

# 自由边界问题的自适应 Uzawa 块松弛算法\*

郭楠馨, 张守贵

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

**摘要:** 利用增广 Lagrange 乘子法和自适应法则,得到求解单侧障碍自由边界问题的自适应 Uzawa 块松弛法.单侧障碍自由边界问题离散为有限维线性互补问题,等价于一个用辅助变量和增广 Lagrange 函数表示的鞍点问题.采用 Uzawa 块松弛算法求解该问题得到一个两步迭代法,主要的子问题为一个线性问题,同时能显式求解辅助变量.由于 Uzawa 块松弛算法的收敛速度显著依赖于罚参数,而且对具体问题很难选择合适的罚参数.为提高算法的性能,提出了自适应法则,该方法自动调整每次迭代所需的罚参数.数值结果验证了该算法的理论分析.

**关键词:** 自由边界; 互补问题; Uzawa 块松弛算法; 增广 Lagrange 函数; 自适应法则  
**中图分类号:** O221.6      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.390347

## 引 言

自由边界问题在工程和科学问题中有广泛的应用,如渗流问题、障碍问题等<sup>[1-3]</sup>.这类问题不同于一般的边值问题,因为自由边界问题在所考虑区域内部要满足微分不等式约束条件,从而具有很强的非线性,通常不能用解析方法求解,一般只能通过适当的数值方法获得近似解.利用变分不等式理论,这类问题解的存在唯一性已得到广泛的研究,采用有限差分法、有限元法和基本解方法等可将问题转化为有限维线性互补问题、二次规划问题或向量变分不等式等优化问题<sup>[4-8]</sup>,并可用 Uzawa 算法等迭代法进行数值求解,但这种方法的收敛速度对参数的取值非常敏感<sup>[2,7-8]</sup>.

Uzawa 块松弛算法已广泛应用于求解各种等式或不等式约束条件的非线性问题.如 Glowinski 等针对 Bingham 流问题、弹塑性扭转问题等非线性问题,通过引入一个表示梯度函数的辅助变量,导出一个用增广 Lagrange 函数表示的鞍点问题,提出基于交替方向的 Uzawa 块松弛算法,用变分不等式理论证明了算法的收敛性<sup>[2,9]</sup>.在此基础上,Koko 提出了求解单侧接触问题的 Uzawa 块松弛算法,包括无摩擦和摩擦问题,并给出了具体的算法过程<sup>[10]</sup>.Uzawa 块松弛算法的主要优点是每次迭代均把所求非线性问题分解为两个线性子问题,迭代矩阵始终保持不变.另外,算法对罚参数具有全局收敛性.然而,该方法的罚参数取值对收敛速度影响非常大,罚参数太大或太小都将大大减缓收敛速度,因此在实际应用中面临如何优化选择罚参数的问题.

\* 收稿日期: 2018-12-10; 修订日期: 2019-03-12

基金项目: 国家自然科学基金(面上项目)(11471063);重庆市基础科学与前沿技术研究项目(cstc2017jcyjAX0316)

作者简介: 郭楠馨(1993—),女,硕士生(E-mail: guonx1419@163.com);

张守贵(1973—),男,副教授,博士(通讯作者. E-mail: shgzhang@cqu.edu.cn).

本文将 Uzawa 块松弛算法进一步推广到单侧障碍自由边界问题,并对罚参数的选择给出具体可行的办法.首先用差分法把单侧障碍自由边界问题离散为有限维线性互补问题,通过引入一个表示待求函数的辅助变量和增广 Lagrange 乘子法表示的鞍点问题,再用 Uzawa 块松弛算法求解,从而得到一个简单的两步迭代方法.该方法的每一次迭代均是先求解一个简单的线性问题,再利用对偶理论显式计算辅助变量.为了克服罚参数对收敛速度的影响,给出基于平衡原理灵活调整罚参数的自适应法则,这种法则已成功应用于投影算法<sup>[11-14]</sup>.本文在上述 Uzawa 块松弛算法基础上,进一步得到了类似的法则,自动选取使得算法收敛较快的可变罚参数,从而显著提高算法性能.最后用数值算例验证了算法的有效性.

## 1 自由边界问题的有限差分格式

考虑经典的二维单侧障碍自由边界问题,其数学模型的一般形式为

$$\begin{cases} -Lv(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ v(\mathbf{x}) \geq \psi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ v(\mathbf{x})(Lv(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ v(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\Omega$  是平面  $R^n$  中的有界区域,其边界  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $L = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ ,  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$  和  $\psi(\mathbf{x})$  是已知函数,利用变分不等式理论,便可得到该问题解的存在唯一性<sup>[1-2]</sup>.

采用五点差分格式对问题(1)中的微分算子离散化:

$$\begin{cases} -L_h u(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) \geq \psi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x})(L_h u(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma, \end{cases} \quad (2)$$

其中向量函数  $u(\mathbf{x})$  表示未知函数  $v(\mathbf{x})$  在网格节点上的近似值.将已知区域  $\Omega$  内的函数  $f(\mathbf{x})$ 、障碍函数  $\psi(\mathbf{x})$  和边界  $\Gamma$  上的函数  $g(\mathbf{x})$  代入式(2),则上述问题可改写为标准的  $N$  维线性互补问题:

$$u \geq \mathbf{0}, Au + q \geq \mathbf{0}, \langle u, Au + q \rangle = 0, \quad (3)$$

其中  $A$  为一个  $N$  阶对称正定矩阵, $N$  维列向量  $q$  的元素依赖于已知函数  $f(\mathbf{x})$ ,  $\psi(\mathbf{x})$  及  $g(\mathbf{x})$ .

定义非空有界闭凸集:

$$R_+^N = \{u \in R^N \mid u_i - \psi_i \geq 0\} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

互补问题(3)等价于向量变分不等式

$$\langle u - u^*, Au^* + q \rangle \geq 0, \quad \forall u \in R_+^N,$$

或极小值问题寻找  $N$  维列向量  $u$  满足

$$\min \left( \frac{1}{2} u^T Au + q^T u \right), \quad \text{s.t. } u \geq \psi.$$

由于该极小值问题存在唯一解  $u^*$ , 因此线性互补问题(3)也存在唯一解  $u^*$ .

## 2 增广 Lagrange 乘子法

为了求解上述有限维问题(3)的数值解,引入区域  $\Omega$  上的辅助变量  $p \in R^N$ , 使得  $u = p$ . 首先定义 Lagrange 函数

$$L(v, q, \mu) = E(v) - \langle \mu, v - q \rangle \quad (4)$$

和相应的增广 Lagrange 函数

$$L_r(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}) = E(\mathbf{v}) - \langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} - \mathbf{q} \rangle + \frac{r}{2} \|\mathbf{v} - \mathbf{q}\|^2, \quad (5)$$

其中  $E(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v} + \mathbf{q}^T \mathbf{v}$ , 罚参数  $r \geq 0, \forall \mathbf{v} \in R^N, \mathbf{q} \in R^N, \boldsymbol{\mu} \in R^N$ .

考虑式(4)与(5)对应的如下鞍点问题:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}) &\leq L(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \leq L(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}), & \forall \{\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}\} \in R^N \times R^N \times R^N, \\ L_r(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}) &\leq L_r(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \leq L_r(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}), & \forall \{\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}\} \in R^N \times R^N \times R^N, \end{aligned}$$

则有如下结果<sup>[2,9]</sup>.

**定理 1** 如果  $\{\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}\}$  是  $L$  在  $R^N \times R^N \times R^N$  上的一个鞍点, 则对任意  $r \geq 0, \{\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}\}$  也是  $L_r$  的鞍点, 反之也成立. 而且  $\mathbf{u}$  也是问题(3)的解, 且  $\mathbf{p} = \mathbf{u}$ .

**证明** (i) 因为  $\{\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}\}$  是  $L$  在  $R^N \times R^N \times R^N$  上的一个鞍点,  $L(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{R}$ , 则

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}) \leq L(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \leq L(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \forall \{\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}\} \in R^N \times R^N \times R^N. \quad (6)$$

由式(6)的前一部分以及式(4)可得到

$$\langle \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}, \mathbf{u} - \mathbf{p} \rangle \leq 0, \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in R^N,$$

由  $\boldsymbol{\mu}$  的任意性可得到

$$\mathbf{u} = \mathbf{p}. \quad (7)$$

由式(6)的后一部分以及式(7)可得到

$$E(\mathbf{u}) = L(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \leq L(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \forall \{\mathbf{v}, \mathbf{q}\} \in R^N \times R^N,$$

令  $\mathbf{q} = \mathbf{v}$  可得到

$$E(\mathbf{u}) = L(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = E(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in R^N. \quad (8)$$

因为  $\mathbf{p} = \mathbf{u}$ , 所以

$$L_r(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}) = L(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}) = E(\mathbf{u}), \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in R^N. \quad (9)$$

由式(6)和(9)可得

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}) = L_r(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}) = L_r(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) = L(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) &\leq L(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}), \\ &\forall \{\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}\} \in R^N \times R^N \times R^N. \end{aligned} \quad (10)$$

因为  $L_r(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}) = L(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}) + \frac{r}{2} \|\mathbf{v} - \mathbf{q}\|^2$ , 其中  $r \geq 0$ , 由式(10)可得

$$L_r(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}) \leq L_r(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \leq L_r(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \forall \{\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}\} \in R^N \times R^N \times R^N.$$

以上证明了  $\{\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}\}$  也是  $L_r$  的鞍点.

下面对上述证明做一个小结, 由式(6)可知  $\{\mathbf{u}, \mathbf{p}\}$  是下式的解:

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \leq L(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}). \quad (11)$$

在式(11)中令  $\mathbf{q} = \mathbf{p}$  得

$$E(\mathbf{v}) - E(\mathbf{u}) - \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle \geq 0, \quad \forall \{\mathbf{v}, \mathbf{q}\} \in R^N \times R^N. \quad (12)$$

在式(11)中令  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  得

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{q} - \mathbf{p} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{q} \in R^N. \quad (13)$$

(ii) 当  $r \geq 0$  时,  $\{\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}\}$  是  $L_r$  的一个鞍点, 则

$$L_r(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}) \leq L_r(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \leq L_r(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \forall \{\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}\} \in R^N \times R^N \times R^N. \quad (14)$$

利用(i)中的方法, 同理可得  $\mathbf{u} = \mathbf{p}$ , 且  $\mathbf{u}$  也是问题(3)的解.

由式(14)可知  $\{\mathbf{u}, \mathbf{p}\}$  是下式的解:

$$L_r(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}) \leq L_r(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \forall \{\mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}\} \in R^N \times R^N \times R^N. \quad (15)$$

在式(15)中令  $\mathbf{q} = \mathbf{p}$  得

$$E(v) - E(u) - \langle \lambda, v - u \rangle + \frac{r}{2} (\|v - p\|^2 - \|u - p\|^2) \geq 0, \quad (16)$$

因为  $\forall u \in R^N$ , 对  $\forall v \in R^N$ , 有  $u + t(v - u) \in R^N$ , 即  $\forall tv + (1 - t)u \in R^N$ , 其中  $t \in (0, 1]$ . 考虑  $(r/2)(\|v - p\|^2 - \|u - p\|^2)$ , 令  $v = u + t(v - u)$ , 代入其中得  $(rt/2)\|v - u\|^2 + \rho \langle u - p, v - u \rangle$ , 当  $t \rightarrow 0$  时, 结合式(16)得

$$E(v) - E(u) - \langle \lambda, v - u \rangle + r \langle u - p, v - u \rangle \geq 0. \quad (17)$$

在式(15)中令  $v = u$  得

$$\langle \lambda, q - p \rangle + \frac{r}{2} (\|u - q\|^2 - \|u - p\|^2) \geq 0, \quad (18)$$

因为  $\forall p \in R^N$ , 对  $\forall q \in R^N$ , 有  $p + t(q - p) \in R^N$ , 即  $tp + (1 - t)p \in R^N$ , 其中  $t \in (0, 1]$ . 考虑  $(r/2)(\|u - q\|^2 - \|u - p\|^2)$ , 令  $q = p + t(q - p)$ , 代入其中得  $(rt/2)\|q - p\|^2 + \rho \langle p - u, q - p \rangle$ , 当  $t \rightarrow 0$  时, 结合式(18)得

$$\langle \lambda, q - p \rangle + r \langle p - u, q - p \rangle \geq 0. \quad (19)$$

因为  $u = p$ , 所以式(17)及(19)可归纳为式(12)及(13), 故  $\{u, p, \lambda\}$  是式(11)的解. 再由式(9)可知,  $\{u, p, \lambda\}$  也是式(6)的解. 综上, 此定理得证.

### 3 Uzawa 块松弛算法

根据定理 1, 要求解原问题(3)的解, 只需求解增广 Lagrange 函数  $L_r$  的鞍点  $\{u, p, \lambda\}$ , 使得

$$L_r(u, p, \mu) \leq L_r(u, p, \lambda) \leq L_r(v, q, \lambda), \quad \forall \{v, q, \mu\} \in R^N \times R^N \times R^N.$$

由这个问题出发可得到问题(3)的 Uzawa 块松弛算法<sup>[9-10]</sup>, 算法过程如下:

第 1 步 给定初始值,  $\{p^0, \lambda^1\} \in R^N \times R^N, \rho > 0$ , 置  $n = 1$ .

第 2 步 求得  $\forall u^n \in R^N$ , 使得对  $\forall v \in R^N$  有

$$L_r(u^n, p^{n-1}, \lambda^n) \leq L_r(v, p^{n-1}, \lambda^n). \quad (20)$$

第 3 步 求得  $p^n \in R^N$ , 使得对  $\forall q \in R^N$  有

$$L_r(u^n, p^n, \lambda^n) \leq L_r(u^n, q, \lambda^n). \quad (21)$$

第 4 步 更新 Lagrange 乘子:

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n - \rho(u^n - p^n). \quad (22)$$

第 5 步 对给定的某种判定条件, 若满足, 则停止迭代得到数值解  $u^n$ ; 否则, 置  $n = n + 1$ , 返回第 2 步.

接下来详细讨论子问题(20)和(21)的具体求解方法.

问题(20)等价于求解以下方程:

$$\frac{\partial}{\partial v} L_r(u^n, p^{n-1}, \lambda^n) = 0, \quad \forall v \in R^N,$$

即

$$Au^n + ru^n = -q + \lambda^n + rp^{n+1}. \quad (23)$$

令

$$F(q) = L_r(u^n, q, \lambda^n) = E(u^n) + \langle \lambda^n, u^n - q \rangle + \frac{r}{2} \|u^n - q\|^2,$$

根据式(21), 能找到  $p^n \in R^N$  使得

$$F(p^n) \leq F(q), \quad \forall q \in R^N, \quad (24)$$

且在  $\Omega$  上有

$$\mathbf{p}^n - \boldsymbol{\psi} \geq \mathbf{0}. \quad (25)$$

因为式(24)和(25)是约束极小值问题,故可以用鞍点理论来显式地求解该问题.问题(21)等价于以下式子:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} F(\mathbf{p}^n) - \boldsymbol{\gamma}^n = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{q} \in R^N, \quad (26)$$

$$\langle \boldsymbol{\gamma}^n, \mathbf{p}^n - \boldsymbol{\psi} \rangle = 0, \quad (27)$$

其中  $\boldsymbol{\gamma}^n$  是式(25)的 Lagrange 乘子,且  $\boldsymbol{\gamma}^n > \mathbf{0}$ .由式(26)可得到

$$\mathbf{p}^n = \frac{1}{r}(\boldsymbol{\gamma}^n - \boldsymbol{\lambda}^n + r\mathbf{u}^n). \quad (28)$$

将式(28)代入式(27)得到

$$\left\langle \boldsymbol{\gamma}^n, \frac{1}{r}(\boldsymbol{\gamma}^n - \boldsymbol{\lambda}^n + r\mathbf{u}^n) - \boldsymbol{\psi} \right\rangle = 0.$$

又因为  $\boldsymbol{\gamma}^n > \mathbf{0}$ , 所以

$$\frac{1}{r}(\boldsymbol{\gamma}^n - \boldsymbol{\lambda}^n + r\mathbf{u}^n) - \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0},$$

即

$$\boldsymbol{\gamma}^n = \boldsymbol{\lambda}^n - r(\mathbf{u}^n - \boldsymbol{\psi}).$$

故得到 Lagrange 乘子:

$$\boldsymbol{\gamma}^n = (\boldsymbol{\lambda}^n - r\mathbf{u}^n + r\boldsymbol{\psi})^+. \quad (29)$$

将式(29)代入式(28)得到

$$\mathbf{p}^n = \mathbf{u}^n - \frac{1}{r}[\boldsymbol{\lambda}^n - (\boldsymbol{\lambda}^n - r\mathbf{u}^n + r\boldsymbol{\psi})^+].$$

综合以上分析,得到如下 Uzawa 块松弛算法.

#### 算法 1 (UBR)

第 1 步 给定初始值,  $\{\mathbf{p}^0, \boldsymbol{\lambda}^1\} \in R^N \times R^N, r \geq 0$ , 令  $n = 1$ .

第 2 步 求解  $\mathbf{u}^n \in R^N$ , 使得对  $\forall \mathbf{v}^n \in R^N$  有

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^n + r\mathbf{u}^n = -\mathbf{q} + \boldsymbol{\lambda}^n + r\mathbf{p}^{n-1}.$$

第 3 步 计算辅助变量:

$$\mathbf{p}^n = \mathbf{u}^n - \frac{1}{r}[\boldsymbol{\lambda}^n - (\boldsymbol{\lambda}^n - r\mathbf{u}^n + r\boldsymbol{\psi})^+].$$

第 4 步 更新 Lagrange 乘子:

$$\boldsymbol{\lambda}^{n+1} = \boldsymbol{\lambda}^n - \rho(\mathbf{u}^n - \mathbf{p}^n).$$

第 5 步 对给定的误差限  $\varepsilon > 0$ , 若满足

$$\frac{\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|^2}{\|\mathbf{u}^n\|^2} \leq \varepsilon,$$

则迭代停止, 否则返回第 2 步.

## 4 算法收敛性分析

为了证明算法收敛性,在此先给出以下引理<sup>[2]</sup>.

**引理 1** 若  $A_{N \times N}: R^N \rightarrow R^N$  是一个连续并且强单调的映射,  $\{\mathbf{p}^n\}_{n \geq 0}$  是  $R^N$  中的一个序列,

对于任意的  $n$ , 存在  $p \in R^N$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle A p^n - A p, p^n - p \rangle = 0,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p^n = p.$$

从而, 可得 Uzawa 块松弛法的收敛性结果<sup>[2]</sup>.

**定理 2** 当

$$0 < \rho < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \quad (r > 0),$$

由算法产生的序列  $\{u^n, p^n, \lambda^n\}$  收敛于  $L_r$  在  $\mathbf{R}$  上的鞍点  $\{u, p, \lambda\}$ .

**证明** 令  $\delta u^n = u^n - u, \delta p^n = p^n - p, \delta \lambda^n = \lambda^n - \lambda$ . 因为  $\{u, p, \lambda\}$  是  $L_r$  在  $\mathbf{R}$  上的鞍点, 从而有

$$\langle E'(u), v - u \rangle - \langle \lambda, v - u \rangle + r \langle u - p, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in R^N, \quad (30)$$

$$\langle \lambda, q - p \rangle + r \langle p - u, q - p \rangle \geq 0, \quad \forall q \in R^N, \quad (31)$$

$$\lambda = \lambda - \rho(u - p). \quad (32)$$

再通过式(20)~(22)分别定义  $\{u^n, p^n, \lambda^{n+1}\}$ , 有

$$\langle E'(u^n), v - u^n \rangle - \langle \lambda^n, v - u^n \rangle + r \langle u^n - p^{n-1}, v - u^n \rangle \geq 0, \quad \forall v \in R^N, \quad (33)$$

$$\langle \lambda^n, q - p^n \rangle + r \langle p^n - u^n, q - p^n \rangle \geq 0, \quad \forall q \in R^N, \quad (34)$$

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n - \rho(u^n - p^n). \quad (35)$$

分别在式(30)和(33)中令  $v = u^n$  和  $v = u$ , 相加得

$$\langle E'(u^n) - E'(u), \delta u^n \rangle + r \langle \delta u^n - \delta p^{n-1}, \delta u^n \rangle - \langle \delta \lambda^n, \delta u^n \rangle \leq 0. \quad (36)$$

分别在式(31)和(34)中令  $q = p^n$  和  $q = p$ , 相加得

$$r \langle \delta p^n - \delta u^n, \delta p^n \rangle + \langle \delta \lambda^n, \delta p^n \rangle \leq 0. \quad (37)$$

再将式(36)和(37)相加得

$$\langle E'(u^n) - E'(u), \delta u^n \rangle - \langle \delta \lambda^n, \delta u^n - \delta p^n \rangle + r \langle \delta p^n - \delta p^{n-1}, \delta u^n \rangle + r \|\delta u^n - \delta p^n\|^2 \leq 0. \quad (38)$$

结合式(32)和(35)可得

$$\delta \lambda^{n+1} = \delta \lambda^n - \rho(\delta u^n - \delta p^n),$$

进而得到

$$\|\delta \lambda^n\|^2 - \|\delta \lambda^{n+1}\|^2 = 2\rho \langle \delta \lambda^n, \delta u^n - \delta p^n \rangle - \rho^2 \|\delta u^n - \delta p^n\|^2. \quad (39)$$

结合式(38)和(39)可得

$$\|\delta \lambda^n\|^2 - \|\delta \lambda^{n+1}\|^2 \geq 2\rho \langle E'(u^n) - E'(u), \delta u^n \rangle + 2\rho r \langle \delta u^n, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle + \rho(2r - \rho) \|\delta u^n - \delta p^n\|^2. \quad (40)$$

根据  $\delta u^n = (\delta u^n - \delta u^{n-1}) + (\delta u^{n-1} - \delta p^{n-1}) + \delta p^{n-1}$ , 可得到

$$\begin{aligned} \langle \delta u^n, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle &= \langle \delta u^n - \delta u^{n-1}, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle + \\ &\langle \delta u^{n-1} - \delta p^{n-1}, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle + \langle \delta p^{n-1}, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle. \end{aligned} \quad (41)$$

因为

$$\langle \delta p^{n-1}, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle = \frac{1}{2} (\|\delta p^n\|^2 - \|\delta p^{n-1}\|^2 - \|\delta p^n - \delta p^{n-1}\|^2),$$

根据式(41)可得

$$2\rho r \langle \delta u^n, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle =$$

$$2\rho r \langle \delta u^n - \delta u^{n-1}, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle + 2\rho r \langle \delta u^{n-1} - \delta p^{n-1}, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle + \rho r (\| \delta p^n \|^2 - \| \delta p^{n-1} \|^2 - \| \delta p^n - \delta p^{n-1} \|^2). \quad (42)$$

在式(34)中用  $n-1$  代替  $n$  得到

$$\langle \lambda^{n-1}, q - p^{n-1} \rangle + r \langle p^{n-1} - u^{n-1}, q - p^{n-1} \rangle \geq 0. \quad (43)$$

分别在式(34)和(43)中令  $q = p^{n-1}$  和  $q = p^n$ , 相加得

$$r \| \delta p^n - \delta p^{n-1} \|^2 - r \langle \delta u^n - \delta u^{n-1}, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle + \langle \delta \lambda^n - \delta \lambda^{n-1}, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle \leq 0. \quad (44)$$

根据式(35)可得

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} - \rho(u^{n-1} - p^{n-1}). \quad (45)$$

结合式(32)和(45)可得

$$\delta \lambda^n - \delta \lambda^{n-1} = -\rho(\delta u^{n-1} - \delta p^{n-1}). \quad (46)$$

根据式(44)和(46)可得

$$r \langle \delta u^n - \delta u^{n-1}, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle \geq r \| \delta p^n - \delta p^{n-1} \|^2 - \rho \langle \delta u^{n-1} - \delta p^{n-1}, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle, \quad (47)$$

根据式(42)和(47)可得

$$2\rho r \langle \delta u^n, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle \geq \rho r (\| \delta p^n - \delta p^{n-1} \|^2 + \| \delta p^n \|^2 - \| \delta p^{n-1} \|^2) + 2\rho(r - \rho) \langle \delta u^{n-1} - \delta p^{n-1}, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle. \quad (48)$$

结合式(40)和(48)可得

$$\begin{aligned} \| \delta \lambda^n \|^2 - \| \delta \lambda^{n+1} \|^2 &\geq 2\rho \langle E'(u^n) - E'(u), \delta u^n \rangle + \\ &\rho r (\| \delta p^n - \delta p^{n-1} \|^2 + \| \delta p^n \|^2 - \| \delta p^{n-1} \|^2) + \\ &2\rho(r - \rho) \langle \delta u^{n-1} - \delta p^{n-1}, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle + \\ &\rho(2r - \rho) \| \delta u^n - \delta p^n \|^2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} (&\| \delta \lambda^n \|^2 + \rho^2 \| \delta p^{n-1} \|^2) - (\| \delta \lambda^{n+1} \|^2 + \rho^2 \| \delta p^n \|^2) \geq \\ &2\rho \langle E'(u^n) - E'(u), \delta u^n \rangle + 2\rho(r - \rho) \langle \delta u^{n-1} - \delta p^{n-1}, \delta p^n - \delta p^{n-1} \rangle + \\ &\rho(2r - \rho) \| \delta u^n - \delta p^n \|^2 + \rho r \| \delta p^n - \delta p^{n-1} \|^2, \end{aligned}$$

其中  $\langle E'(u^n) - E'(u), \delta u^n \rangle = \langle Au^n - Au, u^n - u \rangle$ .

当  $\rho = r$  时, 显然有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Au^n - Au, u^n - u \rangle = 0,$$

则根据引理1可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u^n = u, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p^n = p.$$

当  $\rho \neq r$  时, 由文献[5]可得以上结果.

$\lambda^*$  是  $\{\lambda^n\}_n$  在  $R^N$  上的一个弱聚点, 在式(33)和(34)中取极限并且利用  $E$  的下半连续性可得

$$E(v) - \langle \lambda^*, v - u \rangle + \rho \langle u - p, v - u \rangle \geq \liminf E(u^n) \geq E(u) \geq 0, \quad \forall v \in R^N, u \in R^N, \quad (49)$$

$$\langle \lambda^*, q - p \rangle + \rho \langle p - u, q - p \rangle \geq 0, \quad \forall q \in R^N, p \in R^N. \quad (50)$$

式(49)、(50)等价于以下式子:

$$L_r(u, p, \lambda^*) \leq L_r(v, q, \lambda^*), \quad \forall \{v, q\} \in R^N \times R^N, \{u, p\} \in R^N \times R^N.$$

因为  $p = u$ , 所以

$$L_r(u, p, \mu) = L(u, p, \mu) = E(u), \quad \forall \mu \in R^N, \quad (51)$$

$$L_r(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}) = L_r(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}^*), \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in R^N. \quad (52)$$

根据式(51)和(52),可知  $\{\mathbf{u}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}^*\}$  也是  $L_r$  的鞍点.

## 5 改进 Uzawa 块松弛算法

在应用 Uzawa 块松弛法求解实际问题时,通常取固定参数  $\rho = r^{[9-10]}$ .然而,不同罚参数对收敛速度影响较大.因此,本文提出自适应 Uzawa 块松弛法,利用自适应法则,得到变参数序列  $\{\rho_n\}$  代替固定参数  $\rho^{[11-14]}$ .使用如下规则来调整参数,在算法收敛性分析中,如果  $\rho = r = \rho_n$ ,则由算法 2 生成的序列  $\{(\mathbf{u}^n, \mathbf{p}^n, \boldsymbol{\lambda}^n)\}$  满足以下不等式:

$$\begin{aligned} & (\|\boldsymbol{\lambda}^n - \boldsymbol{\lambda}\|^2 + \rho_n^2 \|\mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{p}\|^2) - (\|\boldsymbol{\lambda}^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}\|^2 + \rho_n^2 \|\mathbf{p}^n - \mathbf{p}\|^2) \geq \\ & 2\beta\rho_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}\|^2 + \rho_n^2 \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u} - (\mathbf{p}^n - \mathbf{p})\|^2, \end{aligned}$$

其中  $\beta > 0$ , 可以得到

$$\|\boldsymbol{\lambda}^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}\|^2 + \rho_n^2 \|\mathbf{p}^n - \mathbf{p}\|^2 \leq \|\boldsymbol{\lambda}^n - \boldsymbol{\lambda}\|^2 + \rho_n^2 \|\mathbf{p}^{n-1} - \mathbf{p}\|^2.$$

显然,序列  $\{\|\boldsymbol{\lambda}^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}\|^2 + \rho_n^2 \|\mathbf{p}^n - \mathbf{p}\|^2\}$  单调递减且有界.为了加快收敛速度,我们希望

$$\|\boldsymbol{\lambda}^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}^n\| \approx \rho_n \|\mathbf{p}^n - \mathbf{p}^{n-1}\|.$$

这提供了一个选择  $\rho_{n+1}$  的基本思路.对于一个给定的正常数  $\tau$ , 如果  $\rho_n \|\mathbf{p}^n - \mathbf{p}^{n-1}\| > (1 + \tau) \|\boldsymbol{\lambda}^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}^n\|$ , 就在下一次迭代中减小  $\rho_n$ ; 如果  $\rho_n \|\mathbf{p}^n - \mathbf{p}^{n-1}\| < (1/(1 + \tau)) \|\boldsymbol{\lambda}^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}^n\|$ , 就在下一次迭代中增加  $\rho_n$ .令  $\omega_n = \|\boldsymbol{\lambda}^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}^n\| / (\rho_n \|\mathbf{p}^n - \mathbf{p}^{n-1}\|)$ , 可以通过以下方式选择参数  $\rho_{n+1}$ :

$$\rho_{n+1} = \begin{cases} (1 + \tau)\rho_n, & \omega_n > 1 + \tau, \\ \frac{1}{1 + \tau}\rho_n, & \omega_n < \frac{1}{1 + \tau}, \\ \rho_n, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

综上,得到如下自适应 Uzawa 块松弛算法.

### 算法 2 (MUBR)

第 1 步 给定初始值,  $\{\mathbf{p}^0, \boldsymbol{\lambda}^1\} \in R^N \times R^N$ , 参数  $\rho > 0, \tau > 0$ , 令  $\rho_1 = \rho, n = 1$ .

第 2 步 求解  $\mathbf{u}^n \in R^N$ , 使得对  $\forall \mathbf{v}^n \in R^N$  有

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^n + \rho_n \mathbf{u}^n = -\mathbf{q} + \boldsymbol{\lambda}^n + \rho_n \mathbf{p}^{n-1}.$$

第 3 步 计算辅助变量:

$$\mathbf{p}^n = \mathbf{u}^n - \frac{1}{\rho_n} [\boldsymbol{\lambda}^n - (\boldsymbol{\lambda}^n - \rho_n \mathbf{u}^n + \rho_n \boldsymbol{\psi})^+].$$

第 4 步 更新 Lagrange 乘子:

$$\boldsymbol{\lambda}^{n+1} = \boldsymbol{\lambda}^n - \rho_n (\mathbf{u}^n - \mathbf{p}^n).$$

第 5 步 计算  $\omega_n = \frac{\|\boldsymbol{\lambda}^{n+1} - \boldsymbol{\lambda}^n\|}{\rho_n \|\mathbf{p}^n - \mathbf{p}^{n-1}\|}$ , 选取罚参数:

$$\rho_{n+1} = \begin{cases} (1 + \tau)\rho_n, & \omega_n > 1 + \tau, \\ \frac{1}{1 + \tau}\rho_n, & \omega_n < \frac{1}{1 + \tau}, \\ \rho_n, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

第 6 步 对给定的误差限  $\varepsilon > 0$ , 若满足

$$\frac{\|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|^2}{\|\mathbf{u}^n\|^2} \leq \varepsilon,$$

则迭代停止;否则,置  $n = n + 1$ , 返回第 2 步.

## 6 算例分析

为了验证算法的可靠性,用本文提出的算法得到了两个算例的数值结果.对于 Uzawa 块松弛算法(算法 1),取固定参数  $\rho = r$ .两种算法的迭代终止条件均取  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

**算例 1** 考虑在正方形区域  $\Omega = (-1.5, 1.5) \times (-1.5, 1.5)$  中的自由边界问题<sup>[15]</sup>,其中  $f = -2, \psi = 0$ , Dirichlet 边界条件可由解析解

$$v(x) = \begin{cases} \frac{r^2}{2} - \ln(r) - \frac{1}{2}, & r > 1, \\ 0, & r \leq 1 \end{cases}$$

确定,  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ , 从而边界条件可由解析解得到.采用自适应 Uzawa 块松弛算法求解,图 1 为取步长  $h = 1/40$  和  $\tau = 1$  的数值结果,图 2 给出了自由边界的数值解与精确解结果对比,它们是吻合的.

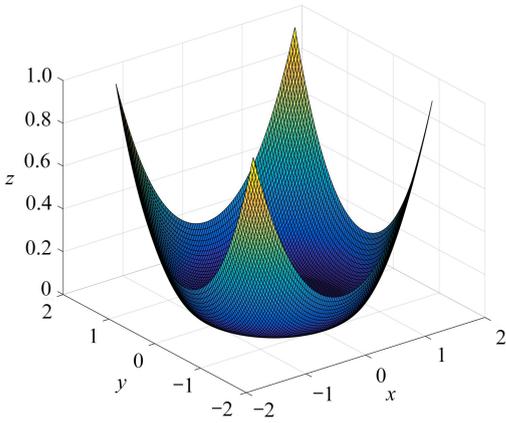


图 1 数值解

Fig. 1 The numerical solution

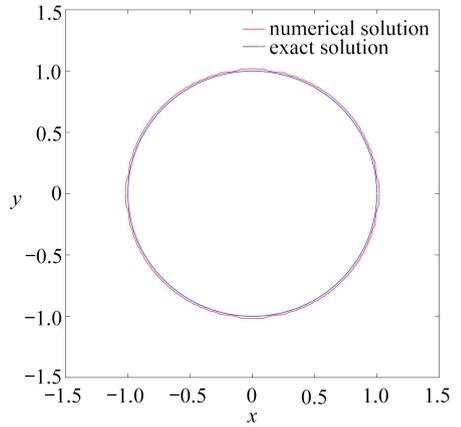


图 2 自由边界的数值解与精确解

Fig. 2 Numerical and exact solutions of the free boundary

对于不同的初始罚参数  $\rho$  和不同的步长  $h$ , 表 1 对算例 1 的 Uzawa 块松弛算法和自适应 Uzawa 块松弛算法所需的迭代次数进行了比较,其中“-”表示迭代次数超过 500 次.结果表明自适应 Uzawa 块松弛算法不仅收敛快,而且非常稳定.

表 1 两种算法的迭代次数情况(算例 1)

Table 1 The number of iterations for each method(example 1)

$\rho$	algorithm 1 (UBR)				algorithm 2 (MUBR)			
	$h = 1/10$	$h = 1/20$	$h = 1/40$	$h = 1/80$	$h = 1/10$	$h = 1/20$	$h = 1/40$	$h = 1/80$
$10^{-2}$	-	-	-	-	32	31	29	31
$10^{-1}$	282	211	201	201	28	26	27	28
1	89	90	78	76	23	21	24	25
10	27	34	28	27	22	24	23	23
$10^2$	70	69	68	68	23	24	24	26
$10^3$	-	-	-	-	27	27	27	28
$10^4$	-	-	-	-	31	29	32	32

**算例 2** 考虑在正方形区域  $\Omega = (-2, 2) \times (-2, 2)$  中的自由边界问题<sup>[6-7,16]</sup>, 其中

$$f = 0,$$

$$\psi = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 \leq 1, \\ -1, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

解析解为

$$v(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & r < r^*, \\ r^* \ln\left(\frac{r}{R}\right), & r \geq r^*, \\ -\frac{1}{\sqrt{1 - r^{*2}}}, & r \geq r^*, \end{cases}$$

其中  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $R = 2$ ,  $r^* = 0.697\ 965\ 142\ 8\dots$ ,  $r^*$  满足条件  $r^{*2}(1 - \ln(r^*/R)) = 1$ . 采用自适应 Uzawa 块松弛算法求解, 同样取  $h = 1/40$  和  $\tau = 1$ , 图 3 为数值解结果, 图 4 给出了自由边界的数值解与精确解结果对比, 它们同样是吻合的.

对算例 2, 表 2 列举了两种算法对不同的初始罚参数  $\rho$  和不同的步长  $h$  所需的迭代次数, 通过比较结果, 同样表明自适应 Uzawa 块松弛算法是非常有效的. 而且从两个算例的数值结果看出, 自适应 Uzawa 块松弛算法的收敛速度几乎不受初始参数  $\rho$  和步长  $h$  的影响.

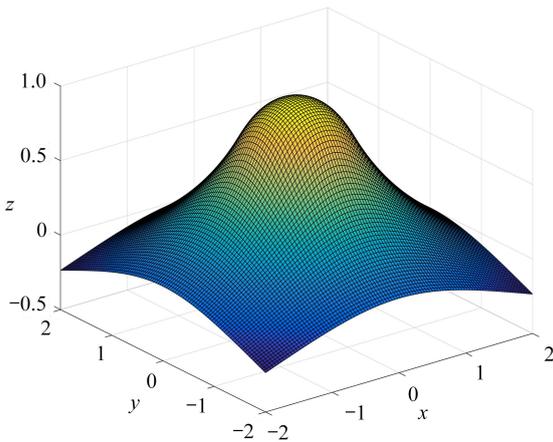


图 3 数值解

Fig. 3 The numerical solution

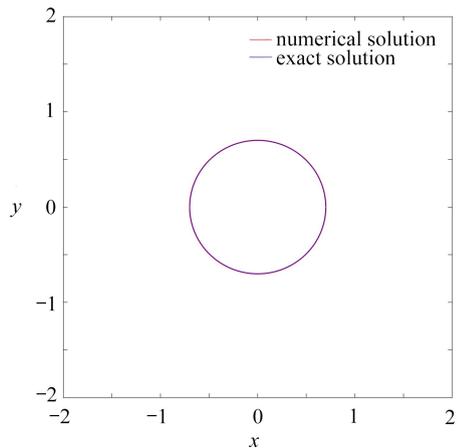


图 4 自由边界的数值解与精确解

Fig. 4 Numerical and exact solutions of the free boundary

表 2 两种算法的迭代次数情况(算例 2)

Table 2 The number of iterations for each method(example 2)

$\rho$	algorithm 1 (UBR)				algorithm 2 (MUBR)			
	$h = 1/10$	$h = 1/20$	$h = 1/40$	$h = 1/80$	$h = 1/10$	$h = 1/20$	$h = 1/40$	$h = 1/80$
$10^{-2}$	-	-	-	-	35	29	30	33
$10^{-1}$	160	214	160	180	32	26	28	30
1	67	60	55	50	32	25	28	30
10	37	43	49	55	33	29	30	34
$10^2$	291	313	361	413	36	30	33	38
$10^3$	-	-	-	-	39	34	37	39
$10^4$	-	-	-	-	43	39	40	43

## 7 结 论

本文提出了求解单侧障碍自由边界问题的 Uzawa 块松弛法及其改进算法. Uzawa 块松弛法的主要优点是每次迭代计算简单. 然而, Uzawa 块松弛算法中的迭代次数高度依赖罚参数  $\rho$ , 为了提高算法的性能, 本文提出基于自适应法则的自适应 Uzawa 块松弛法, 该方法在迭代过程中自动调整罚参数  $\rho$ , 数值算例表明自适应 Uzawa 块松弛算法具有更快的收敛速度和稳定性.

### 参考文献 (References):

- [1] 韩渭敏, 程晓良. 变分不等式简介: 基本理论、数值分析及应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007. (HAN Weimin, CHENG Xiaoliang. *Introduction to Variational Inequality: Element Theory, Numerical Analysis and Applications*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2007. (in Chinese))
- [2] GLOWINSKI R. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- [3] 饶玲. 单调迭代结合虚拟区域法求解非线性障碍问题[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(4): 485-492. (RAO Ling. Monotone iterations combined with fictitious domain methods for numerical solution of nonlinear obstacle problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(4): 485-492. (in Chinese))
- [4] LIN Y, CRYER C W. An alternating direction implicit algorithm for the solution of linear complementarity problems arising from free boundary problems[J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 1985, **13**(1): 1-17.
- [5] BURMAN E, HANSBO P, LARSON M G, et al. Galerkin least squares finite element method for the obstacle problem[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, **313**: 362-374.
- [6] LI X, YUAN D M. Asymptotic approximation method for elliptic variational inequality of first kind[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2014, **35**(3): 381-390.
- [7] YUAN D M, CHENG X L. A meshless method for solving the free boundary problem associated with unilateral obstacle[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2012, **89**(1): 90-97.
- [8] 王光辉, 王烈衡. 基于对偶混合变分形式的 Uzawa 型算法[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(7): 682-688. (WANG Guanghui, WANG Lieheng. Uzawa type algorithm based on dual mixed variational formulation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, **23**(7): 682-688. (in Chinese))
- [9] GLOWINSKI R, TALLEC P L E. *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*[M]. Philadelphia: SIAM, 1989.
- [10] KOKO J. Uzawa block relaxation method for the unilateral contact problem[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, **235**(8): 2343-2356.
- [11] HE B S, LIAO L Z, WANG S L. Self-adaptive operator splitting methods for monotone variational inequalities[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2003, **94**(4): 715-737.
- [12] 钟艳丽, 严月月, 张守贵. 求解单侧障碍问题的自适应投影方法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2018, **35**(1): 70-76. (ZHONG Yanli, YAN Yueyue, ZHANG Shougui. A self-adaptive projection method for the unilateral obstacle problem[J]. *Journal of Chongqing Normal University(Natural Sciences)*, 2018, **35**(1): 70-76. (in Chinese))

- [13] ZHANG S G. Projection and self-adaptive projection methods for the Signorini problem with the BEM[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, **74**(6): 1262-1273.
- [14] ZHANG S G, LI X L. A self-adaptive projection method for contact problems with the BEM [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, **55**: 145-159.
- [15] MARKUS B, SCHRODER A. A posteriori error control of  $hp$ - finite elements for variational inequalities of the first and second kind [J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2015, **70**(12): 2783-2802.
- [16] ZOSSO D, OSTING B, XIA M, et al. An efficient primal-dual method for the obstacle problem [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2017, **73**(1): 416-437.

## A Self-Adaptive Uzawa Block Relaxation Algorithm for Free Boundary Problems

GUO Nanxin, ZHANG Shougui

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University,  
Chongqing 401331, P.R.China)

**Abstract:** A self-adaptive Uzawa block relaxation algorithm, based on the augmented Lagrangian multiplier method and the self-adaptive rule, was designed and analyzed for free boundary problems with unilateral obstacle. The problem was discretized as a finite-dimensional linear complementary problem which is equivalent to a saddle-point one with an augmented Lagrangian function and an auxiliary unknown. With the Uzawa block relaxation method for the problem, a 2-step iterative method was got with a linear problem as a main subproblem while the auxiliary unknown was computed explicitly. The convergence speed of the method highly depends on the penalty parameter, and it is difficult to choose a proper parameter for an individual problem. To improve the performance of the method, a self-adaptive rule was proposed to adjust the parameter automatically per iteration. Numerical results confirm the theoretical analysis of the proposed method.

**Key words:** free boundary; linear complementarity; Uzawa block relaxation algorithm; augmented Lagrangian function; self-adaptive rule

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (General Program)  
(11471063)

---

引用本文/Cite this paper:

郭楠馨, 张守贵. 自由边界问题的自适应 Uzawa 块松弛算法[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(6): 682-693.

GUO Nanxin, ZHANG Shougui. A self-adaptive Uzawa block relaxation algorithm for free boundary problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(6): 682-693.