

具概率延迟反馈金融系统的脉冲控制*

阿子阿英¹, 饶若峰^{1,2}, 赵 锋¹, 黄鸿燕¹, 王 雪¹, 刘 浩¹

(1. 成都师范学院 数学学院, 成都 611130;

2. 成都师范学院 金融数字研究所, 成都 611130)

摘要: 研究了概率时滞脉冲金融系统平衡点的全局渐近稳定性问题.首先,通过定义合适的时滞分段区间上的随机变量,给出了概率时滞的脉冲金融系统的数学模型,根据脉冲微分不等式特点构造了一个简便合适的 Lyapunov 函数,利用脉冲微分不等式引理、控制脉冲间隔与脉冲量以及概率时滞分析技巧,获得了较大时滞允许范畴下的平衡点的全局指数稳定,并通过数值实例验证了方法的可行性以及概率时滞的优势.特别地,稳定性判定准则的时滞允许上限的增大,扩大了准则的实用性.

关键词: 概率时滞; 脉冲微分不等式; Lyapunov 函数; MATLAB LMI 工具箱

中图分类号: O175.13

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.400059

引 言

由生产子块、货币子块、证券子块和劳动力子块所组成的复杂金融系统模型^[1-2]的动力性分析研究表明,一定条件下该金融模型平衡点不稳定,甚至系统动力性态呈现混沌现象.而经济系统中出现混沌现象,意味着宏观经济运动本身具有内在的不稳定性,现实中金融系统的延迟反馈进一步加剧了这种不稳定性与复杂性^[3-5].事实上,动态的经济变量存在时滞,这是因为做出经济决策和决策发生效力之间存在着时间延迟,经济代理人被认为是理性的^[3-5].金融数学系统模型动力性研究的主要目的之一是研究经济系统的稳定性或全局稳定性措施(判断准则),为稳定实际金融问题提供一定的理论指导,而脉冲控制是处理实际工程中非线性稳定性问题的有效方法之一^[6-10].一方面,实际金融问题会遇到一些突发情况而导致金融指标和数据在突发时刻的脉冲式变化;另一方面,一些人为措施的投入或撤销同样会造成金融指标和数据的脉冲式改变.一定的脉冲间隔与脉冲量对系统动力性影响深刻,甚至会改变系统的稳定性.系统可能由稳定变成不稳定,也可由不稳定变为稳定.本文将研究一个概率时滞金融系统在合适的脉冲间隔与脉冲量控制下的全局指数稳定性.由于实际金融问题中,较大时滞发生的概率存在但比较小,而较小时滞发生的概率比较大,概率时滞模型较好地模拟了实际金融问题,同

* 收稿日期: 2019-02-25; 修订日期: 2019-02-28

作者简介: 阿子阿英(1997—),女,彝族(E-mail: ruopheng@hotmail.com);

饶若峰(1969—),男,教授(通讯作者. E-mail: ruofengrao@163.com);

赵锋(1995—),男(E-mail: rrf2@163.com);

黄鸿燕(1997—),女(E-mail: rrf2003@163.com);

王雪(1998—),女(E-mail: 2637214132@qq.com);

刘浩(1996—),男(E-mail: 1278891455@qq.com).

时,本文得到的金融系统稳定性判断准则的时滞范畴最大允许上限变大了,增加了本文结果的实用性.

1 预备知识

由生产子块、货币子块、证券子块和劳动力子块所组成的金融模型^[1-2]如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a)x, \\ \dot{y} = 1 - by - x^2, \\ \dot{z} = -x - cz, \end{cases} \quad (1)$$

其中 x 为利率; y 为投资需求; z 为价格指数; $a > 0$ 为储蓄量; $b > 0$ 为单位投资成本; c 为商品需求弹性.众所周知,当 $c - b - abc \leq 0$ 时,金融系统(1)存在唯一的平衡点 $M_0(0, 1/b, 0)$; 当 $c - b - abc > 0$ 时,金融系统(1)存在3个平衡点 $M_0(0, 1/b, 0)$, $M_{1,2}(\pm\sqrt{\theta_0}, (1+ac)/c, \mp\sqrt{\theta_0}/c)$, 其中 $\theta_0 = (c - b - abc)/c$.而这些平衡点的稳定性如下:

(A) 当 $c - b - abc \leq 0$ 时,作变量替换 $X = x, Y = y - 1/b, Z = z$, 则系统(1)变为

$$\begin{cases} \dot{X} = (1/b - a)X + Z + XY, \\ \dot{Y} = -bY - X^2, \\ \dot{Z} = -X - cZ. \end{cases} \quad (2)$$

经过变量代换,平衡点 M_0 变为 $(0, 0, 0)$.可以解出系统(2)所对应的线性化系统的特征方程

$$(\lambda + b)[\lambda^2 + (c + a - 1/b)\lambda + 1 + ac - c/b] = 0$$

的3个特征值之一 $\lambda_1 = -b$.而 λ_2 和 λ_3 要分4种情况:

情况1 $c - b - abc < 0, c + a - 1/b > 0$, 则 $\lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$, 从而 M_0 是稳定的汇.

情况2 $c - b - abc < 0, c + a - 1/b < 0$, 则 $\lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$, 从而 M_0 是鞍点.

情况3 $c - b - abc = 0$, 则 $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = -(c + a - 1/b)$, 而此时必须再分3种情况:

(i) 当 $c > 1$ 时, $\lambda_3 = -(c + a - 1/b) < 0$, 由中心流形定理知,平衡点 M_0 是稳定的;

(ii) 当 $0 < c < 1$ 时, $\lambda_3 = -(c + a - 1/b) > 0$, 平衡点 M_0 为非双曲的不稳定平衡点;

(iii) 当 $c = 1$ 时,由情况(i)和(ii)知,系统在平衡点 M_0 处发生分岔.

情况4 $c - b - abc < 0, c + a - 1/b = 0$, 则 $-1 < c < 1$, 从而 $\lambda_2 = i\sqrt{1 - c^2}, \lambda_3 = -i\sqrt{1 - c^2}$, 系统(1)在平衡点 M_0 发生 Hopf 分岔.

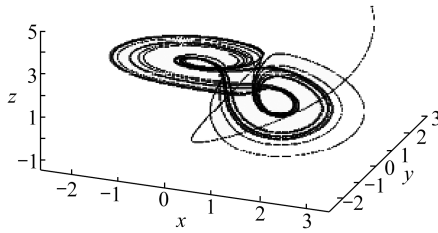
(B) 当 $c - b - abc = 0, 0 < c < 1$ 时, M_0 是不稳定平衡点; 当 $c - b - abc > 0$ 时, M_0 是稳定平衡点, 当 M_1, M_2 在参数满足 $bc^4 + b^2c^3 - 2ab^2c^2 + (2ab - 2 - 3b^2)c + 3b = 0$ 时, 系统(1)出现分岔, 是不稳定平衡点.取参数 $a = 0.9, b = 0.2, c = 1.2$, 初始条件为 $[3, 1, 5]$, $t \in [0, 10\ 000]$ 时, 得系统(1)的三维相图(图1).

文献[3]对系统(1)引入延迟反馈控制,在投资需求上增加一个时滞反馈项,得到以下新的系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a)x, \\ \dot{y} = 1 - by - x^2 + k_2(y - y(t - \tau_2)), \\ \dot{z} = -x - cz. \end{cases}$$

在此基础上,文献[4]在投资需求上增加一个时滞反馈:

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a)x + k_1(x - x(t - \tau_1)), \\ \dot{y} = 1 - by - x^2 + k_2(y - y(t - \tau_2)), \\ \dot{z} = -x - cz. \end{cases} \quad (3)$$

图1 系统(1)的相图 ($t \in [0, 10\ 000]$)Fig. 1 The phase diagram for system (1) ($t \in [0, 10\ 000]$)

我们知道当 $c - b - abc \leq 0$ 时, $M_0(0, 1/b, 0)$ 是金融系统(1)的一个平衡点. 本文将考虑价格指数也增加一个时滞反馈:

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a)x + k_1(x - x(t - \tau(t))), \\ \dot{y} = 1 - by - x^2 + k_2(y - y(t - \tau(t))), \\ \dot{z} = -x - cz + k_3(z - z(t - \tau(t))), \end{cases} \quad (4)$$

显然 M_0 也是系统(4)的平衡点. 考虑零点稳定性的传统习惯, 本文做线性变换:

$$\begin{cases} X_1 = x, \\ X_2 = y - 1/b, \\ X_3 = z. \end{cases} \quad (5)$$

于是将系统(4)转为

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = (1/b - a)X_1 + X_3 + X_1X_2 + k_1(X_1 - X_1(t - \tau(t))), \\ \dot{X}_2 = -bX_2 - X_1^2 + k_2(X_2 - X_2(t - \tau(t))), \\ \dot{X}_3 = -X_1 - cX_3 + k_3(X_3 - X_3(t - \tau(t))), \end{cases} \quad (6)$$

则系统(4)的平衡点 M_0 对应于系统(6)的平衡点 $o(0, 0, 0)$. 进一步地, 我们考虑概率时滞模型, 首先设 c_0 是一个非负常数, 时变时滞的概率分布为

$$\begin{cases} P(0 \leq \tau(t) \leq \tau_1) = c_0, \\ P(\tau_1 < \tau(t) \leq \tau_2) = 1 - c_0, \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\tau_2 = \tau$.

定义随机变量 \mathfrak{C} 如下:

$$\mathfrak{C}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \tau(t) \leq \tau_1, \\ 0, & \tau_1 < \tau(t) \leq \tau_2. \end{cases} \quad (8)$$

则引入如下概率时滞脉冲金融系统:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + f(X) + c_0K(X - X(t - \tau_1(t))) + \\ \quad (1 - c_0)K(X - X(t - \tau_2(t))) + (\mathfrak{C} - c_0)K(X(t - \tau_2(t)) - \\ \quad X(t - \tau_1(t))), \quad t \geq 0, t \neq t_k, \\ X(t_k^+) = B_k X(t_k^-) + \mathcal{N}h(X(t_k^- - \tau(t_k))), \quad t = t_k, k = 1, 2, \dots, \\ X(s) = \xi(s), \quad s \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T, 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty, \mathbf{X}(t_k^+) = \mathbf{X}(t_k)$, 以及

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/b - a & 0 & 1 \\ 0 & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{pmatrix}, \mathbf{f}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} X_1 X_2 \\ -X_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

引理 1^[10] 考虑微分不等式:

$$\begin{cases} D^+ v(t) \leq -av(t) + b[v(t)]_\tau, & t \neq t_k, \\ v(t_k) \leq a_k v(t_k^-) + b_k[v(t_k^-)]_\tau, \end{cases}$$

其中 $v(t) \geq 0, [v(t_k)]_\tau = \sup_{t-\tau \leq s \leq t} v(s), [v(t_k^-)]_\tau = \sup_{t-\tau \leq s < t} v(s), v(t)$ 是关于时间 t 连续的(除了脉冲时刻 $t_k, k = 1, 2, \dots$), 脉冲时刻 t_k 满足 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots$, 以及 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$. 假设

- 1) $a > b \geq 0$;
- 2) $t_k - t_{k-1} > \delta\tau$, 其中 $\delta > 1$, 并且存在常数 $\gamma > 0, M > 0$ 使得

$$\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{k+1} e^{k\lambda\tau} \leq M e^{\gamma t_k},$$

其中 $\rho_i = \max\{1, a_i + b_i e^{\lambda\tau}\}$, 而 $\lambda > 0$ 是方程 $\lambda = a - b e^{\lambda\tau}$ 的唯一解.

则

$$v(t) \leq M[v(0)]_\tau e^{-(\lambda-\gamma)t}.$$

并且, 若 $\theta = \sup_{k \in \mathbf{Z}} \{1, a_k + b_k e^{\lambda\tau}\}$, 则有

$$v(t) \leq \theta[v(0)]_\tau e^{-(\lambda - \ln(\theta e^{\lambda\tau})/(\delta\tau))t}, \quad t \geq 0.$$

下面介绍一些本文简便记法:

记 $|D| = (|d_{ij}|)_{n \times n}$, 其中 $D = (d_{ij})_{n \times n}$; 记 \mathbf{Z} 为全体正整数组成的集合; \mathbf{I} 是单位矩阵.

2 主要结果

定理 1 假设存在正定对角矩阵 \mathbf{H} 使得函数 \mathbf{h} 满足 $|\mathbf{h}(\mathbf{X})| \leq \mathbf{H}|\mathbf{X}|, \forall \mathbf{X} \in R^3$. 同时假设存在两个正数 m_1 和 m_2 使得

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\mathbf{A} - \mathbf{A}^T - 2\mathbf{K} & c_0\mathbf{K} & (1 - c_0)\mathbf{K} \\ & m_1\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & & m_2\mathbf{I} \end{pmatrix} > \mathbf{0}, \tag{10}$$

并且

(C1) $\lambda_{\min}(\Phi) > \lambda_{\max}[(m_1 + m_2)\mathbf{K}] \geq 0$;

(C2) 存在 $\delta > 1$, 使得 $\inf_{k \in \mathbf{Z}} (t_k - t_{k-1}) > \delta\tau, \delta^2\tau > \ln(\rho e^{\lambda\tau})$, 并且 $\lambda > \ln(\rho e^{\lambda\tau})/(\delta\tau)$,

其中 $\rho = \max_{j \in \mathbf{Z}} \{1, a_j + b_j e^{\lambda\tau}\}, a_j = \sup_j 2\lambda_{\max}(\mathbf{B}_j^T \mathbf{B}_j), b_j = \sup_j 2\lambda_{\max}(\mathbf{H}\mathbf{N}_j^T \mathbf{N}_j \mathbf{H}), \lambda > 0$ 是 $\lambda = a - b e^{\lambda\tau}$ 的唯一解, 其中 $a = \lambda_{\min}(\Phi), b = \lambda_{\max}[(m_1 + m_2)\mathbf{K}]$.

则系统(9)的零解是全局指数稳定的.

证明 设 Lyapunov 函数

$$V = \|\mathbf{X}\|^2.$$

利用 \mathbf{K} 是对角阵以及分量是标量和重要不等式 $-2xy \leq x^2 + y^2$, 有

$$\begin{aligned} D^+ V &= \mathbf{X}^T(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\mathbf{X} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{f}(\mathbf{X}) + 2c_0 \mathbf{X}^T \mathbf{K}(\mathbf{X} - \mathbf{X}(t - \tau_1(t))) + \\ & 2(1 - c_0) \mathbf{X}^T \mathbf{K}(\mathbf{X} - \mathbf{X}(t - \tau_2(t))) = \\ & \mathbf{X}^T(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T + 2\mathbf{K})\mathbf{X} - 2c_0 \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X}(t - \tau_1(t)) - \end{aligned}$$

$$2(1 - c_0) \mathbf{X}^T \mathbf{K} \mathbf{X}(t - \tau_2(t)). \quad (11)$$

设

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{X}(t - \tau_1(t)) \\ \mathbf{X}(t - \tau_2(t)) \end{pmatrix},$$

则有

$$\begin{aligned} D^+ V = & -\boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\zeta} + m_1 \mathbf{X}^T(t - \tau_1(t)) \mathbf{X}(t - \tau_1(t)) + m_2 \mathbf{X}^T(t - \tau_2(t)) \mathbf{X}(t - \tau_2(t)) \leq \\ & -\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\zeta}) + (m_1 + m_2) [V(t)]_{\tau} \leq \\ & -\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Phi}) V(t) + (m_1 + m_2) [V(t)]_{\tau}. \end{aligned} \quad (12)$$

另一方面,有

$$\begin{aligned} V(t_k) = & \mathbf{X}^T(t_k) \mathbf{X}(t_k) = \\ & [\mathbf{B}_k \mathbf{X}(t_k^-) + \mathcal{M}(\mathbf{X}(t_k^- - \tau(t_k)))]^T [\mathbf{B}_k \mathbf{X}(t_k^-) + \mathcal{M}(\mathbf{X}(t_k^- - \tau(t_k)))] \leq \\ & 2\lambda_{\max}(\mathbf{B}_k^T \mathbf{B}_k) V(t_k) + 2\lambda_{\max}(\mathbf{H} \mathbf{N}_k^T \mathbf{N}_k \mathbf{H}) [V(t_k)]_{\tau} = \\ & a_k V(t_k^-) + b_k [V(t_k^-)]_{\tau}. \end{aligned} \quad (13)$$

由条件(C2)不难得到 $\rho^{k+1} e^{k\lambda\tau} < \rho e^{\delta(t_k - t_0)}$, 从而由脉冲微分不等式有

$$\|\mathbf{X}\|^2 \leq \rho \|\mathbf{X}\|_{\tau}^2 e^{(\lambda - \ln(\rho e^{\lambda\tau}) / (\delta\tau))(t - t_0)}, \quad t \geq t_0 = 0.$$

这就证明了系统(9)的零解是全局指数稳定的.

3 例子

例1 在系统(9)中, 设 $a = 1.2, b = 0.95, c = 0.2, c_0 = 0.95, \tau_1 = 0.5, \delta = 1.5881,$

$\inf_{k \in \mathbf{Z}}(t_k - t_{k-1}) = 1.2, \tau = 0.75,$

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0.03 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} 0.0021 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0011 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0012 \end{pmatrix}, \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0.035 & 0 & 0 \\ 0 & 0.015 & 0 \\ 0 & 0 & 0.025 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.1474 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ -1 & 0 & -0.2 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} 0.2248 & 0 & 0 & 0.0333 & 0 & 0 & 0.0018 & 0 & 0 \\ 0 & 0.97 & 0 & 0 & 0.0142 & 0 & 0 & 0.00075 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 & 0 & 0 & 0.0238 & 0 & 0 & 0.00125 \\ 0.0333 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0142 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0238 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0018 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00075 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}.$$

利用上述数据对线性矩阵不等式(10)运行计算机 MATLAB LMI 工具箱,可得 $m_1 = 0.1, m_2 = 0.2$, 以及 $a = \lambda_{\min}(\Phi) = 0.0917$, $b = (m_1 + m_2)\lambda_{\max}(K) = 0.0105$, 从而 $a > b > 0$. 条件(C1)满足. 进一步求解 $\lambda = a - be^{\lambda\tau}$ 得 $\lambda = 0.0808$. 经计算 $\rho = 1$, 从而容易验证 $\inf_{k \in \mathbb{Z}}(t_k - t_{k-1}) > \delta\tau, \delta^2\tau > \ln(\rho e^{\lambda\tau})$, 并且 $\lambda = 0.0808 > 0.0509 = \ln(\rho e^{\lambda\tau})/(\delta\tau)$. 即条件(C2)也满足. 从而由定理1知, 系统(9)的零解是全局指数稳定的.

4 结束语

受文献[6-17]中一些方法和技巧的启发, 本文研究了一类具概率时滞的复杂金融系统的动力分析, 通过控制脉冲间隔与脉冲量以及概率时滞分析技巧, 获得了较大时滞允许范畴下的平衡点的全局指数稳定, 并通过数值实例验证了方法的可行性. 特别是金融数学模型(1)的平衡点 M_0 对应于时滞系统(6)的原点, 由于参数 k_1, k_2, k_3 的缘故, 通常系统(6)的原点未必是全局稳定, 但本文通过控制脉冲量与保持一定的脉冲间隔, 能够使复杂金融系统平衡点达到全局指数稳定, 这对实际问题具有一定理论上的指导意义. 即政府或银行等部门可以采用一系列措施增加或减少投入, 造成脉冲时刻某些金融指标的脉冲式改变, 并控制脉冲间隔和脉冲量, 使经济系统达到渐近稳定.

致谢 本文作者衷心感谢成都师范学院 2018 年国家级大学生创新创业训练计划项目(201814389083); 成都师范学院 2019 年国家级大学生创新创业训练计划项目(201914389037)对本文的资助.

参考文献 (References):

- [1] 马军海, 陈予恕. 一类非线性金融系统分岔混沌拓扑结构与全局复杂性研究(I)[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(11): 1119-1128. (MA Junhai, CHEN Yushu. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system(I)[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, 22(11): 1119-1128. (in Chinese))
- [2] 马军海, 陈予恕. 一类非线性金融系统分岔混沌拓扑结构与全局复杂性研究(II)[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(12): 1236-1242. (MA Junhai, CHEN Yushu. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of non-linear finance system(II)[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, 22(12): 1236-1242. (in Chinese))
- [3] ZHANG R Y. Bifurcation analysis for a kind of nonlinear finance system with delayed feedback and its application to control of chaos[J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, 2012: 316390.
- [4] PYRAGAS K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback[J]. *Physics Letters A*, 1992, 170(6): 421-429.
- [5] CHEN W C. Dynamics and control of a financial system with time-delayed feedbacks[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2008, 37(4): 1198-1207.
- [6] 姚洪兴, 潘虹, 齐丽丽. 一类含脉冲延迟反馈金融系统的稳定性分析[J]. 江苏大学学报(自然科学版), 2011, 32(2): 241-244. (YAO Hongxing, PAN Hong, QI Lili. Global exponential stability of a financial system with impulses and time-delayed feedbacks[J]. *Journal of Jiangsu University(Science Edition)*, 2011, 32(2): 241-244. (in Chinese))
- [7] RAO R F, ZHONG S M, WANG X R. Delay-dependent exponential stability for Markovian jumping stochastic Cohen-Grossberg neural networks with p -Laplace diffusion and partially

- known transition rates via a differential inequality [J]. *Advances in Difference Equations*, 2013, **2013**: 183.
- [8] SONG Q K, YAN H, ZHAO Z J, et al. Global exponential stability of impulsive complex-valued neural networks with both asynchronous time-varying and continuously distributed delays [J]. *Neural Networks*, 2016, **81**: 1-10.
- [9] WANG L M, SONG Q K, LIU Y R, et al. Global asymptotic stability of impulsive fractional-order complex-valued neural networks with time delay [J]. *Neurocomputing*, 2017, **243**: 49-59.
- [10] 岳东, 许世范, 刘永清. 脉冲时滞微分不等式及鲁棒控制设计中的应用 [J]. 控制理论与应用, 1999, **16**(4): 519-524. (YUE Dong, XU Shifan, LIU Yongqing. Differential inequality with delay and impulse and its applications to design robust control [J]. *Control Theory Applications*, 1999, **16**(4): 519-524. (in Chinese))
- [11] 张磊, 宋乾坤. 带有比例时滞的复值神经网络全局指数稳定性 [J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(5): 584-591. (ZHANG Lei, SONG Qiankun. Global exponential stability of complex-valued neural networks with proportional delays [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(5): 584-591. (in Chinese))
- [12] 舒含奇, 宋乾坤. 带有时滞的 Clifford 值神经网络的全局指数稳定性 [J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(5): 513-525. (SHU Hanqi, SONG Qiankun. Global stability of Clifford-valued recurrent neural networks with mixed time-varying delays [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(5): 513-525. (in Chinese))
- [13] ZHANG X H, WU S L, LI K L. Delay-dependent exponential stability for impulsive Cohen-Grossberg neural networks with time-varying delays and reaction-diffusion terms [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, **16**(3): 1524-1532.
- [14] 黎克麟, 曾意. 具有多滞后的区间非线性 Lurie 控制系统的鲁棒绝对稳定性 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2007, **30**(1): 27-30. (LI Kelin, ZENG Yi. Robust absolute stability of interval nonlinear Lurie control systems with multi-delay [J]. *Journal of Sichuan Normal University (Natural Science)*, 2007, **30**(1): 27-30. (in Chinese))
- [15] LI K L, ZHANG X H, LI Z A. Global exponential stability of impulsive cellular neural networks with time-varying and distributed delay [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2009, **41**(3): 1427-1434.
- [16] 曾德强, 吴开腾, 宋乾坤, 等. 时滞神经网络随机抽样控制的状态估计 [J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(7): 821-832. (ZENG Deqiang, WU Kaiteng, SONG Qiankun, et al. State estimation for delayed neural networks with stochastic sampled-data control [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(7): 821-832. (in Chinese))
- [17] RAO Ruofeng. Global stability of a Markovian jumping chaotic financial system with partially unknown transition rates under impulsive control involved in the positive interest rate [J]. *Mathematics*, 2019, **7**(7): 579.

Impulse Control of Financial Systems With Probabilistic Delay Feedback

AZI Aying¹, RAO Ruofeng^{1,2}, ZHAO Feng¹,
HUANG Hongyan¹, WANG Xue¹, LIU Hao¹

(1. *Department of Mathematics, Chengdu Normal University,*
Chengdu 611130, P.R.China;

2. *Institute of Financial Mathematics, Chengdu Normal University,*
Chengdu 611130, P.R.China)

Abstract: The global asymptotic stability of equilibrium points of impulsive financial systems with probabilistic delays was studied. Firstly, through definition of the random variables on the appropriate time-delay intervals, the mathematical model for the impulsive financial system with probabilistic time delay was given. According to the characteristics of impulsive differential inequalities, a simple and suitable Lyapunov function was constructed. By means of the impulsive differential inequality lemma, the technique of controlling impulse interval & impulse quantity and the probabilistic time delay analysis, the global exponential stability of the equilibrium point in the permissible category of large delays was obtained. Finally, the feasibility of the proposed method and the advantages of probabilistic delay were verified with a numerical example. In particular, the increase of the time delay allowable upper limit to the stability criterion enlarges the practicability of the criterion.

Key words: probabilistic delay; impulsive differential inequality; Lyapunov function; MATLAB LMI toolbox

引用本文/Cite this paper:

阿子阿英, 饶若峰, 赵锋, 黄鸿燕, 王雪, 刘浩. 具概率延迟反馈金融系统的脉冲控制[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(12): 1409-1416.

AZI Aying, RAO Ruofeng, ZHAO Feng, HUANG Hongyan, WANG Xue, LIU Hao. Impulse control of financial systems with probabilistic delay feedback[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, 40(12): 1409-1416.