

弹性约束边界条件下矩形蜂窝夹芯板的自由振动分析*

王永福¹, 漆文凯¹, 沈承^{2,3}

- (1. 南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016;
2. 南京航空航天大学 航空学院, 南京 210016;
3. 西安交通大学 机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049)

(我刊编委卢天健推荐)

摘要: 蜂窝夹芯板在飞行器、高速列车等领域有广泛的用途, 对其开展振动分析具有明确的科学价值及工程意义。为区别于诸简支等传统约束边界, 提出了弹性约束边界下蜂窝夹芯板结构的自由振动特性分析方法。具体来说, 首先通过将蜂窝夹芯层等效为各向异性板, 将夹芯板问题转变为三层板结构, 进一步地, 将板结构的位移场函数由改进的二维 Fourier 级数表示, 并基于能量原理的 Rayleigh-Ritz 法得到结构的固有频率和固有振型, 理论预测结果与数值模拟分析吻合较好。提出的理论模型可用于系统讨论约束边界对蜂窝夹芯结构自由振动特性的影响, 为此类结构的约束方案设计提供理论依据。

关键词: 蜂窝夹芯板; 弹性约束边界; 二维 Fourier 级数; 自由振动

中图分类号: O34

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.390348

引 言

作为一种典型的轻量化结构, 蜂窝夹芯板由于比刚度、比模量较高等诸多优点而广泛应用于飞行器和高速列车等领域, 其振动特性也长期受到研究人员的关注。例如, 鲍四元和邓子辰^[1]依照板变形的对称性, 验证了频率方程组形式的正确性, 得到了不同边界条件下板结构频率方程之间的联系与转化。冀伟等^[2]利用控制方程和线性微分算子的可交换性, 通过引入中间变量位移函数, 将包含三个广义位移的控制方程简化为一个方程, 最终给出了四边简支蜂窝夹芯板的固有频率显式表达式, 其中控制方程的理论基础为 Libove 和 Batdorf 的各向异性夹层板理论。任树伟等^[3]基于 Reissner 夹层板理论建立了蜂窝夹芯板的声耦合模型, 系统讨论了夹芯厚度、蜂窝壁厚、夹层板面内尺寸和声压入射角度等系统参数对结构振动和声学特性的影响规律。综上所述, 目前有关蜂窝夹芯板的振动分析多数限于对称夹层板理论, 无法考虑面内外运动的耦合影响, 而这种耦合效应在非对称夹层板情况下尤其无法忽略。

* 收稿日期: 2018-12-12; 修订日期: 2019-04-30

基金项目: 国家自然科学基金(11502110)

作者简介: 王永福(1992—), 男, 硕士生(E-mail: 786736894@qq.com);

漆文凯(1970—), 男, 副教授, 硕士生导师(E-mail: qwkai@nuaa.edu.cn);

沈承(1986—), 男, 副教授, 硕士生导师(通讯作者, E-mail: cshen@nuaa.edu.cn)。

此外,目前多数理论分析工作局限于传统的简支边界分析,之所以没有考虑其他类型的约束边界并非由于简支边界本身的独特重要性,主要缘故在于数学处理上的困难.例如,早在1973年,Leissa^[4]就系统讨论了多达21种简单约束边界(简支、固支和自由)组合情况下薄板的自由振动,研究发现只有6种对边简支情形可以得出确切的固有振动特征方程,而剩余15种情况需借助于Ritz法进行分析.当基于Rayleigh-Ritz法求解板的振动问题时,合适的估计函数(admissible functions)是决定结果收敛速度和精度的关键因素.目前,多数文献^[5-9]都选用具有相似边界条件的梁函数作为板结构的估计函数,这种方案的优点在于思路清晰、结果较为准确,缺点在于针对不同的边界组合需要找寻对应的量函数,因此适用面较窄.2004年,Li等提出了一种改进Fourier级数的方法解决了在弹性约束边界下薄板结构的振动问题,收敛速度和精度均令人满意.此后,这一方法被拓展使用到弹性约束边界下正交各向异性板^[10]、板-腔声振耦合系统^[11]、复合材料层合板^[12]等结构问题,充分说明了该方法的有效性.需要说明的是,通过选取一定的约束刚度,弹性约束边界可以退化为传统的简支、固支、自由边界,避免了传统梁函数法只能处理单一简单约束边界的局限性,因此讨论弹性约束边界下结构的振动特性具有重要的理论和工程价值.本文拟结合蜂窝夹芯的等效处理以及Li等提出的改进Fourier级数法,研究了弹性约束边界下蜂窝夹芯板的自由振动问题,为今后蜂窝夹芯板的约束设计和分析提供了必要的理论依据.

1 理论模型

1.1 问题说明

如图1所示,考虑一个四边弹性约束的蜂窝夹芯板结构,假设由铝制上面板、下面板和正六边形蜂窝夹芯组成(对于非正六边形蜂窝层芯结构,相邻壁长不相等).上、下面板的厚度为 d 、长度为 a 、宽度为 b ,蜂窝夹芯的厚度为 h ,蜂窝层芯相邻壁长度为 L 和 H ,对于正六边形蜂窝有 $L=H$,蜂窝的壁厚为 δ .考虑沿 x 轴、 y 轴、 z 轴的平动位移和绕 y 轴、 x 轴的转动位移分别为 $u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$, $w_0(x, y, t)$, $\varphi_x(x, y, t)$, $\varphi_y(x, y, t)$.对应于5个位移变量,在夹芯板边界引入线性弹簧(包括 $\kappa^u, \kappa^v, \kappa^w$)和扭转弹簧(K^x, K^y)来描述弹性约束边界的刚度.不同下标符号对应不同边界的约束,比如($\kappa_{x0}^u, \kappa_{x0}^v, \kappa_{x0}^w, K_{x0}^x, K_{x0}^y$)对应 $x=0$ 处的约束刚度.值得注意的是,各种经典边界条件及其任意组合都可以通过调节边界约束弹簧的刚度近似得到.以 $x=0$ 处边界为例:

简支边界(simply supported, 简写为S)

$$\kappa_{x0}^u = \kappa_{x0}^v = \kappa_{x0}^w = K_{x0}^y = \infty, K_{x0}^x = 0;$$

自由边界(free boundary, 简写为F)

$$\kappa_{x0}^u = \kappa_{x0}^v = \kappa_{x0}^w = K_{x0}^x = K_{x0}^y = 0;$$

固支边界(clamped boundary, 简写为C)

$$\kappa_{x0}^u = \kappa_{x0}^v = \kappa_{x0}^w = K_{x0}^x = K_{x0}^y = \infty.$$

实际计算中, ∞ 用一较大数分析即可,本文取 10^9 .

1.2 振动理论模型

对于Y型周期性六边形蜂窝芯层结构(如图2所示),定义 $\beta=L/H$,当 $\beta=1$ 时,蜂窝层芯为正六边形, θ 为相邻胞壁夹角与直角的差值.可从结构力学和材料力学角度计算正六边形蜂窝层芯结构的等效弹性参数,具体过程可参考文献[13-14],参数表达式为:

面内弹性模量

$$E_{cx} = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{\delta}{L} \right)^3 E_s \left(1 - 3 \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \right), \quad E_{cy} = \frac{4}{\sqrt{3}} \left(\frac{\delta}{L} \right)^3 E_s \left(1 - \frac{5}{3} \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 \right),$$

$$G_{cxy} = \frac{(\beta + \sin \theta)}{(1 + 2\beta)\beta^2 \cos \theta} E_s \left(\frac{\delta}{L} \right)^2;$$

面外等效弹性模量

$$G_{cyz} = \frac{(\beta + \sin \theta)}{(1 + 2\beta)\beta^2 \cos \theta} G_s \left(\frac{\delta}{L} \right)^3, \quad G_{cxz} = \frac{\cos \theta}{(\beta + \sin \theta)} G_s \left(\frac{\delta}{L} \right),$$

其中 E_s 和 G_s 分别是蜂窝材料的弹性模量和剪切模量。

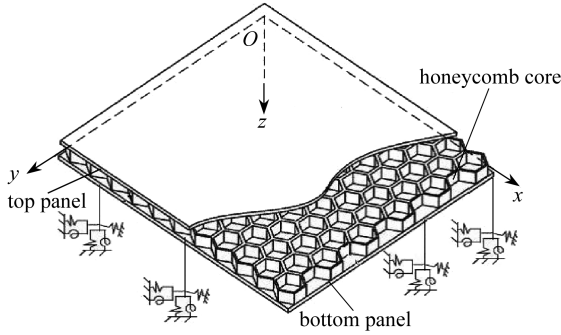


图1 弹性约束边界条件下蜂窝夹芯板示意图

Fig. 1 The sketch of the honeycomb-cored plate under elastically constrained boundary conditions

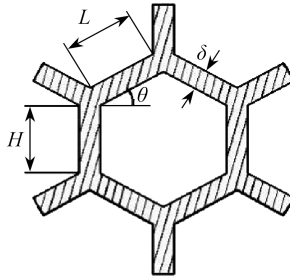


图2 蜂窝单胞几何模型示意图

Fig. 2 The sketch of a single cell in the honeycomb core

若蜂窝夹芯等效为正交各向异性材料层,此时蜂窝夹芯板可近似视作三层板结构.基于一阶剪切理论,蜂窝夹芯板的位移函数可以表示如下:

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t), \\ v(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t), \\ w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $u_0(x, y, t)$, $v_0(x, y, t)$, $w_0(x, y, t)$ 表示中面 x, y, z 方向的位移, φ_x, φ_y 表示中面法向矢量绕 y 轴及 x 轴的转角.根据应力-应变关系,可得

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

其中 $\bar{Q}_{ij}(i, j = 1, 2, \dots, 6)$ 代表弹性系数,并考虑应变-位移关系:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3)$$

设 N_x, N_y, N_{xy} 和 M_x, M_y, M_{xy} 分别为蜂窝夹芯板等效后的横截面上的内力和内力矩, Q_x, Q_y 是横截面上的剪力,可由结构上的应力沿其厚度积分求得,设蜂窝夹芯板的厚度为 h , 即有

$$\begin{cases} N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz, M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \\ M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz, Q_x = K_c \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz, Q_y = K_c \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz, \end{cases} \quad (4)$$

其中 K_c 为剪切修正因子.将方程(1)~(3)代入式(4),得到

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial y \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \\ \partial \varphi_x / \partial x \\ \partial \varphi_y / \partial y \\ \partial \varphi_x / \partial y + \partial \varphi_y / \partial x \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = K_c \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_y + \partial w_0 / \partial y \\ \varphi_x + \partial w_0 / \partial x \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (5)$$

其中 A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} 分别代表拉伸刚度、拉弯耦合刚度和弯曲刚度系数,

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} dz, B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z dz, D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z^2 dz.$$

1.3 改进 Fourier 级数法

为使位移场函数解满足弹性约束边界,可在标准二维 Fourier 余弦级数的基础上增加辅助级数来克服弯曲、扭转及面内位移在边界上空间导数的不连续性.相应的数值结果已经证明该方法有快速的收敛性和较高的计算精度^[10-12].具体来说,蜂窝夹芯板的面内、弯曲及扭转位移场函数可表示为

$$\begin{cases} u_0(x, y, t) = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \right. \\ \left. \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} A_{lm}^y \xi_{ly}(y) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} A_{ln}^x \xi_{lx}(x) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] e^{j\omega t}, \\ v_0(x, y, t) = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} B_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \right. \\ \left. \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} B_{lm}^y \xi_{ly}(y) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} B_{ln}^x \xi_{lx}(x) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] e^{j\omega t}, \\ w_0(x, y, t) = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \right. \\ \left. \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} C_{lm}^y \xi_{ly}(y) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} C_{ln}^x \xi_{lx}(x) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] e^{j\omega t}, \end{cases} \quad (6a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_x(x, y, t) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} D_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} D_{lm}^y \xi_{ly}(y) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} D_{ln}^x \xi_{lx}(x) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] e^{i\omega t}, \\ \varphi_y(x, y, t) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} E_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} E_{lm}^y \xi_{ly}(y) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) + \sum_{l=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} E_{ln}^x \xi_{lx}(x) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \right] e^{i\omega t}, \end{aligned} \right. \quad (6b)$$

其中 $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}, A_{lm}^y, B_{lm}^y, C_{lm}^y, D_{lm}^y, E_{lm}^y, A_{ln}^x, B_{ln}^x, C_{ln}^x, D_{ln}^x, E_{ln}^x$ 为待定系数。区别于传统余弦级数展开法,改进 Fourier 级数法的基本思路是通过添加辅助级数来处理约束边界处的位移及导数的不连续,从而达到迅速收敛到真实解的效果。辅助函数 $\xi_{ly}(y)$ 和 $\xi_{lx}(x)$ 的形式为

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_{1x}(x) &= x\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2, \quad \xi_{2x}(x) = \frac{x^2}{a}\left(\frac{x}{a} - 1\right), \\ \xi_{1y}(y) &= y\left(\frac{y}{b} - 1\right)^2, \quad \xi_{2y}(y) = \frac{y^2}{b}\left(\frac{y}{b} - 1\right). \end{aligned} \right. \quad (7)$$

1.4 自由振动的能量法求解

为了避免分别处理控制方程和边界条件的繁琐问题,可基于能量法加以求解。具体来说,首先写出蜂窝夹芯板的应变能 U_v :

$$U_v = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy} + M_x \partial \varphi_x / \partial x + M_y \partial \varphi_y / \partial y + M_{xy} (\partial \varphi_x / \partial y + \partial \varphi_y / \partial x) + Q_y (\partial w / \partial y + \varphi_y) + Q_x (\partial w / \partial x + \varphi_x)] dx dy. \quad (8)$$

储存在弹性约束边界弹簧中的弹性势能 U_{sp} 表达式为

$$U_{sp} = \frac{1}{2} \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \{ [\kappa_{x0}^u u_0^2 + \kappa_{x0}^v v_0^2 + \kappa_{x0}^w w_0^2 + K_{x0}^x \varphi_x^2 + K_{x0}^y \varphi_y^2]_{x=0} + [\kappa_{xa}^u u_0^2 + \kappa_{xa}^v v_0^2 + \kappa_{xa}^w w_0^2 + K_{xa}^x \varphi_x^2 + K_{xa}^y \varphi_y^2]_{x=a} \} dz dy + \frac{1}{2} \int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} \{ [\kappa_{y0}^u u_0^2 + \kappa_{y0}^v v_0^2 + \kappa_{y0}^w w_0^2 + K_{y0}^x \varphi_x^2 + K_{y0}^y \varphi_y^2]_{y=0} + [\kappa_{yb}^u u_0^2 + \kappa_{yb}^v v_0^2 + \kappa_{yb}^w w_0^2 + K_{yb}^x \varphi_x^2 + K_{yb}^y \varphi_y^2]_{y=b} \} dz dx. \quad (9)$$

蜂窝夹芯板中的总动能 T 可表示为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ I_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)^2 + I_0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 + 2I_1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} \right) + 2I_1 \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial t} \right) + I_2 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial t} \right)^2 + I_2 \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy, \quad (10)$$

其中惯性项 $[I_0, I_1, I_2] = \int_{-h/2}^{h/2} \rho [1, z, z^2] dz$ 。最后,蜂窝夹芯板的 Lagrange 能量函数 L 可写为

$$L = T - U_v - U_{sp}. \quad (11)$$

将式(8)~(10)代入式(11),得到以蜂窝夹芯板位移函数表示的 Lagrange 能量函数 L , 进一步对位移场中的所有待定系数分别取极值即得到矩阵形式的特征值方程:

$$(K - \omega^2 M) Y = \mathbf{0}, \quad (12)$$

其中待定系数向量 $Y = \{ [A_{mn}], [A_{ln}^x], [A_{lm}^y], [B_{mn}], [B_{ln}^x], [B_{lm}^y], [C_{mn}], [C_{ln}^x], [C_{lm}^y], [D_{mn}], [D_{ln}^x], [D_{lm}^y], [E_{mn}], [E_{ln}^x], [E_{lm}^y] \}^T$, 矩阵

$$K = \begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{1,15}^T & \cdots & K_{15,15} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} M_{1,1} & \cdots & M_{1,15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{1,15}^T & \cdots & M_{15,15} \end{bmatrix}$$

为系统的等效刚度矩阵和质量矩阵.通过特征值方程即可求出固有频率以及待定系数向量,进一步将待定系数代入位移场函数(6)可得到固有振型.

2 数值结果与分析

为验证上述理论模型的有效性和正确性,可与不同边界条件下蜂窝夹芯板的有限元结果进行对比.综合考虑蜂窝夹芯结构的实际参数以及建模的便利性,仿真计算中选取的蜂窝层芯边长为 8 mm,层芯厚度为 10 mm,蜂窝壁厚为 0.886 mm,面板长 222 mm、宽 208 mm、厚 1 mm.材料常数 $E_s = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$,除非特别说明,下面的算例均采用这些参数.数值讨论内容分三部分,首先通过设置弹性约束边界的弹簧刚度,得到几种经典边界条件下的理论预测结果,与有限元对比验证;进一步,讨论边界约束刚度对蜂窝夹芯结构的影响规律;最后,分析讨论非对称蜂窝夹芯结构面内和面外变形的耦合对固有频率的影响.

2.1 经典约束边界条件

现有的绝大多数研究均假设结构约束边界为几种经典约束边界,包括四边自由(F-F-F-F)、四边固支(C-C-C-C)、四边简支(S-S-S-S).表1和图3分别给出了3种经典边界条件下固有频率和固有振型的理论及有限元模拟结果.

表1 经典边界条件下理论解与数值模拟解的模式频率对比(单位:Hz)(其中*为有限元模拟结果)

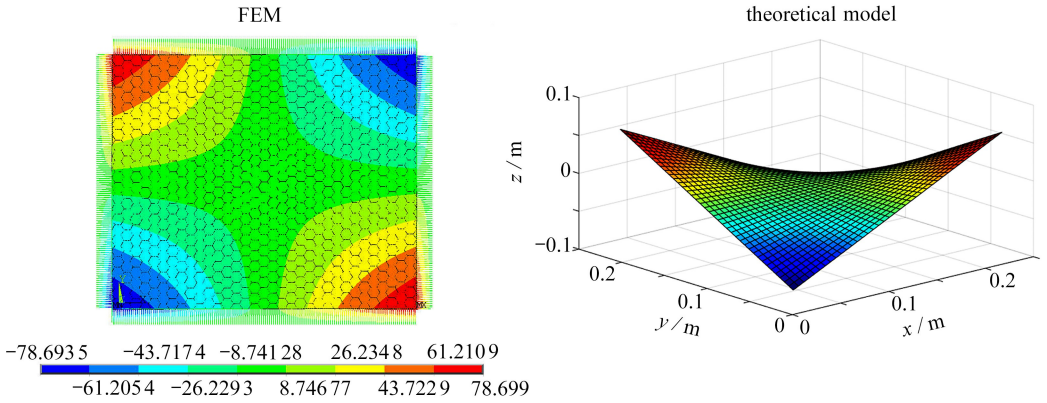
Table 1 Comparison of modal frequencies between the theory and the FEM model (unit: Hz)

(* denote FEM results)

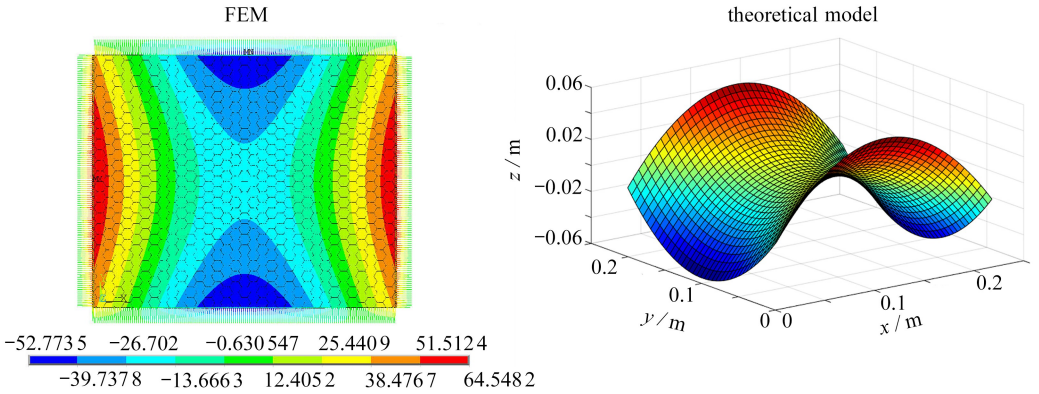
boundary condition	modal order					
	1	2	3	4	5	6
F-F-F-F	809.74	1 214.49	1 571.20	1 967.56	2 053.21	3 314.47
	809.89*	1 205.80*	1 569.50*	2 016.00*	2 113.60*	3 454.90*
	-0.019%	0.721%	0.108%	-2.40%	-2.86%	-4.10%
C-C-C-C	2 227.91	3 930.55	4 225.10	5 758.84	6 269.43	6 808.83
	2 210.70*	3 976.4*	4 257.2*	5 702.3*	6 386.6*	6 959.5*
	0.778%	-1.15%	-0.754%	0.99%	-1.83%	-2.16%
S-S-S-S	1 210.74	2 637.60	2 917.60	3 944.80	4 196.20	4 524.00
	1 220.40*	2 636.30*	2 872.90*	3 949.50*	4 405.70*	4 652.7*
	-0.792%	0.004 9%	1.56%	-0.119%	-4.76%	-2.77%

需要说明的是,此处有限元建模是指在软件中建立实体的蜂窝夹芯结构模型,可近似看作实验结果,而理论结果则经过了两次近似处理,包括蜂窝夹芯的弹性等效以及整体结构动力学方程的能量法求解.由表1中的固有频率及图3中的固有振型均可看出,理论结果和有限元结果吻合较好,前六阶固有频率误差不超过5%,而且最大误差都在第5阶之后.在一定程度上说明了采用的蜂窝夹芯弹性等效模型以及改进 Fourier 级数方法的有效性和正确性.此外,只需

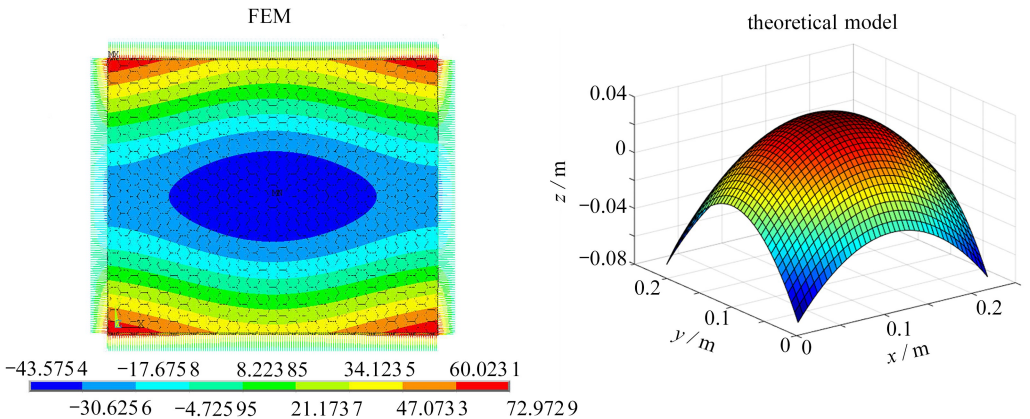
简单修改弹性约束刚度就可通过同一个模型获得 3 种经典边界条件下结构的动力学结果, 无需仿照传统方法对位移函数进行修改和重新推导, 体现了改进 Fourier 级数法的优越性。



(a) 1 阶振型
(a) Mode 1



(b) 2 阶振型
(b) Mode 2



(c) 3 阶振型
(c) Mode 3

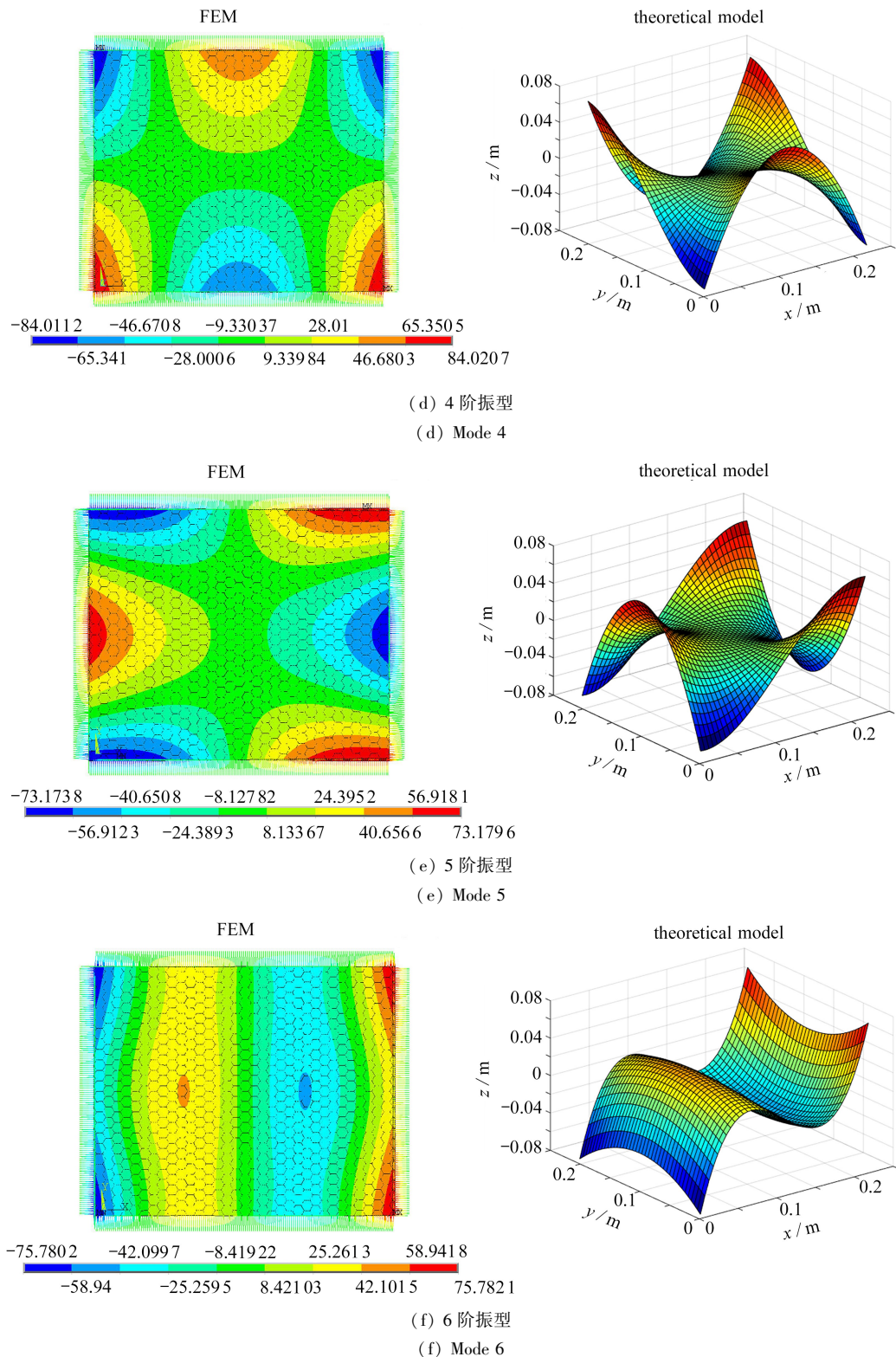


图3 蜂窝夹芯板自由约束条件下振型理论解和有限元模型对比

Fig. 3 Comparison of modal shapes of the honeycomb-cored plate between the theoretical and the FEM model

2.2 弹性约束边界条件

结构的约束边界对系统的振动特性具有重要的影响,上小节中讨论的经典约束边界只是几种较理想的情况,实际工程应用中的约束十分复杂,往往不能完全等效为经典边界条件。基于文中建立的理论模型,可系统讨论约束刚度对结构固有振动特性的影响规律。由于4个边界分别有5个约束弹簧,可讨论的参数较多,需选择具有代表性的参数加以讨论。笔者观察到,从弹性约束弹簧的角度,简支边界和固支边界有4个约束刚度相同,只有1个扭转弹簧刚度有区别(简支为0,固支为 ∞),因此可通过讨论该扭转弹簧刚度的影响来反映约束刚度的作用。具体来说,在 $x=0, a$ 边界处,假设蜂窝夹芯板边界弹性约束的弹簧刚度为 $\kappa_{x0}^u = \kappa_{x0}^v = \kappa_{x0}^w = K_{x0}^y = 10^9, K_{x0}^x = k$,其中 k 表示边界约束扭转弹簧刚度;类似地,在 $y=0, b$ 处,蜂窝夹芯板边界弹性约束的弹簧刚度为 $\kappa_{y0}^u = \kappa_{y0}^v = \kappa_{y0}^w = K_{y0}^x = 10^9, K_{y0}^y = k$ 。表2给出了不同扭转弹簧刚度下蜂窝夹芯板的固有频率。

表2 不同扭转弹簧刚度下蜂窝夹芯板固有频率(单位: Hz)

Table 2 Modal frequencies of the honeycomb-cored plate under different torsional spring constraints(unit: Hz)

$k/(N/m)$	modal order					
	1	2	3	4	5	6
0	1 210.74	2 637.60	2 917.60	3 944.80	4 196.20	4 524.00
10^1	1 215.52	2 638.74	2 930.44	3 949.93	4 201.96	4 525.50
10^3	1 567.15	2 992.69	3 326.10	4 239.92	4 659.31	5 372.63
10^6	2 213.24	3 923.23	4 215.27	5 745.38	6 260.57	6 800.31
10^9	2 227.91	3 930.55	4 225.10	5 758.84	6 269.43	6 808.83

当扭转弹簧刚度 k 从0增加到 10^9 ,相当于从简支边界转变为固支边界状态。由表2可以看出,随着扭转弹簧刚度的提高,结构固有频率逐步提高,结果符合单自由度系统固有频率公式 $\omega_n = \sqrt{k/m}$ 的规律。从定量来看,扭转刚度从 10^6 变化到 10^9 ,结构固有频率变化不大,而当扭转刚度从 10^3 变化到 10^6 时,固有频率变化明显,这是由于当扭转刚度变成 10^6 时,扭转刚度数量级远超过结构质量,已经趋近于固支约束边界了,可近似等效为固支约束。

2.3 面内-面外耦合运动的影响

除却弹性约束条件外,相比于绝大多数研究,文中提出的理论模型另一优点在于建立了包含面内自由度的动力学控制方程,因此可分析面内-面外耦合运动对固有振动的影响。

表3 经典边界条件下耦合刚度对固有频率的影响(单位: Hz)

Table 3 Influence of the coupling stiffness on the modal frequency(unit: Hz)

boundary condition	coupling stiffness	1	2	3	4	5	6
C-C-C-C	$B = 0$	2 762.50	4 992.16	5 226.93	7 110.08	8 807.49	8 905.68
	$B \neq 0$	2 778.31	4 954.49	5 363.74	7 059.59	8 770.48	9 058.72
F-F-F-F	$B = 0$	1 062.45	1 592.24	1 722.46	2 502.69	2 555.09	2 858.10
	$B \neq 0$	1 053.66	1 591.58	1 707.67	2 482.27	2 534.80	2 836.04
S-S-S-S	$B = 0$	1 824.72	3 726.34	4 164.82	5 827.44	7 043.16	7 485.41
	$B \neq 0$	1 814.32	3 697.94	4 135.43	5 786.86	6 992.19	7 436.55

由复合材料力学^[15]可知,系统面内-面外运动产生耦合作用的前提是非对称层合板,即上下面板的材料参数或几何参数有所区别。此处通过假设上面板厚度为1 mm,下面板厚度为2 mm

来引入面内-面外耦合作用,定量上看,面内-面外耦合运动影响主要体现在式(6)中的拉弯耦合刚度矩阵 \mathbf{B} ,通过人为设定刚度矩阵 \mathbf{B} 为 $\mathbf{0}$,结果近似为忽略面内-面外耦合运动的情况.表3给出了3种经典边界条件下是否考虑耦合刚度情况下的结果.可以发现,蜂窝夹芯板面内面外的耦合刚度对结构固有频率有一定的影响.由于耦合刚度的定量影响取决于结构的非对称程度,此处仅以该算例说明理论模型的优越性以及忽略面内-面外耦合运动可能产生的影响,不再做定量分析.

3 结 论

综合蜂窝夹芯的弹性等效以及一种改进的 Fourier 级数方法,本文给出了弹性约束边界下蜂窝夹芯矩形板结构的自由振动理论模型,基于能量法和 Rayleigh-Ritz 法得到了结构的固有振动解,结论如下:

1) 通过与有限元模拟结果对比,验证了自由振动理论模型的正确性和有效性.同时说明了改进 Fourier 级数方法在处理弹性约束边界问题时的优越性,避免了针对不同约束边界需要分别求解的繁琐步骤.

2) 通过对边界扭转弹簧刚度的讨论,分析了从简支边界到固支边界转变过程中蜂窝夹芯板固有频率的影响,结果再次说明了约束刚度对结构振动的重要意义.

3) 通过引入非对称结构,分析了面内-面外耦合运动对蜂窝夹芯结构固有振动的影响,体现了本文理论模型的另一优点,即可处理结构的面内-面外耦合运动.

4) 虽然文中讨论的仅是蜂窝夹芯结构的自由振动问题,但通过引入外力做功,文中的方法可进一步分析蜂窝夹芯结构的受迫振动问题.

参考文献(References):

- [1] 鲍四元, 邓子辰. 薄板弯曲自由振动问题的高精度近似解析解及改进研究[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(11): 1169-1180. (BAO Siyuan, DENG Zichen. High-precision approximate analytical solutions for free bending vibrations of thin plates and an improvement[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2016, **37**(11): 1169-1180. (in Chinese))
- [2] 冀伟, 刘世忠, 吴晖. 四边简支正交各向异性蜂窝型夹层板固有频率计算[J]. 计算力学学报, 2012, **29**(3): 417-420. (JI Wei, LIU Shizhong, WU Hui. Natural frequency for rectangular orthotropic honeycomb sandwich plates with all edges simply supported[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, **29**(3): 417-420. (in Chinese))
- [3] 任树伟, 辛锋先, 卢天健. 蜂窝层芯夹层板结构振动与传声特性研究[J]. 力学学报, 2013, **45**(3): 349-358. (REN Shuwei, XIN Fengxian, LU Tianjian. Vibroacoustic performance of simply supported honeycomb sandwich panels[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, **45**(3): 349-358. (in Chinese))
- [4] LEISSA A W. The free vibration of rectangular plates[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 1973, **31**(3): 257-293.
- [5] WARBURTON G B. The vibrations of rectangular plates[J]. *Proceeding of the Institute of Mechanical Engineers(Series A)*, 1954, **168**(1): 371-384.
- [6] DICKINSON S M, LI E K H. On the use of simply supported plate functions in the Rayleigh-Ritz method applied to the flexural vibration of rectangular plates[J]. *Journal of Sound and*

- Vibration*, 1982, **80**(2): 292-297.
- [7] WARBURTON G B. Response using the Rayleigh-Ritz method[J]. *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1979, **7**(4): 327-334.
- [8] WARBURTON G B, EDNEY S L. Vibrations of rectangular plates with elastically restrained edges[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1984, **95**(4): 537-552.
- [9] LI W L. Vibration analysis of rectangular plates with general elastic boundary supports[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, **273**(3): 619-635.
- [10] KHOV H, LI W L, GIBSON R F. An accurate solution method for the static and dynamic deflections of orthotropic plates with general boundary conditions[J]. *Composite Structures*, 2009, **90**(4): 474-481.
- [11] DU J T, LI W L, LIU Z G, et al. Acoustic analysis of a rectangular cavity with general impedance boundary conditions[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2011, **130**(2): 807-817.
- [12] JIN G, SU Z, SHI S S, et al. Three-dimensional exact solution for the free vibration of arbitrarily thick functionally graded rectangular plates with general boundary conditions[J]. *Composite Structures*, 2014, **108**: 565-577.
- [13] 梁森, 陈花玲, 陈天宁, 等. 蜂窝夹芯结构面内等效弹性参数的分析研究[J]. 航空材料学报, 2004, **24**(3): 26-31. (LIANG Sen, CHEN Hualing, CHEN Tianning, et al. Analytical study of the equivalent elastic parameters for a honeycomb core[J]. *Journal of Aeronautical Materials*, 2004, **24**(3): 26-31. (in Chinese))
- [14] 高涛, 漆文凯, 沈承. 基于一种新的均匀化实施方法的 FRP 刚度预测[J]. 航空学报, 2016, **38**(5): 1-11. (GAO Tao, QI Wenkai, SHEN Cheng. Prediction of FRP stiffness based on a new implementation of homogenization method[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2016, **38**(5): 1-11. (in Chinese))
- [15] 沈观林, 胡更开. 复合材料力学[M]. 北京: 清华大学出版社. (SHEN Guanlin, HU Gengkai. *Mechanics of Composite Material*[M]. Beijing: Tsinghua University Press. (in Chinese))

Free Vibration Analysis of Rectangular Honeycomb-Cored Plates Under Elastically Constrained Boundary Conditions

WANG Yongfu¹, QI Wenkai¹, SHEN Cheng^{2,3}

(1. *College of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R.China;*

2. *College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R.China;*

3. *State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P.R.China)*

(Recommended by LU Tianjian, M. AMM Editorial Board)

Abstract: Honeycomb-cored plates are widely used in aircraft, high-speed trains and other fields, with clear scientific value and engineering significance worthy of vibration analysis. Other than classical boundary condition assumptions (such as simple supports), the elastic constraints were considered to analyze the free vibration characteristics of honeycomb-cored plates. Specifically, the sandwich plate problem was transformed into a 3-layer structure with the honeycomb core layer simplified as an equivalent anisotropic layer. Furthermore, the displacement field function for the structure was expressed in the form of the improved 2D Fourier series, and the natural frequencies and modal shapes of the structure were derived with the Rayleigh-Ritz method based on the energy principle. The theoretical results are in good agreement with the numerical ones. The proposed theoretical model can be used to systematically discuss the effects of boundary constraints on the free vibration characteristics of honeycomb-cored plates, and provides a theoretical basis for the design of constraint schemes for this kind of structures.

Key words: honeycomb-cored plate; elastic constraint boundary; 2D Fourier series; free vibration

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11502110)

引用本文/Cite this paper:

王永福, 漆文凯, 沈承. 弹性约束边界条件下矩形蜂窝夹芯板的自由振动分析[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(6): 583-594.

WANG Yongfu, QI Wenkai, SHEN Cheng. Free vibration analysis of rectangular honeycomb-cored plates under elastically constrained boundary conditions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, 40(6): 583-594.