

非 Newton 流体的物质点法模拟研究*

周晓敏, 孙政

(江西理工大学 建筑与测绘工程学院;
江西省环境岩土与工程灾害控制重点实验室, 江西 赣州 341000)

摘要: 准确模拟非 Newton 流体的运动特性具有重要的工程意义.物质点法作为一种相对新兴的粒子型算法,其结合了 Lagrange 算法和 Euler 算法的双重优势,已广泛有效地应用于各个工程领域.基于物质点法,结合人工状态方程,分析了两种非 Newton 流体(cross 流体和幂律流体)在平板 Poiseuille 流和 Couette 流情况下的流动特性.结果表明:对 Newton 流体,物质点法模拟结果与理论值一致;对非 Newton 流体,物质点法可准确模拟其剪切稀化和剪切稠化现象.表明了物质点法在模拟非 Newton 流体流动问题时的适用性,拓展了物质点法的应用范围.

关键词: 物质点法; 非 Newton 流体; Poiseuille 流; Couette 流; cross 流体; 幂律流体

中图分类号: O373

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.390349

引言

非 Newton 流体广泛存在于自然界的各个领域,例如人体及大多数生物体内的血液、淋巴液等体液都属于非 Newton 流体,高分子聚合物的浓溶液及悬浮液一般为非 Newton 流体,食品工业中的番茄汁、蛋清、果酱等也都是非 Newton 流体.

对于非 Newton 流体,液体动力黏度 μ 不再是常数,而是与剪切速率有关,即非 Newton 流体的切应力与剪切速率不再满足线性关系.非 Newton 流体又分为时变性和非时变性两种.对非时变性非 Newton 流体,其动力黏度仅与剪切速率有关,与时间无关,一般称为广义 Newton 流体;而对于时变性非 Newton 流体,其动力黏度不仅与剪切速率有关,还受剪切持续时间的影响.非 Newton 流体具有很多 Newton 流体所不具备的特性,因此准确地模拟和预测非 Newton 流体的流动行为具有重要的工程意义.

随着计算机技术的高速发展,数值模拟方法在非 Newton 流体的研究中起到了越来越重要的作用^[1].模拟非 Newton 流体的数值方法主要分为两类:一类为有网格类方法,如有限元法^[2]、有限差分法^[3]、有限体积法^[4]等;另一类为无网格类方法.光滑粒子动力学方法(smoothed particle hydrodynamics, SPH)^[5-7]作为一种公认发展较早的无网格粒子型方法在非 Newton 流体的模拟方面已取得了一系列的研究成果.Zhou 和 Ge 等^[8]采用光滑粒子动力学法

* 收稿日期: 2018-12-12; 修订日期: 2019-01-14

基金项目: 国家自然科学基金(11902127);江西省自然科学基金(20192BAB212010);江西省教育厅科学技术研究项目(GJJ170565;GJJ180499)

作者简介: 周晓敏(1988—),女,讲师,硕士(E-mail: xzmzhou@jxust.edu.cn);

孙政(1986—),男,讲师,博士(通讯作者. E-mail: sunzheng@jxust.edu.cn).

对非 Newton 流体 Couette 流的剪切稀化进行了模拟研究,结果表明了 SPH 模拟非 Newton 流体的有效性;Fan 等^[9]和 Shamsoddini 等^[10]分别利用隐式 SPH 法和不可压 SPH 法对非 Newton 幂律流体进行了研究,表明了 SPH 法模拟幂律流体的有效性;Chaussonnet 等^[11]利用弱可压 SPH 法对黏弹性非 Newton 流体在高压空气作用下的力学响应进行了模拟,并与试验相对比,表明了 SPH 法模拟复杂非 Newton 流体问题的能力。

物质点法(material point method, MPM)^[12-13]是一种相对新兴的粒子型方法,其具有 Lagrange 粒子和 Euler 背景网格双重描述,既包含了 Lagrange 粒子型无网格算法的优势,又可避免网格畸变和求解非线性对流项,可方便地追踪自由表面和粒子信息的时间历程;同时利用 Euler 型背景网格求解动量方程和梯度,可方便地施加各种边界条件,且避免了粒子搜索算法带来的巨大计算成本。

自提出之日起,物质点法已在涉及材料特大变形和破坏等一系列复杂工程问题中得到了广泛应用^[14-16]。张雄等^[17]和笔者及合作者^[18]就物质点法与 SPH 法在求解高速冲击和流体流动问题中的求解精度和效率分别进行了对比研究,结果表明:在保证求解精度的同时,物质点法相较 SPH 法具有较高的求解效率,但目前尚未见物质点法在非 Newton 流体中的相关研究报道。

非 Newton 流体种类繁多,在各种非 Newton 流体中,cross 流和幂律流体同属于广义 Newton 流体,即其动力黏度仅与剪切速率有关而与时间无关,两者的本构模型简单易解,且可较好地用于分析工程实际问题,如水泥、黄黏土以及羧甲基纤维素等固体的悬浮液问题^[19-20]。本文在传统物质点法的基础上,通过引入人工状态方程,对两类广义 Newton 流体(cross 流和幂律流体)在平板 Poiseuille 和 Couette 流动下的特性进行分析研究,旨在表明物质点法在求解非 Newton 流体中的有效性。

1 理论方法

1.1 物质点法

与各种数值方法一样,物质点法需满足连续介质力学的 3 个基本方程:

连续方程

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0; \quad (1)$$

运动方程

$$\rho \mathbf{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}; \quad (2)$$

能量方程

$$\rho \dot{e} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \otimes \mathbf{V}), \quad (3)$$

式中 ρ 为质量密度, \mathbf{a} 为加速度矢量, \mathbf{b} 为单位体积力矢量, $\boldsymbol{\sigma}$ 为 Cauchy 应力张量, T 为温度, e 为单位质量内能, k 为热传导率, t 为时间, \mathbf{V} 为速度矢量。

在物质点法中,求解域由若干 Lagrange 型物质点粒子离散,物质点粒子携带整个求解域的物理信息,包括应力、应变、质量、密度等。物质点粒子在整个计算过程中随求解域的变形而运动,其各自质量保持不变,因此连续性方程(1)自动满足;本文未考虑热能交换,因此可忽略能量方程(3);取虚位移 δu_i 作为权函数,得到动量方程(2)在整个求解域 Ω 上的等效弱积分形式^[12-13]:

$$\int_{\Omega} \delta u_i (\sigma_{ij,j} + \rho b_i - \rho \ddot{u}_i) dV = 0. \quad (4)$$

式(4)中左端第一项可写作

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} dV &= \int_{\Omega} [(\delta u_i \sigma_{ij})_{,j} - \delta u_{i,j} \sigma_{ij}] dV = \\ & \int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j dA - \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dV = \\ & \int_{\Gamma_u} \delta u_i \sigma_{ij} n_j dA + \int_{\Gamma_t} \delta u_i \sigma_{ij} n_j dA - \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dV. \end{aligned} \quad (5)$$

在本质边界 Γ_u 处,位移已知,即 $\delta u_i |_{\Gamma_u} = 0$;在自然边界 Γ_t 处,应力边界条件为 $\sigma_{ij} n_j |_{\Gamma_t} = \bar{t}_i$,代入式(5),得

$$\int_{\Omega} \delta u_i \sigma_{ij,j} dV = \int_{\Gamma_t} \delta u_i \bar{t}_i dA - \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dV. \quad (6)$$

将式(6)代入式(4),得

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV - \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i \delta u_i dA - \int_{\Omega} \rho b_i \delta u_i dV = 0. \quad (7)$$

将比应力 $\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}/\rho$ 、比面力 $\bar{t}_i^s = \bar{t}_i/\rho$ 引入式(7)中,同时引入边界层厚度 h ,则 $dA = dV/h$,可得

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_{\Omega} \rho \sigma_{ij}^s \delta u_{i,j} dV - \int_{\Gamma_t} \rho \bar{t}_i^s h^{-1} \delta u_i dV - \int_{\Omega} \rho b_i \delta u_i dV = 0. \quad (8)$$

由于物质点法将连续体离散为一系列物质点,连续体的密度可写为

$$\rho(x) = \sum_{p=1}^{N_p} m_p \delta(x - x_p), \quad (9)$$

将式(9)代入式(8),得

$$\sum_{p=1}^{N_p} m_p \ddot{u}_{ip} \delta u_{ip} + \sum_{p=1}^{N_p} m_p \sigma_{ijp}^s \delta u_{ip,j} - \sum_{p=1}^{N_p} m_p \bar{t}_{ip}^s h^{-1} \delta u_{ip} - \sum_{p=1}^{N_p} m_p b_{ip} \delta u_{ip} = 0. \quad (10)$$

在物质点法中,物质点粒子和背景网格节点的各个物理量可通过插值函数进行相互映射.本文采用有限元单元传统4节点平面单元的形函数作为插值函数 N ,即物质点粒子 p 处的位移 u_{ip} 及其导数 $u_{ip,j}$ 、位移增量 δu_{ip} 可由节点 I 处的位移 u_{il} 和位移增量 δu_{il} 映射得到(本文中若无特别说明,则分别由 p 代表物质点粒子, i 和 j 代表张量形式中的哑指标, I 代表背景网格节点):

$$u_{ip} = N_{Ip} u_{il}, \quad (11)$$

$$u_{ip,j} = N_{Ip,j} u_{il}, \quad (12)$$

$$\delta u_{ip} = N_{Ip} \delta u_{il}. \quad (13)$$

相应的背景网格节点 I 处的质量 m_I 可由物质点粒子 p 的质量 m_p 映射得到

$$m_I = N_{Ip} m_p. \quad (14)$$

将式(11)~(14)代入式(10),得在背景网格节点 I 处的运动方程:

$$m_I \ddot{u}_{il} + \sum_{p=1}^{n_p} m_p \sigma_{ijp}^s N_{Ip,j} \delta u_{il} - \sum_{p=1}^{n_p} m_p \bar{t}_{ip}^s h^{-1} N_{Ip} \delta u_{il} - \sum_{p=1}^{n_p} m_p b_{ip} N_{Ip} \delta u_{il} = 0. \quad (15)$$

考虑 δu_{il} 的任意性,得背景网格节点 I 处的运动方程:

$$m_I \ddot{u}_{il} + \sum_{p=1}^{n_p} m_p \sigma_{ijp}^s N_{Ip,j} - \sum_{p=1}^{n_p} m_p \bar{t}_{ip}^s h^{-1} N_{Ip} - \sum_{p=1}^{n_p} m_p b_{ip} N_{Ip} = 0, \quad (16)$$

代入比应力 $\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}/\rho$ 、比面力 $\bar{t}_i^s = \bar{t}_i/\rho$,式(16)可写为

$$\sum_{p=1}^{n_p} m_p N_{lp} \ddot{u}_{il} + \sum_{p=1}^{n_p} \frac{m_p}{\rho_p} \sigma_{ijp} N_{lp, j} - \sum_{p=1}^{n_p} \frac{m_p}{\rho_p} \bar{l}_{ip} h^{-1} N_{lp} - \sum_{p=1}^{n_p} m_p b_{ip} N_{lp} = 0. \quad (17)$$

利用当前时间步下各物质点携带的质量、应力和密度信息,结合应力边界和体力条件,通过求解式(17)可得当前子步下各个背景网格节点的速度和加速度信息,进而可得到各物质点粒子的加速度、速度和位置信息:

$$\ddot{u}_{ip}^t = \sum_{l=1}^{N_l} \ddot{u}_{il}^t N_{il}(x_p^t), \quad (18)$$

$$\dot{u}_{ip}^{t+\Delta t} = \dot{u}_{ip}^t + \ddot{u}_{ip}^t \Delta t, \quad (19)$$

$$u_{ip}^{t+\Delta t} = u_{ip}^t + \dot{u}_{ip}^{t+\Delta t} \Delta t. \quad (20)$$

物质点上的应力信息可由材料模型得到.

1.2 材料模型

1.2.1 本构模型

对流体材料其本构模型可写为^[21]

$$\sigma_{ijp}^t = 2\mu \dot{\epsilon}_{ijp} - \frac{2}{3}\mu \dot{\epsilon}_{kkp} \delta_{ij} - P_p \delta_{ij}, \quad (21)$$

式中 P_p 为物质点粒子 p 处的压力, μ 为流体动力黏度系数, $\dot{\epsilon}_{ijp}$ 为应变率张量:

$$\dot{\epsilon}_{ijp} = \frac{1}{2}(N_{lp, j} \dot{u}_{il} + N_{lp, i} \dot{u}_{jl}). \quad (22)$$

1.2.2 人工状态方程

对不可压缩流体的计算,一般通过引入人工状态方程将不可压缩流体看作弱可压缩来求解流体压力 P ^[22] 以提高计算效率,本文采用在求解 Newton 流体^[23-24] 和非 Newton 流体^[9,25] 中均广泛使用的人工状态:

$$P = K \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1.0 \right], \quad (23)$$

式中 $\rho = \rho / (1 + \dot{\epsilon}_{ijp} \Delta t)$, K 为人工体积模量, ρ_0 为参考密度, $\gamma = 7.0$.

1.2.3 非 Newton 流体模型

对 Newton 流体,其动力黏度系数 μ 为常数;而对非 Newton 流体,其动力黏度系数 μ 与剪切速率 $\dot{\gamma}$ 有关.本文主要考虑两种非 Newton 流体:cross 流和幂律流体,两者的动力黏度 μ 与剪切速率 $\dot{\gamma}$ 的关系式分别为

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + (K\dot{\gamma})^M}, \quad (24)$$

$$\mu(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \mu_0 \dot{\gamma}^{n-1}, & \dot{\gamma} \neq 0, \\ \mu_0, & \dot{\gamma} = 0, \end{cases} \quad (25)$$

式中 μ_0 和 μ_∞ 分别为零剪切率和高剪切率下的动力黏度; K , M 和 n 为液体常数.对 cross 流,定义常数 $a = \mu_\infty / \mu_0$, 则 $a = 1$, $a < 1$, $a > 1$ 分别对应 Newton 流体、剪切稀化和剪切稠化 cross 流;对于幂律流体, $n = 1$, $n < 1$, $n > 1$ 分别对应 Newton 流体、剪切稀化和剪切稠化幂律流体.

2 计算模型及结果分析

分别研究两种非 Newton 流体(cross 流和幂律流体)在平板 Poisuille 流和 Couette 流中的流动表现.对 cross 流,液体常数取 $K = M = 1.0$, 分别考虑 5 种不同材料参数,分别为:Newton 流

体 ($a = 1$)、剪切稀化 cross 流体 ($a = 0.25, 0.5$)、剪切稠化 cross 流体 ($a = 2.0, 4.0$)。对幂律流体同样计算 5 种不同材料参数,即 Newton 流体 ($n = 1$)、剪切稀化幂律流体 ($n = 0.6, 0.8$)、剪切稠化幂律流体 ($n = 1.2, 1.4$)。本文计算中取人工体积模量 $K = 143 \text{ Pa}$,参考密度 $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$,计算时间步长为 $5 \mu\text{s}$, $\mu_0 = 1 \times 10^{-6} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 。

2.1 Poiseuille 流

Poiseuille 流模型如图 1 所示,静止于两固定平板中间的流体在恒定体力 F 作用下,开始运动直至稳定。计算模型的几何尺寸为 $H = 1 \text{ mm}$ 和 $L = 0.5 \text{ mm}$,体积驱动力为 $F = 8 \text{ mm/s}^2$;对 Newton 流体,其稳态最大速度为 $V(H/2, \infty) = H^2 F \mu_0^{-1} / 8$,即对 Newton 流体稳态最大速度为 1 mm/s 。取背景网格为边长为 $1/20 \text{ mm}$ 的正方形,每个背景网格内布置有 2×2 个物质点粒子。

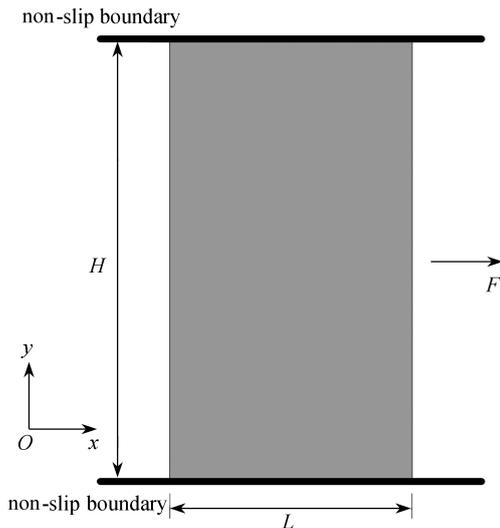


图 1 Poiseuille 流计算模型

Fig. 1 The model for the Poiseuille flow

Morris 等^[23]给出了 Newton 流体 Poiseuille 流速度随高度和时间变化的理论解:

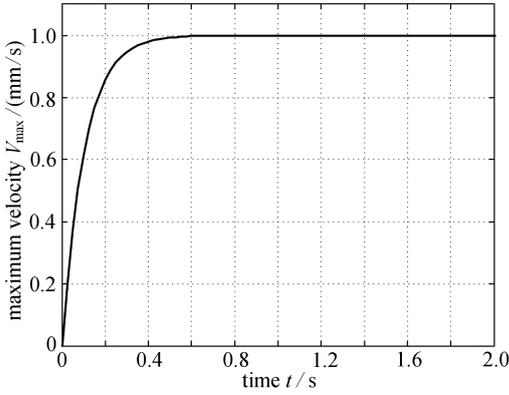
$$V(y, t) = \frac{F}{2\mu_0} y(y - H) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4FH^2}{\mu_0 \pi^3 (2n + 1)^3} \times \sin\left[\frac{\pi y}{H}(2n + 1)\right] \exp\left[-\frac{(2n + 1)^2 \pi^2 \mu_0}{H^2} t\right]. \quad (26)$$

图 2 给出了 Newton 流体 Poiseuille 流的物质点法求解结果^[18],其中图 2(a) 给出了 Newton 流体 Poiseuille 流最大水平速度随时间的变化规律,图 2(b) 给出了不同时刻下物质点法和 SPH 法所得的速度在高度方向的分布曲线,可以看出物质点法所得结果与精确解吻合较好,且较 SPH 法具有较高的稳定性和求解精度。

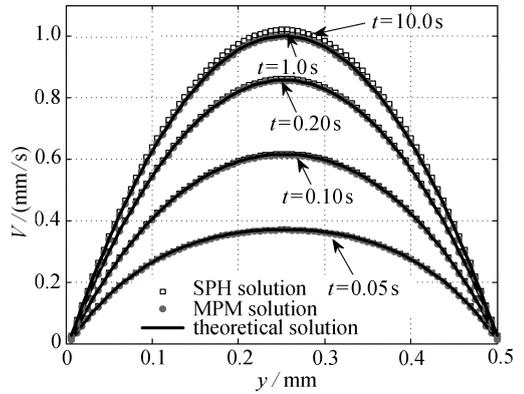
图 3~5 分别给出了非 Newton 流体 Poiseuille 流的物质点法模拟结果,其中图 3(a) 和图 3(b) 分别给出了不同 cross 流和幂律流体模型下 Poiseuille 流在 $y = H/2$ 截面处的平均速度随时间的变化规律;图 4 和图 5 分别给出了 $t = 0.05 \text{ s}$ 时刻,不同 cross 流和不同幂律流模型下平均剪切速率和平均无量纲动力黏度随高度方向的变化规律。

由图 3(a) 和图 3(b) 可以看出:对于剪切稠化液体, Poiseuille 流更快地达到稳定,且得到的稳态最大速度要小于 Newton 流体的值,对于剪切稀化流体则恰好相反。由图 4 和图 5 可以看出:在 Poiseuille 流中,中心截面处的剪切速率最小,越靠近上下边界,剪切速率越大,剪切速

率和动力黏度沿高度中心呈对称分布,结果表明物质点法可以很好地反映非 Newton 流体的剪切稀化和剪切稠化现象,即对剪切稀化流体,随着剪切速率的增大,动力黏度逐渐减小;对剪切稠化流体,随着剪切速率的增大,动力黏度逐渐增大.

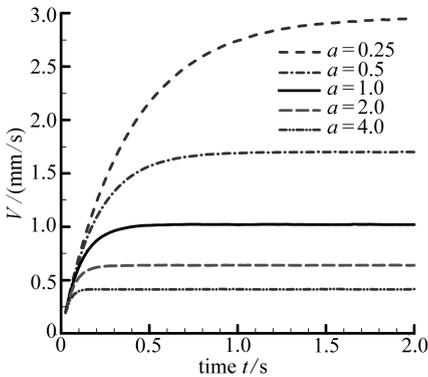


(a) 最大水平速度随时间的变化规律
(a) The time history of the maximum velocity along the x -axis

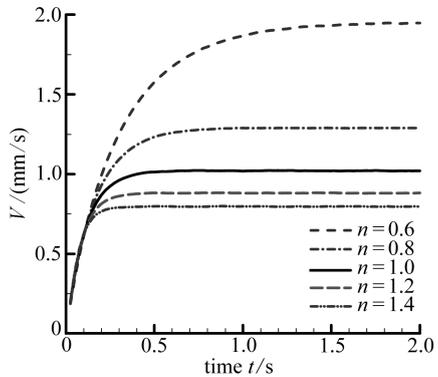


(b) 不同时刻下物质点法和 SPH 法所得的速度在高度方向的分布曲线
(b) Comparisons of the velocity profiles between the MPM and SPH simulations and the theoretical solutions for the Poiseuille flow problem

图 2 Newton 流体 Poiseuille 流物质点法求解结果
Fig. 2 The MPM results of the Newtonian Poiseuille flow



(a) Cross 流
(a) The cross flow



(b) 幂律流
(b) The power-law flow

图 3 非 Newton 流体的物质点法求解结果
Fig. 3 The MPM results of the non-Newtonian fluid flow

由图 4(a)和图 4(b)可以看出:剪切稀化 cross 流体的动力黏度 ($a = 0.25, 0.5$) 均要小于初始黏度 ($a = 1.0$); 而剪切稠化 cross 流体 ($a = 2.0, 4.0$) 的动力黏度总是大于初始黏度.图 5 (a)和图 5(b)表明:对幂律流体,当应变速率大于 1 时,剪切稀化 ($n = 0.6, 0.8$) 和剪切稠化 ($n = 1.2, 1.4$) 幂律流体的动力黏度分别小于和大于液体的初始黏度 ($n = 1.0$); 而当应变速率小于 1 时,剪切稀化幂律流体 ($n = 0.6, 0.8$) 的动力黏度将大于液体的初始黏度 ($n = 1.0$), 相对应的剪切稠化幂律流体 ($n = 1.2, 1.4$) 的动力黏度要小于初始黏度 ($n = 1.0$).

由图 3 和图 5 可以看出,对剪切稀化幂律流体 (如 $n = 0.6, 0.8$ 时),在高度中心位置附近的液体黏度也大于初始液体黏度,而在靠近上下边界处的液体黏度要小于初始液体黏度,考

考虑其最终稳态速度和到达稳态时间均大于 Newton 流体时的情形,因此可以得出结论:平板 Poiseuille 流的最终稳态速度和到达稳态时间是由靠近上下边界处的液体黏度和液体所受体力所决定。

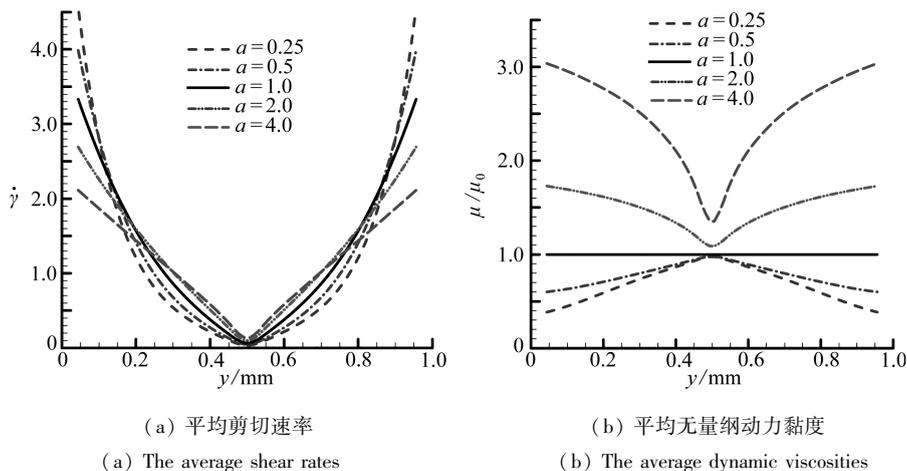


图 4 $t = 0.05$ s 时刻不同 cross 流模型下 Poiseuille 流随高度方向的变化规律
Fig. 4 The Poiseuille flow along the y -axis for the cross flow model at $t = 0.05$ s

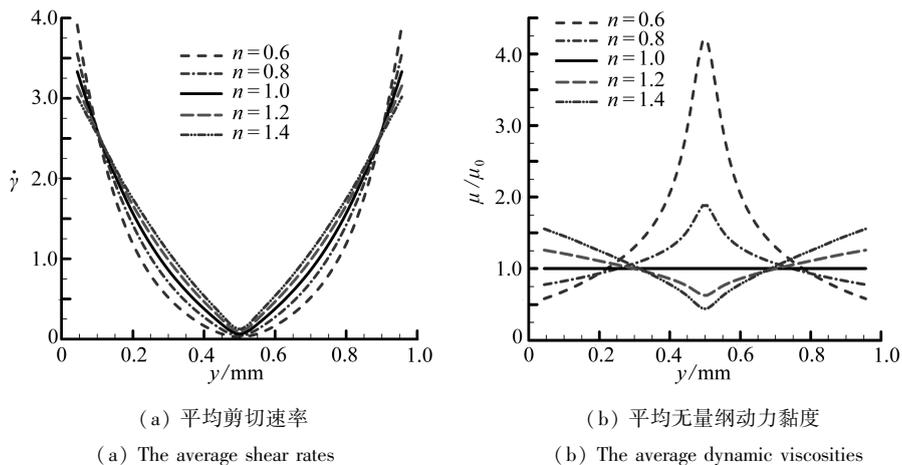


图 5 $t = 0.05$ s 时刻不同幂律流模型下 Poiseuille 流随高度方向的变化规律
Fig. 5 The Poiseuille flow along y -axis for the power-law flow model at $t = 0.05$ s

2.2 Couette 流

Couette 流模型如图 6 所示,下平板固定不动,上平板以恒定速度 V_0 运动,同时驱动初始静止于上下平板间的流体运动,直至达到平衡.计算模型的几何尺寸同样取为 $H = 1$ mm 和 $L = 0.5$ mm,上平板恒定速度 $V_0 = 0.1$ mm/s;对 Newton 流体,其中间位置处的稳态速度为 $V(H/2, \infty) = 0.05$ mm/s.同样地,计算背景网格取边长为 $1/20$ mm 的正方形,每个背景网格内布置有 2×2 个物质点粒子。

Morris 等^[23]给出了 Newton 流体 Couette 流速度随时间和高度分布的理论解:

$$V(y, t) = \frac{V_0}{H} y + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2V}{n\pi} (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \mu}{H^2} t\right). \quad (27)$$

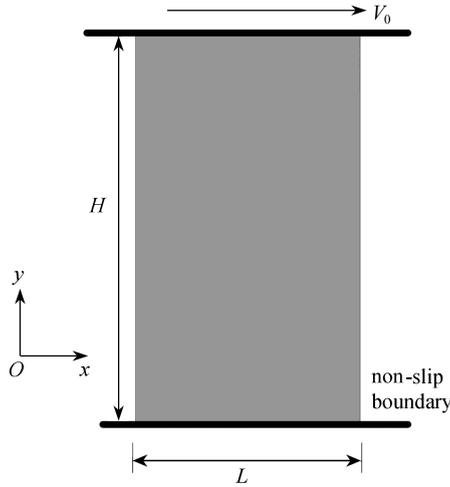


图 6 Couette 流计算模型

Fig. 6 The model for the Couette flow

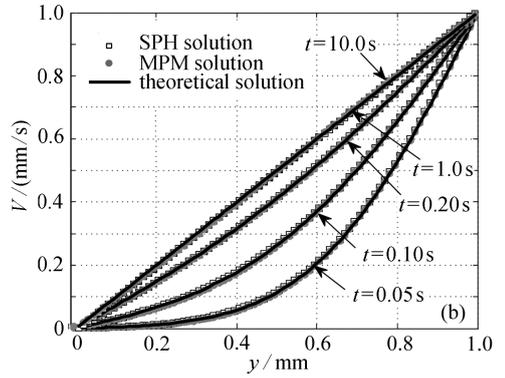
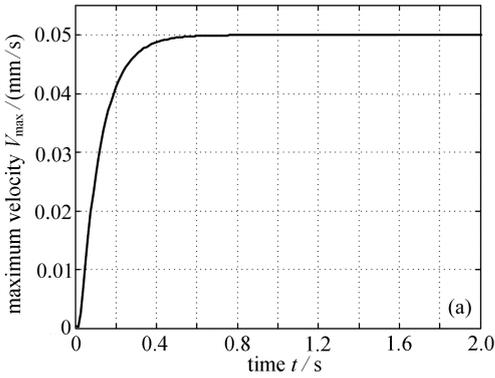
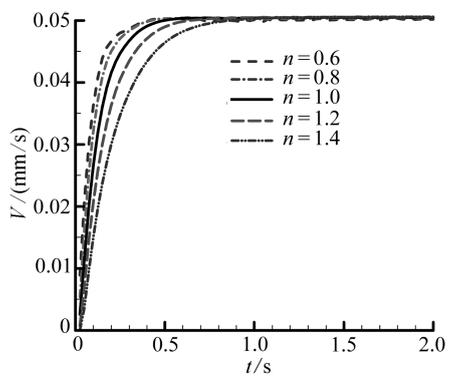
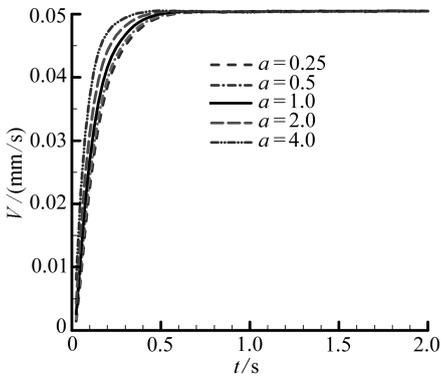


图 7 Newton 流体 Couette 流的物质点求解结果

Fig. 7 The MPM results of the Newtonian Couette flow



(a) cross 流

(a) The cross flow

(b) 幂律流

(b) The power-law flow

图 8 Couette 流在 $y = H/2$ 截面处平均速度随时间的变化规律

Fig. 8 The time-histories of average velocities of the Couette flow at section $y = H/2$

图 7 给出了 Newton 流体 Couette 流的物质点法求解结果^[18],其中图 7(a)给出了 Newton 流体 Couette 流在 $y = H/2$ 处的最大水平速度随时间的变化规律;图 7(b)给出了不同时刻下物质点法和 SPH 法所得的速度在高度方向的分布曲线,可以看出物质点法所得结果与精确解吻合较好。

图 8~10 分别给出了非 Newton 流体 Couette 流的物质点法模拟结果.图 8 给出了不同 cross 流和幂律流模型下 Couette 流在 $y = H/2$ 截面处的平均速度随时间的变化规律;图 9 和图 10 分别给出了 $t = 0.05$ s 时刻,不同 cross 流和不同幂律流模型下 Couette 流平均剪切速率和平均无量纲动力黏度随高度方向的变化规律。

由图 8 可以看出:当 $a = 1.0$ 和 $n = 1.0$ 时,即 Newton 流体时,计算所得稳定速度与理论解一致;对于不同的剪切稀化和剪切稠化液体,Couette 流最终达到稳定的时间虽然不同,但最终的稳定速度一致。

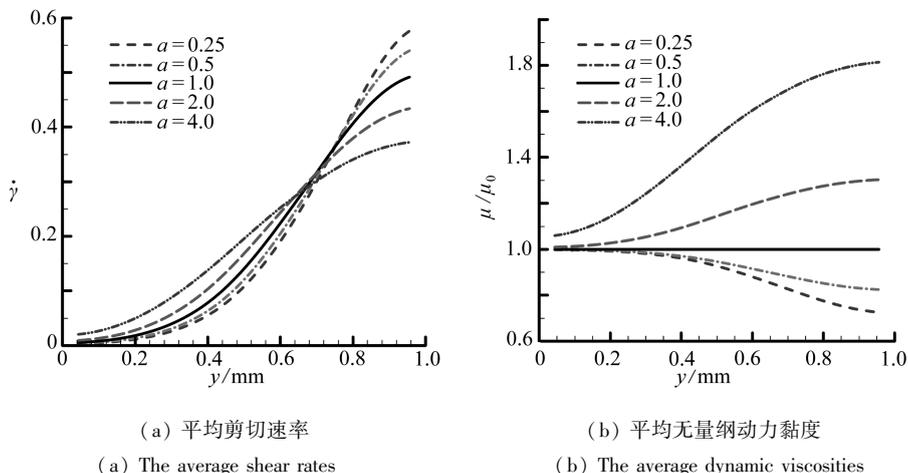


图 9 $t = 0.05$ s 时刻不同 cross 流模型下 Couette 流随高度方向的变化规律

Fig. 9 The Couette flow along the y -axis for different cross flow models at $t = 0.05$ s

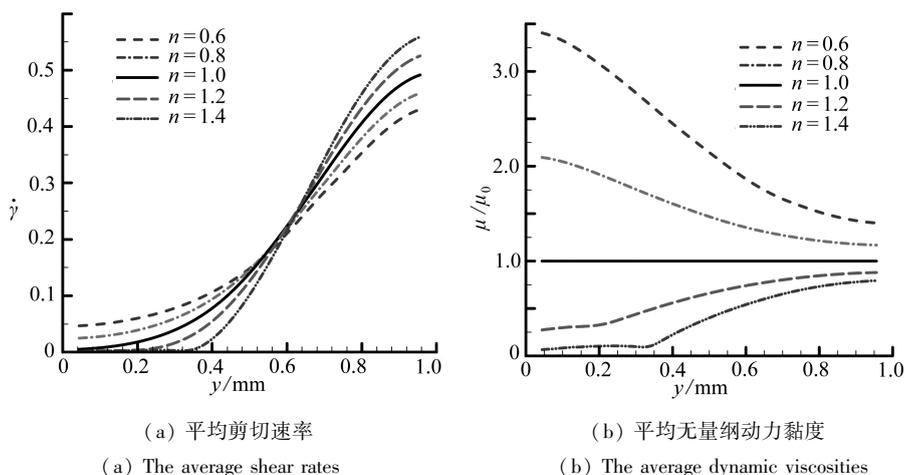


图 10 $t = 0.05$ s 时刻不同幂律流模型下 Couette 流随高度方向的变化规律

Fig. 10 The Couette flow along the y -axis for different power-law flow models at $t = 0.05$ s

由图 9 和图 10 可以看出:在 Couette 流中,距离移动上平板越近处,剪切速率越大,越靠近上下边界,剪切速率越小.对剪切稀化流体,随着应变速率的减小,动力黏度逐渐增大;对剪切

稠化流体,随着应变速率的减小,动力黏度逐渐降低。

由图 10 可以看出,对幂律流体,当剪切速率小于 1 时,剪切稀化幂律流体 ($n = 0.6, 0.8$) 的动力黏度要大于液体的初始黏度 ($n = 1.0$), 因此其将更快地达到稳定状态,如图 8 所示,即 Couette 流到达稳态所需时间与液体黏度有关,但其稳态速度大小只与平板的移动速度有关。

3 结 论

本文基于传统的物质点法,通过引入人工状态方程,研究了两种非 Newton 流体(cross 流和幂律流体),在剪切稠化和剪切稀化情况下,Poiseuille 流和 Couette 流的流动特性,从模拟结果可以看出:

- 1) 物质点法所得 Newton 流体下的 Poiseuille 流和 Couette 流模拟结果与理论解吻合较好;
- 2) 物质点法可很好地模拟非 Newton 流体的流动特性,即对剪切稀化流体,随着应变速率的减小,动力黏度逐渐增大;对剪切稠化流体,随着应变速率的减小,动力黏度逐渐降低,表明了物质点法模拟非 Newton 流体的可行性;
- 3) 平板 Poiseuille 流的稳态速度和到达稳态时间与液体所受体力呈正比,与上下边界处的液体黏度呈反比;平板 Couette 流的稳态速度只与平板的移动速度有关与液体黏度无关,但其到达稳态时间与液体黏度有关。

致谢 本文作者衷心感谢江西理工大学博士启动基金(JXXJBS18042)对本文的资助。

参考文献(References):

- [1] CROCHET M J, DAVIES A R, WALTERS K. *Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow* [M]. Amsterdam: Elsevier, 2012.
- [2] BAAJENS F P T, HULSEN M A, ANDERSON P D. The use of mixed finite element methods for viscoelastic fluid flow analysis[M]//*Encyclopedia of Computational Mechanics*. John Wiley & Sons, 2018: 481-498.
- [3] 张茂林, 吴清松, 李传亮, 等. 非牛顿流体的差分方法研究[J]. 西南石油学院学报, 2000, **22**(1): 5-8. (ZHANG Maolin, WU Qingsong, LI Chuanliang, et al. Research on the formulation of finite difference methods for non Newtonian fluids in porous media[J]. *Journal of Southwest Petroleum Institute*, 2000, **22**(1): 5-8. (in Chinese))
- [4] 袁世伟, 赖焕新. 幂律非牛顿流体流动的有限体积算法[J]. 华东理工大学学报(自然科学版), 2013, **39**(3): 364-369. (YUAN Shiwei, LAI Huanxin. A finite volume method for calculating flows of power-law non-Newton fluids[J]. *Journal of East China University of Science and Technology(Natural Science Edition)*, 2013, **39**(3): 364-369. (in Chinese))
- [5] GINGOLD R A, MONAGHAN J J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1977, **181**(3): 375-389.
- [6] LIU G, LIU M B. *Smoothed Particle Hydrodynamics: a Meshfree Particle Method*[M]. World Scientific Publishing Company, 2003.
- [7] 徐丞君, 徐胜利, 刘庆源. 修正压力梯度粒子近似 SPH 方法计算大密度比界面流动[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(1): 20-35. (XU Chengjun, XU Shengli, LIU Qingyuan. Modified particle approximation to pressure gradients in the SPH algorithm for interfacial flows with high density ratios[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(1): 20-35. (in Chinese))
- [8] ZHOU G, GE W, LI J. Smoothed particles as a non-Newtonian fluid: a case study in Couette

- flow[J]. *Chemical Engineering Science*, 2010, **65**(6): 2258-2262.
- [9] FAN X, TANNER R I, ZHENG R. Smoothed particle hydrodynamics simulation of non-Newtonian moulding flow[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2010, **165**(5/6): 219-226.
- [10] SHAMSODDINI R, SEFID M, FATEHI R. Incompressible SPH modeling and analysis of non-Newtonian power-law fluids, mixing in a microchannel with an oscillating stirrer[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2016, **30**(1): 307-316.
- [11] CHAUSSONNET G, KOCH R, BAUER H, et al. Smoothed particle hydrodynamics simulation of an air-assisted atomizer operating at high pressure: influence of non-Newtonian effects[J]. *Journal of Fluids Engineering*, 2018, **140**(6): 61301. DOI: 10.1115/1.4038753.
- [12] SULSKY D, CHEN Z, SCHREYER H. A particle method for history-dependent materials[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, **118**(1): 179-196.
- [13] SULSKY D, ZHOU S, SCHREYER H. Application of a particle-in-cell method to solid mechanics[J]. *Computer Physics Communications*, 1995, **87**(1): 236-252.
- [14] 廉艳平, 张帆, 刘岩, 等. 物质点法的理论和应用[J]. 力学进展, 2013, **43**(2): 237-264. (LIAN Yanping, ZHANG Fan, LIU Yan, et al. Material point method and its applications[J]. *Advances in Mechanics*, 2013, **43**(2): 237-264. (in Chinese))
- [15] 王宇新, 李晓杰, 王小红, 等. 炸药爆轰物质点法三维数值模拟[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(2): 198-206. (WANG Yuxin, LI Xiaojie, WANG Xiaohong, et al. 3D simulation of explosive detonation with the material point method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(2): 198-206. (in Chinese))
- [16] MA S, ZHANG X, QIU X M. Comparison study of MPM and SPH in modeling hypervelocity impact problems[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2009, **36**(2): 272-282.
- [17] 张雄, 刘岩, 张帆, 等. 极端变形问题的物质点法研究进展[J]. 计算力学学报, 2017, **34**(1): 1-16. (ZHANG Xiong, LIU Yan, ZHANG Fan, et al. Recent progress of material point method for extreme deformation problems[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, **34**(1): 1-16. (in Chinese))
- [18] SUN Z, LI H, GAN Y, et al. Material point method and smoothed particle hydrodynamics simulations of fluid flow problems: a comparative study[J]. *Progress in Computational Fluid Dynamics*, 2018, **18**(1): 1-18.
- [19] 陈文芳, 蔡扶时. 非牛顿流体的一些本构方程[J]. 力学学报, 1983, **19**(1): 16-26. (CHEN Wenfang, CAI Fushi. Some constitutive equations for non-Newtonian fluids[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1983, **19**(1): 16-26. (in Chinese))
- [20] 陈文芳. 非牛顿流体力学[M]. 北京: 科学出版社, 1984. (CHEN Wenfang. *The Mechanics of Non-Newtonian Fluids*[M]. Beijing: Science Press, 1984. (in Chinese))
- [21] 周光炯, 严宗毅, 许世雄, 等. 流体力学(上)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001. (ZHOU Guangjiong, YAN Zongyi, XU Shixiong, et al. *The Fluid Mechanics*(1)[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001. (in Chinese))
- [22] LI J G, HAMAMOTO Y, LIU Y, et al. Sloshing impact simulation with material point method and its experimental validations[J]. *Computers & Fluids*, 2014, **103**: 86-99.
- [23] MORRIS J P, FOX P J, ZHU Y. Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, **136**(1): 214-226.
- [24] MONAGHAN J J. Simulating free surface flows with SPH[J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, **110**(2): 399-406.

- [25] XIANG H, CHEN B. Simulating non-Newtonian flows with the moving particle semi-implicit method with an SPH kernel[J]. *Fluid Dynamics Research*, 2015, **47**(1): 15511. DOI: 10.1088/0169-5983/47/1/015511.

Simulation of Non-Newtonian Fluid Flows With the Material Point Method

ZHOU Xiaomin, SUN Zheng

(*Jiangxi Provincial Key Laboratory of Environmental Geotechnique and Engineering
Disaster Control; School of Architectural and Surveying & Mapping Engineering,
Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou, Jiangxi 341000, P.R.China*)

Abstract: Simulation of the non-Newtonian fluid flow is an interesting problem for engineers. As a relatively new particle-based method, the material point method (MPM), combining the advantages of both the Lagrangian algorithm and the Eulerian algorithm, has been widely and effectively used to solve complex engineering problems. The plane Poiseuille flow and Couette flow of the shear thickening and shear thinning cross fluid and power-law fluid were studied with the artificial state equations for the MPM. The results show that, the simulation with the MPM for the Newtonian fluid is in good agreement with the theoretical solution and the MPM simulates the shear thinning and shearing thickening of the non-Newtonian fluid exactly. The results confirm the applicability of the MPM for simulation of the non-Newtonian fluid flow and expand the application field of the MPM.

Key words: material point method; non-Newtonian fluid; Poiseuille flow; Couette flow; cross flow; power-law flow

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11902127)

引用本文/Cite this paper:

周晓敏, 孙政. 非 Newton 流体的物质点法模拟研究[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(10): 1135-1146.
ZHOU Xiaomin, SUN Zheng. Simulation of non-Newtonian fluid flows with the material point method [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(10): 1135-1146.