了该系统的控制方程,得到生物 Rayleigh 数的数值解,讨论了非 Newton 流体的幂律指数对生物对流稳定性在假塑性流体和膨胀性流体间的变化规律.研究表明,随着幂律流体的速度增大,幂律指数对生物对流稳定性的影响会发生变化,并且这种变化会受到热 Rayleigh 数和生物 Lewis 数的影响.另外,微生物趋旋性特征越明显,生物对流系统就越不稳定,而适当增大非 Newton 流体的幂律指数则有利于系统的稳定性.

关键词: 生物对流; 幂律流体; 趋旋性; 多孔介质; Galerkin 方法

中图分类号: O357.3; O373 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.390298

引 言

微生物形体微小、结构简单,却是自然中非常重要的一类物种.它在生物化工、农业发展、能源环保等领域都发挥着非常重大的作用,例如用于药物制备、污水处理、生产生物燃料和肥料等.早在 20 世纪早期, Wager^[1]等科学家就已经观测到生物对流现象.与自然对流相似,生物对流指在重力条件下由微生物运动引起的对流现象.微生物富集过程会受其趋光或者趋氧等生物学因素影响,微生物会自主运动向液体上层聚集.由于微生物的密度通常比流体的密度大,当聚集体的浓度变得足够大时,就会因重力原因形成生物对流.趋旋性^[2]是微生物运动过程中的常见特性之一,其发生机理是某些微生物在结构上都是重心位于底部,导致其在流体中游动时同时受重力矩和黏力矩而产生回旋.

在过去十多年中,生物对流这一实验现象越来越受到理论研究工作者的重视.Kuznetsov 等^[3]对多孔介质中趋旋性微生物的对流稳定性进行了研究,验证了多孔介质对生物对流的阻碍作用,并确定了使生物对流能够产生的临界渗透率.Nield 等^[4]采用线性稳定性分析方法研究了趋旋性微生物悬浮液中热-生物对流的震荡不稳定性.Zhao 等^[5]研究了非震荡热-生物对流稳定性,并分析了热 Rayleigh 数、Lewis 数和细胞偏心率对生物对流稳定性的影响.

近些年来,幂律流体作为一类工程中应用广泛的非 Newton 流体,得到了越来越多学者的

* 收稿日期: 2018-11-21; 修订日期: 2018-12-17

基金项目: 国家自然科学基金(11672164)

作者简介: 戴德宣(1994—),男,硕士生(E-mail: 775113242@qq.com);

王少伟(1980—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: shaoweiwang@sdu.edu.cn).

关注^[6-10]。其中 Barletta 等^[7]研究了幂律流体垂直渗流的热对流稳定性,得到了在不同流速下的幂律对流稳定性规律。实际上,在微生物实验中,因为添加培养液的缘故,容易整体呈现出典型的非 Newton 流体特征。鉴于此,本文的目的是研究趋旋性微生物在幂律流体饱和水平多孔层中的热-生物对流稳定性。利用线性稳定性分析以及 Galerkin 数值方法,得到了不同情况下的生物 Rayleigh 数,分析生物对流系统的稳定性条件以及各物理参数,如热 Rayleigh 数、幂律指数、对流 Péclet 数、生物 Péclet 数、生物 Lewis 数等对生物对流系统稳定性的影响。此研究结果可以为非 Newton 流体中的生物对流实验提供理论支持。

1 力学模型

1.1 控制方程

考虑一个厚度为 H , 水平放置的饱和和多孔层,如图 1 所示。其中充满了幂律流体以及均匀分布的趋旋性单细胞微生物。采用直角坐标系来表示流体的状态, z 轴的方向与重力方向相反。为研究方便,该多孔层在上下边界处是等温和半渗透的。顶部和底部温度分别为 T_0 和 $T_0 + \Delta T$, 其中 ΔT 是正值,代表底部温度高于顶部温度。流体可以透过上下边界,微生物则无法通过。层间的微生物平均数量密度为 \bar{N} 。

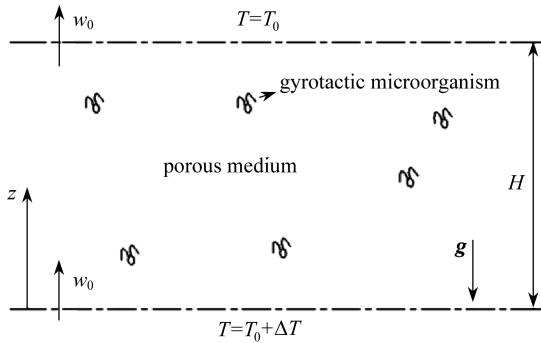


图 1 对流模型示意图

Fig. 1 Schematic of the convection model

内部的幂律流体遵循的剪切公式^[11]为

$$\tau = \mu(\dot{u})^n, \quad (1)$$

其中 τ 是剪应力, μ 是动力黏度, \dot{u} 是剪切速率即流速梯度, n 是幂律指数 ($n > 0$)。当 $n = 1$ 时是 Newton 流体,其剪应力和剪切速率是线性关系;当 $n < 1$ 时是假塑性流体,也称剪切变稀流体,它的表观黏度随着剪切速率增大而降低;反之当 $n > 1$ 时,代表的是膨胀性流体,也称剪切变稠流体。

根据 Kuznetsov 等^[3]和 Barletta 等^[7]的研究,结合幂律流体的剪切特性和微生物的随机游动模型,忽略多孔介质黏性耗散,采用 Boussinesq 近似^[12],得到以下控制方程:

连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

其中 \mathbf{u} 是流体渗流速度,它有 3 个分量 u, v, w 。

动量方程

$$C_a \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\mu_e}{K} |\mathbf{u}|^{n-1} \mathbf{u} - \nabla P - \rho_0 g \beta_T (T - T_0) + Nu \Delta \rho g, \quad (3)$$

这里的 C_a 是加速度系数, ρ_0 是流体密度, μ_e 是幂律流体等效动力黏度, K 是多孔介质渗透率, P 是压强, \mathbf{g} 是重力加速度, β_T 是流体热膨胀系数, T 是温度, T_0 是参考温度, N 是微生物数量密度, v 是微生物的平均体积, $\Delta\rho$ 是微生物和流体的密度差.

能量方程

$$\gamma \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T, \quad (4)$$

其中 γ 是相对比热容, κ 是流体的热扩散系数.

微生物数量的平衡方程可基于 Fick 定律表述:

$$\phi \frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}, \quad (5)$$

其中 ϕ 是多孔介质的孔隙率, \mathbf{j} 是微生物通量, 其具体数值为

$$\mathbf{j} = Nu + NW_s \hat{\mathbf{p}} - D_m \nabla N, \quad (6)$$

其中 W_s 是微生物平均运动速度, $\hat{\mathbf{p}}$ 是细胞平均运动方向, D_m 是微生物的质量扩散系数.

1.2 边界条件

考虑水平多孔层在水平方向是无限长的, 因此可以忽略水平方向分量的影响. 考虑上下边界是半渗透的, 即水可以流通而微生物无法通过. 流体在上下边界的渗流速度均为 w_0 , 微生物在边界上垂直方向的通量为 0. 此外, 下边界的温度比上边界高, 且分别保持恒温.

由此可得边界条件的表达式为

$$\begin{cases} w = w_0, T = T_0 + \Delta T, \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_z = 0, & z = 0, \\ w = w_0, T = T_0, \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_z = 0, & z = H, \end{cases} \quad (7)$$

其中 \mathbf{e}_z 是 z 方向的单位向量.

1.3 无量纲化

为了避免计算时单位换算的不便, 现对方程进行无量纲化处理. 由相似原理, 无量纲化之后的方程仍然反映了原各物理量之间的关系, 定义如下无量纲变量:

$$\begin{cases} \frac{1}{H}(x, y, z) \rightarrow (x^*, y^*, z^*), \frac{H}{\kappa} \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}^*, \frac{\kappa}{\gamma H^2} t \rightarrow t^*, \frac{T - T_0}{\Delta T} \rightarrow T^*, \\ \frac{K}{\mu_e \kappa} P \rightarrow P^*, H \nabla \rightarrow \nabla^*, H^2 \nabla^2 \rightarrow \nabla^{*2}, Da = \frac{K}{H^2}, Pr = \frac{\mu_e}{\rho_0 \kappa}, \\ Le = \frac{\kappa}{D_m}, Pe = \frac{w_0 H}{\kappa}, Pe_B = \frac{w_s H}{D_m}, Ra_T = \frac{\rho_0 g \beta_T \Delta T K H^n}{\mu_e \kappa^n}, Ra_B = \frac{v \Delta \rho g K H^n}{\mu_e D_m^n}, \end{cases} \quad (8)$$

其中 Da 是 Darcy 数, 表征了多孔介质的渗透率; Pr 是 Prandtl 数, 反映了流体物理性质对生物对流传热过程的影响; Le 是微生物的 Lewis 数, 表示热扩散系数和生物质量扩散系数之比; Pe 是 Péclet 数, 反映了流体流动的速度; Pe_B 是生物 Péclet 数, 反映了生物的平均运动速度; Ra_T 是热 Rayleigh 数, 反映了多孔层间的温度梯度; Ra_B 是生物 Rayleigh 数, 反映了生物对流稳定性. 为了表达方便, 去掉上标“*”, 无量纲化之后的控制方程为

$$\frac{C_a Da}{\gamma Pr} \left(\frac{H}{\kappa} \right)^{n-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -|\mathbf{u}|^{n-1} \mathbf{u} - \left(\frac{H}{\kappa} \right)^{n-1} \nabla P + Ra_T \cdot T \mathbf{e}_z - \frac{Ra_B}{Le^n} \cdot N \mathbf{e}_z, \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T, \quad (10)$$

$$\frac{\phi}{\gamma} \frac{\partial N}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(N\mathbf{u} + \frac{Pe_B}{Le} N\hat{\mathbf{p}} - \frac{1}{Le} \nabla N \right). \quad (11)$$

无量纲化后的边界条件为

$$\begin{cases} w = Pe, T = 1, \left(N\mathbf{u} + \frac{Pe_B}{Le} N\hat{\mathbf{p}} - \frac{1}{Le} \nabla N \right) \cdot \mathbf{e}_z = 0, & z = 0, \\ w = Pe, T = 0, \left(N\mathbf{u} + \frac{Pe_B}{Le} N\hat{\mathbf{p}} - \frac{1}{Le} \nabla N \right) \cdot \mathbf{e}_z = 0, & z = 1. \end{cases} \quad (12)$$

1.4 稳态解

当系统处于稳定状态时,取一个垂直的均匀流作为该问题的稳态解,此时微生物运动方向竖直向上,则有

$$u_b = 0, v_b = 0, w_b = Pe, \hat{\mathbf{p}}_b = \mathbf{e}_z, \quad (13)$$

其中下标 b 表示稳态解.将式(13)代入方程(10)、(11)并结合边界条件式(13),可得温度的稳态解为

$$\frac{\partial^2 T_b}{\partial z^2} - Pe \frac{dT_b}{dz} = 0, \quad (14)$$

$$T_b(z) = \frac{e^{Pe} - e^{Pe z}}{e^{Pe} - 1}; \quad (15)$$

浓度的稳态解为

$$N_b \left(Pe + \frac{Pe_B}{Le} \right) - \frac{1}{Le} \frac{dN_b}{dz} = 0, \quad (16)$$

$$N_b(z) = N_0 e^{(LePe + Pe_B)z}. \quad (17)$$

由式(17)可得,底层的细胞数量密度为 N_0 , 多孔层中的细胞平均数量密度为 \bar{N} , 那么

$$\bar{N} = \int_0^1 N_b(z) dz = N_0 \int_0^1 e^{(LePe + Pe_B)z} dz, \quad (18)$$

于是得出

$$N_0 = \frac{(LePe + Pe_B)\bar{N}}{e^{LePe + Pe_B} - 1}. \quad (19)$$

2 线性稳定性分析

扰动法是指在系统达到稳定后,对系统的物理量施加一个微小扰动,通过分析扰动后的流动情况来研究对流系统的稳定性.于是有

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_b(z) + \mathbf{u}'(t, x, y, z), \quad (20)$$

$$T = T_b(z) + T'(t, x, y, z), \quad (21)$$

$$N = N_b(z) + N'(t, x, y, z), \quad (22)$$

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{e}_z + \hat{\mathbf{p}}'(t, x, y, z), \quad (23)$$

其中上标“'”表示扰动量.

Pedley 等^[13]通过研究微生物趋旋性对其游动的定向作用,提出了一种趋旋性运动的扰动方式:

$$\hat{\mathbf{p}}' = B\eta\mathbf{e}_x - B\xi\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z, \quad (24)$$

$$B = \frac{\alpha_{\perp} \mu}{2h\rho_0 g}, \quad (25)$$

$$\eta = -(1 - \alpha_0) \frac{\partial w'}{\partial x} + (1 + \alpha_0) \frac{\partial u'}{\partial z}, \quad (26)$$

$$\xi = (1 - \alpha_0) \frac{\partial w'}{\partial y} - (1 + \alpha_0) \frac{\partial v'}{\partial z}, \quad (27)$$

$$\alpha_0 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad (28)$$

其中 B 是微生物调整游动方向所需的时间尺度, α_{\perp} 是趋旋性的一个系数, h 是微生物细胞质心和形心的距离, α_0 是细胞的偏心率.

将扰动量(20)~(23)和稳态解(13)~(19)代入到控制方程(9)~(11)中,忽略二次扰动项,得到 z 方向的扰动方程如下:

$$\frac{C_a Da}{\gamma Pr |Pe|^{n-1}} \left(\frac{H}{\kappa}\right)^{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 w' + n \nabla_1^2 w' + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} = \frac{Ra_T}{|Pe|^{n-1}} \nabla_1^2 T' - \frac{Ra_B}{Le^n |Pe|^{n-1}} \nabla_1^2 N', \quad (29)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + Pe \frac{\partial T'}{\partial z} - Pe F(z) w' = \nabla^2 T', \quad (30)$$

$$\frac{\phi}{\gamma} \frac{\partial N'}{\partial t} + w' (LePe + Pe_B) N_0 G(z) + \left(Pe + \frac{Pe_B}{Le} \right) \frac{\partial N'}{\partial z} - \frac{Pe_b}{Le} \left(BN_0 G(z) \left((1 - \alpha_0) \nabla_1^2 w' + (1 + \alpha_0) \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) \right) = \frac{1}{Le} \nabla^2 N', \quad (31)$$

其中

$$F(z) = \frac{e^{Pe z}}{e^{Pe} - 1}, \quad G(z) = e^{(LePe + Pe_B)z}. \quad (32)$$

同理,代入扰动后扰动量的边界条件为

$$w' = 0, \quad T' = 0, \quad N' (LePe + Pe_B) = \frac{\partial N'}{\partial z}, \quad z = 0, 1. \quad (33)$$

在线性稳定性分析中,扰动可以用正则模式的叠加形式来表示,即

$$\begin{bmatrix} w(x, y, z, t) \\ T(x, y, z, t) \\ N(x, y, z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(z) \\ \Theta(z) \\ \Phi(z) \end{bmatrix} e^{\sigma t + i(lx + my)}, \quad (34)$$

其中 σ 为扰动的时间增长率, l 和 m 分别为 x 和 y 方向的波数^[14].为了表达方便,上式中去掉了扰动量的上标.一般来说,式(34)中的 σ 为复数.但本文仅就流体非振荡对流情况下的线性稳定性进行分析,因此限定选取 σ 为实数.将式(34)代入到扰动方程(29)~(31)中可得扰动方程的特征值问题,其解就是可反映对流稳定性的 Rayleigh 数 Ra_T 和 Ra_B .由线性稳定性分析法,上述特征值问题可简化为

$$\frac{d^2 W}{dz^2} = \alpha^2 \left(nW - \frac{Ra_T}{|Pe|^{n-1}} \Theta + \frac{Ra_B}{Le^n |Pe|^{n-1}} \Phi \right), \quad (35)$$

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2} - Pe \frac{d\Theta}{dz} - \alpha^2\Theta + PeF(z)W = 0, \quad (36)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - \alpha^2\Phi - \frac{\bar{N}LeQ^2}{e^\varrho - 1} G(z)W - Q \frac{d\Phi}{dz} + \frac{\bar{N}BQPe_B}{e^\varrho - 1} G(z) \left[-(1 - \alpha_0)\alpha^2W + (1 + \alpha_0) \frac{d^2W}{dz^2} \right] = 0, \quad (37)$$

其中

$$\alpha^2 = l^2 + m^2, \quad Q = LePe + Pe_B, \quad (38)$$

这里 α 的物理意义是扰动的波数.边界条件为

$$W = 0, \quad \Theta = 0, \quad Q\Phi = \frac{d\Phi}{dz}, \quad z = 0, 1. \quad (39)$$

利用 Galerkin 方法对上述控制方程进行数值求解.选取满足边界条件(39)的试函数为

$$W_1 = z(1 - z), \quad \Theta_1 = z(1 - z), \quad \Phi_1 = Q^2z^2 + (2Q - Q^2)z + (2 - Q). \quad (40)$$

近似解为试函数与待定系数的线性组合.将近似解和试函数代入到方程组(35)~(37)中,分别进行积分运算后,联立消去待定系数即可得到 Ra_B 与 Ra_T 的关系.

3 结果与讨论

在自然对流的问题研究中,通常用热 Rayleigh 数表征由温度梯度引起的流体对流稳定性,温度梯度越大则热 Rayleigh 数越大.式(35)~(37)中的热 Rayleigh 数 Ra_T 为系统稳定的前提下可容许的热 Rayleigh 数最大值,在同等条件下 Ra_T 越大说明对流越稳定.对于生物对流的稳定性问题,类比采用生物 Rayleigh 数 Ra_B 来表示其对流稳定性.进一步地,引入临界生物 Rayleigh 数 Ra_B^{cr} 来表示临界波数下的对流稳定性,若超过 Ra_B^{cr} , 该生物对流系统就会失稳. Ra_B^{cr} 是 Ra_B 在波数 α 取不同值时的最小值,此时对应的波数就是临界波数,用公式表述为

$$Ra_B^{cr} = \min_{\alpha} Ra_B. \quad (41)$$

其余参数默认设置为 $Ra_T = 10$, $Pe = 0.1$, $Le = 5$, $Pe_B = 0.1$, $B = 1$, $\alpha_0 = 0.2$, $\bar{N} = 1$.

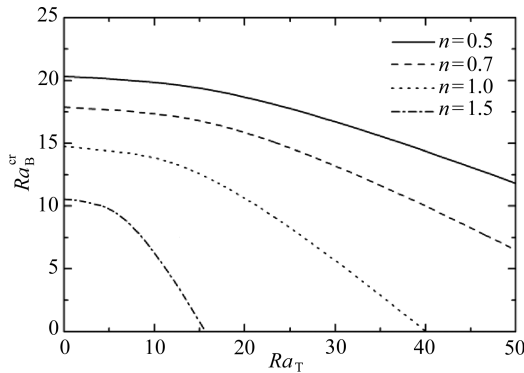


图2 不同 n 下, Ra_B^{cr} 随 Ra_T 的变化曲线

Fig. 2 Effects of n on Ra_B^{cr} variation with Ra_T

图2描述了不同幂律指数 n 条件下,热 Rayleigh 数 Ra_T 对临界生物 Rayleigh 数 Ra_B^{cr} 的影响.随着非 Newton 指数 n 增大,流体逐渐从假塑性流体变成 Newton 流体再到膨胀性流体.可以

得出,无论是上述哪种流体, Ra_B^{cr} 都随着 Ra_T 的增大而减小,也就是说温度梯度越大生物对流越不稳定.类比双扩散对流^[15]进行分析,由于本研究中温度梯度和生物运动对对流的影响都是向上的,所以 Ra_T 和 Ra_B 的作用是相反的.

图3显示了在不同的 Pe 和 Ra_T 条件下,幂律指数 n 对生物对流稳定性的影响.当 $Pe = 0.1$ 和 $Pe = 0.3$ 时,随着 n 的增大, Ra_B^{cr} 先开始增大,到达一个最大值后再逐渐减小.而且 Ra_T 越小,最大值所对应的 n 值就越大.当 Pe 逐渐增大时,最大值所对应的 n 值越大.当 $Pe = 0.5$ 时,在 $n = 0 \sim 3$ 范围内,曲线逐渐开始变成单调递增;当 $Pe = 1$ 时,所有曲线均变成单调递增,即当 Pe 较大时, n 对稳定性的影响均是促进作用.其物理解释为,当 Pe 较小且 Ra_T 较大时,生物对流在假塑性流体中比在膨胀性流体中更稳定;当 Pe 较大时,生物对流在膨胀性流体中比在假塑性流体中更稳定.在 Pe 增大过程中,稳定性有一个最高点,也就是存在一个使 n 对稳定性影响发生变化的过渡区间.另外,从图3可以看出,当 Pe 增大或者 Ra_T 减小时,这个过渡区间对应的 n 值越大.为进一步研究这个过渡区间,本文分析了 Ra_B^{cr} 随 Pe 增大时的变化,如图4所示.

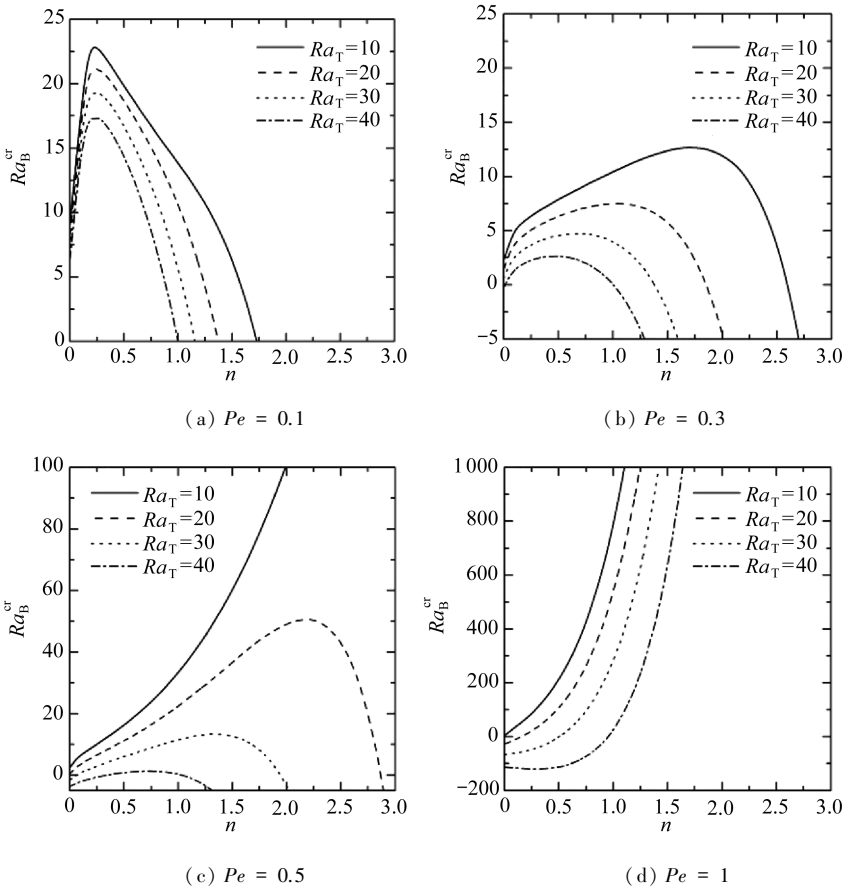


图3 不同 Pe 和 Ra_T 下, Ra_B^{cr} 随 n 的变化曲线

Fig. 3 Effects of Ra_T on Ra_B^{cr} variation with n for different Pe numbers

从图4可以看出,不同 n 对应的曲线会相交于一点附近.这也说明了,当 Pe 较小时,随着幂律指数 n 的取值增大,生物对流系统变得愈发不稳定;当 Pe 较大时,随着 n 增大,生物对流系统则趋于稳定.曲线相交的区域正是上文提到的过渡区间.此外我们还注意到,过渡区间还与 Le 有关, Le 越小,过渡区间对应的 Pe 越大,也就是需要更大的 Pe 来保证系统稳定性随 n 增

大而增强,因此,可以通过改变 Le 来调节 Pe 对系统稳定性的影响。

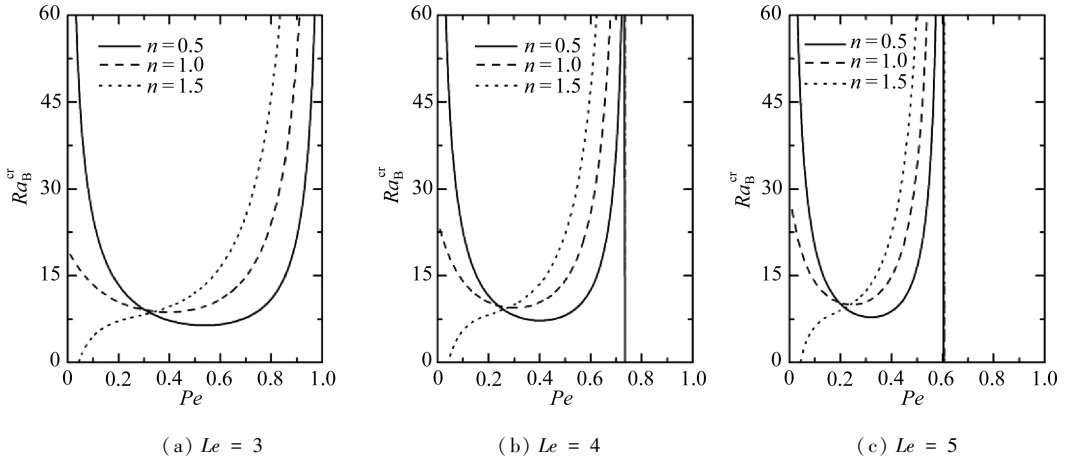


图 4 不同 Le 和 n 下, Ra_B^{cr} 随 Pe 的变化曲线

Fig. 4 Effects of n on Ra_B^{cr} variation with Pe for different Le numbers

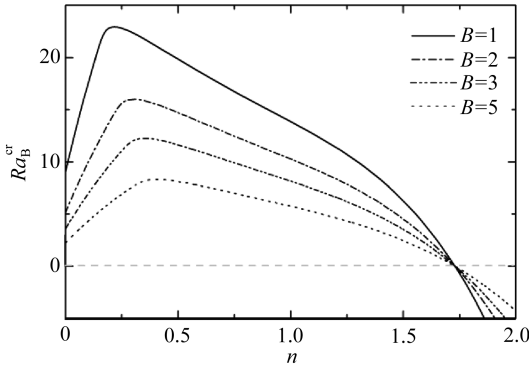


图 5 不同 B 下, Ra_B^{cr} 随 n 的变化曲线

Fig. 5 Effects of B on Ra_B^{cr} variation with n

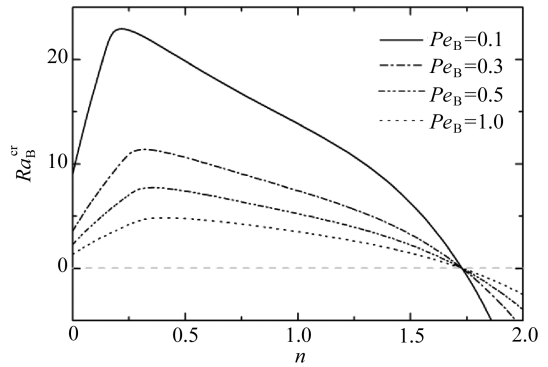


图 6 不同 Pe_B 下, Ra_B^{cr} 随 n 的变化曲线

Fig. 6 Effects of Pe_B on Ra_B^{cr} variation with n

图 5 给出了微生物趋旋性参数 B 对稳定性的影响, $B = 0$ 时微生物运动方向竖直向上, 表明微生物不具有趋旋性, B 越大表明微生物运动过程中的趋旋性特征越明显, 相应地生物的活性也就越高. 由图 5 可得, 在 $Ra_B^{cr} > 0$ 的条件下, 无论幂律指数 $n < 1$ 或 $n > 1$, 随着 B 增大, 临界生物 Rayleigh 数 Ra_B^{cr} 减小, 而且不会改变 Ra_B^{cr} 零点的位置, 即无论哪种幂律流体, 生物对流系统会随着生物趋旋能力增大而变得更加不稳定. 通过比较各数值曲线还可以发现, 当 B 增大时, Ra_B^{cr} 最大值对应的 n 越大. 由此可得, 对于趋旋性较强的微生物, 减小流体的假塑性更利于稳定。

图 6 给出了微生物平均游动速度 Pe_B 对稳定性的影响. 结果表明, 在 $Ra_B^{cr} > 0$ 的条件下, 随着 Pe_B 增大, Ra_B^{cr} 逐渐减小, 生物对流越不稳定. 而且和趋旋性参数 B 一样, Pe_B 的变化不会改变 Ra_B^{cr} 零点的位置, 它对稳定性的影响不受流体幂律指数 n 的影响。

4 结 论

本文研究了幂律流体饱和和水平多孔层中的热-生物对流稳定性, 获得了不同幂律指数 n 下

的稳定性变化规律,结论如下:

- 1) 当底部温度高于顶部时,生物 Rayleigh 数 Ra_b 会随着热 Rayleigh 数 Ra_T 的增大而减小,从而导致生物对流越不稳定.幂律流体的类型不影响热稳定性和生物对流稳定性之间的关系.
- 2) 当 Péclet 数 Pe 较小且 Ra_T 较大时,生物对流在假塑性流体中比在膨胀性流体中更稳定.当 Pe 较大时,生物对流在膨胀性流体中比在假塑性流体中更稳定.
- 3) 当 Péclet 数 Pe 较小时,幂律指数 n 越大,生物对流稳定性先增大后减小.在 Pe 增大过程中,存在一个稳定性变化的过渡区间, Pe 越大或者 Ra_T 越小,过渡区间对应的 n 值越大.通过改变生物 Lewis 数 Le ,可以调节 Pe 对系统稳定性的影响.
- 4) 在同一幂律指数 n 下,微生物趋旋性越大,生物对流越不稳定.对于趋旋性较大的微生物,适当增大 n 值可增强其对流稳定性.

参考文献(References):

- [1] WAGER H. On the effect of gravity upon the movements and aggregation of euglena viridis, ehrb, and other microorganisms[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 1911, **201**(1): 333-390.
- [2] KESSLER J O. Hydrodynamic focusing of motile algal cells[J]. *Nature*, 1985, **313**(5999): 218-220.
- [3] KUZNETSOV A V, AVRAMENKO A A. Stability analysis of bioconvection of gyrotactic motile microorganisms in a fluid saturated porous medium[J]. *Transport in Porous Media*, 2003, **53**(1): 95-104.
- [4] NIELD D A, KUZNETSOV A V. The onset of bio-thermal convection in a suspension of gyrotactic microorganisms in a fluid layer: oscillatory convection[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2006, **45**(10): 990-997.
- [5] ZHAO M, XIAO Y, WANG S. Linear stability of thermal-bioconvection in a suspension of gyrotactic micro-organisms[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2018, **126**: 95-102.
- [6] BARLETTA A, NIELD D A. Linear instability of the horizontal throughflow in a plane porous layer saturated by a power-law fluid[J]. *Physics of Fluids*, 2011, **23**(1): 013102.
- [7] BARLETTA A, STORESLETTEN L. Linear instability of the vertical throughflow in a horizontal porous layer saturated by a power-law fluid[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2016, **99**: 293-302.
- [8] 罗艳,李鸣,杨大勇.微通道内电渗压力混合驱动幂律流体流动模拟[J].应用数学和力学,2016, **37**(4): 373-381.(LUO Yan, LI Ming, YANG Dayong. Simulation of mixed electroosmotic and pressure-driven flows of power-law fluids in microchannels[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 373-381.(in Chinese))
- [9] 田兴旺,王平,徐士鸣.颗粒堆积多孔介质内幂律流体的流动阻力特性[J].哈尔滨工业大学学报,2017, **49**(1): 126-132.(TIAN Xingwang, WANG Ping, XU Shiming. Flow resistance characteristics of power law fluid flow through granular porous medium[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2017, **49**(1): 126-132.(in Chinese))
- [10] 杨旭,梁英杰,孙洪广,等.空间分数阶非 Newton 流体本构及圆管流动规律研究[J].应用数学和力学,2018, **39**(11): 1213-1226.(YANG Xu, LIANG Yingjie, SUN Hongguang, et al. A study on the constitutive relation and the flow of spatial fractional non-Newtonian fluid in circular pipes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(11): 1213-1226.(in Chinese))

- [11] CHRISTOPHER R H, MIDDLEMAN S. Power-law flow through a packed tube[J]. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 1965, **4**(4): 422-426.
- [12] GRAY D D, GIORGINI A. The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases [J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1976, **19**(5): 545-551.
- [13] PEDLEY T J, KESSLER J O. The orientation of spheroidal microorganisms swimming in a flow field[J]. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1987, **231**(1262): 47-70.
- [14] NARAYANA M, SIBANDA P, MOTSA S S, et al. Linear and nonlinear stability analysis of binary Maxwell fluid convection in a porous medium[J]. *Heat and Mass Transfer*, 2012, **48**(5): 863-874.
- [15] WANG S, TAN W. Stability analysis of double-diffusive convection of Maxwell fluid in a porous medium heated from below[J]. *Physics Letters A*, 2008, **372**(17): 3046-3050.

Linear Stability Analysis on Thermo-Bioconvection of Gyrotactic Microorganisms in a Horizontal Porous Layer Saturated by a Power-Law Fluid

DAI Dexuan, WANG Shaowei

(School of Civil Engineering, Shandong University, Jinan 250061, P.R.China)

Abstract: To study the stability of bioconvection in a non-Newtonian fluid-saturated porous medium, the linear stability analysis with the model for gyrotactic microorganisms and power-law fluids was carried out. Based on the Galerkin method, the governing equation was solved to get the numerical solution of the biological Rayleigh number, which represents the stability of bioconvection. The effects of various parameters on the change of power-law indexes were studied in detail. It is concluded that, as the fluid velocity increases, the influence of the power-law index on the stability of the bioconvection will change, and this change will be affected by the thermal Rayleigh number and the biological Lewis number. The results also show that, as the gyrotactic capability of microorganisms increases, the bioconvection stability will decrease, and properly increasing the power-law index is conducive to the stability.

Key words: bioconvection; power-law fluid; gyrotactic capability; porous medium; Galerkin method

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11672164)

引用本文/Cite this paper:

戴德宣, 王少伟. 趋旋性微生物在幂律流体饱和水平多孔层中的热-生物对流稳定性分析[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(8): 856-865.

DAI Dexuan, WANG Shaowei. Linear stability analysis on thermo-bioconvection of gyrotactic microorganisms in a horizontal porous layer saturated by a power-law fluid[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(8): 856-865.