

# 基于事件触发控制带有多时变时滞的主从系统同步\*

周 军<sup>1</sup>, 童东兵<sup>1</sup>, 陈巧玉<sup>2</sup>

(1. 上海工程技术大学 电子电气工程学院, 上海 201620;  
2. 上海立信会计金融学院 统计与数学学院, 上海 201620)

**摘要:** 研究了基于事件触发机制下带有多时变时滞的主从系统同步问题.事件触发机制的提出,使得在实现主从系统同步的过程中,可以有效降低数据传输量,减轻网络带宽的压力.通过 Lyapunov 稳定理论和线性矩阵不等式的方法,得到了带有多时变时滞的主从系统同步的充分条件.最后,通过 MATLAB 仿真,验证了所提出同步准则的有效性.

**关键词:** 主从系统; 多时变时滞; 同步; 事件触发机制

**中图分类号:** O175.13

**文献标志码:** A

**DOI:** 10.21656/1000-0887.400152

## 引 言

在许多实际工程应用中,时间延迟经常是不可避免的.这些延迟可能会降低控制系统的性能,甚至会破坏系统的稳定性.因此,时滞系统的稳定性问题具有重要实际意义,并且几十年来引起了人们的极大兴趣.关于时滞系统稳定性问题的研究有很多,例如,常数延迟<sup>[1-2]</sup>、时变延迟<sup>[3-4]</sup>、恒定时滞和参数不确定性<sup>[5]</sup>、时变时滞和参数不确定性<sup>[6-7]</sup>、分布时滞<sup>[8]</sup>等.但是很多系统的时滞不止一个或者时滞不是一个固定的值,这使得很难去消除这些时滞所带来的影响.本文考虑了多个时滞,并且这些时滞都是时变的,这能够有效解决实际应用中时滞所带来的影响.

同步是主从系统中一个重要的研究课题,人们提出了各类动态网络同步方法,包括固定同步<sup>[9]</sup>、采样数据同步<sup>[10]</sup>、脉冲同步<sup>[11]</sup>、自适应同步<sup>[12]</sup>、分布式同步<sup>[13]</sup>、修正影像同步<sup>[14]</sup>.在一些工程应用中,为了能获得更高的工作效率,需要使系统尽快获得同步,并保持高效的同步性.目前,已经有多种方法可以实现同步控制,并取得了很好的控制效果.如文献[15]提出了一种用于无线传感器网络的节能时钟同步方案,可以实现同步一组传感器节点而不发送任何额外的消息.文献[16]提出了使用新颖的同步链路来补偿时间、相位和空间同步误差.本文为了能够在同步过程中有效降低数据传输量,提高同步效率,提出了基于事件触发机制下实现主从多时变时滞系统同步的准则.

\* 收稿日期: 2019-04-26

**基金项目:** 国家自然科学基金(61673257;11501367);中国博士后科学基金(2019M661322)

**作者简介:** 周军(1995—),男,硕士生(E-mail: zhoujun3@126.com);

童东兵(1979—),男,副教授,博士(通讯作者. E-mail: tongdongbing@163.com);

陈巧玉(1984—),女,讲师,博士(E-mail: goodluckqiaoyu@126.com).

在大多数的同步研究中,所设计的系统控制器都是采用等时间间隔采样或者采用基于时间触发采样的方式来进行信息交互.这些方式可能会导致在通信过程中传输一些不必要的信息,给网络负载带来巨大的压力.因此,提出了一种事件触发机制来解决这些缺点和问题.与传统的采样方案相比,事件触发机制通常只需要很少的信息被传输,因为只有当采样数据满足触发条件时才会通过通信通道进行数据交互.利用这种机制,能够极大地降低数据传输量,减轻网络带宽传输压力.

本文研究了在事件触发机制下带有多时变时滞的主从系统同步的问题.图 1 是系统的工作示意图.数据是否需要传输到控制器是由预定义的事件触发机制来决定的.如果满足触发条件,则立即将当前的采样数据释放到通信通道并传输到控制器;如果不满足触发条件,则控制器的数据将保持不变,直到新的触发信号到来.本文的创新如下:

- 1) 本文所构建的系统模型与文献[12, 17-19]中相比,更具有普遍性,适用于多种不同的系统,例如神经网络、复杂网络、Boole 网络等.
- 2) 在实现同步的过程中,加入了事件触发机制,与传统的同步方法相比,不仅可以快速实现同步,而且能够有效降低网络数据传输量、减少网络传输损耗和减轻网络负载压力.
- 3) 在设计主从同步系统时,考虑了在实际同步过程中的传输时滞,并将其设为多个不同的时变时滞.这些时滞可以根据不同的实际情况而改变,更加符合工程实际.

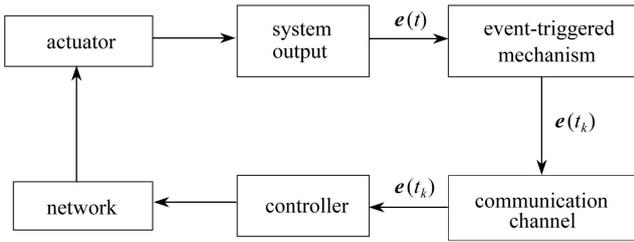


图 1 主从线性系统的控制图

Fig. 1 The control chart for the master-slave linear system

## 1 问题描述

考虑如下的主系统动态模型:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t - d_i(t)), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x}(t) \in R^n$  和  $\mathbf{y}(t) \in R^l$  分别是状态向量和输出向量,  $d_i(t)$  是时变时滞, 这些时变时滞满足  $0 \leq d_i(t) \leq d_M, \dot{d}_i(t) \leq \mu, d_M$  和  $\mu$  是常量.

从系统的动态模型可表示为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}(t - d_i(t)) + \mathbf{u}(t), \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  和  $\hat{\mathbf{y}}(t) \in R^l$  是从系统的状态向量和输出向量,  $\mathbf{u}(t) \in R^n$  是控制器.

将同步误差信号定义为  $\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$ . 因此, 可以获得如下的误差系统:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{e}(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \mathbf{e}(t - d_i(t)) + \mathbf{u}(t). \quad (3)$$

为便于分析,需要对主从系统的输出进行采样.主从系统在采样时刻的输出信号被定义为  $y(t) = y(t_k)$  和  $\hat{y}(t) = \hat{y}(t_k)$ , 其中  $t \in [t_k, t_{k+1}), k \in \mathbf{N}$ . 所以, 采样时刻主从系统的输出为

$$\bar{p}(t_k) = \hat{y}(t_k) - y(t_k) = \mathbf{C}e(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \quad (4)$$

是否需要将采样到的数据  $\bar{p}(t_k)$  发送到从系统的控制器中是由事件触发机制来决定的. 只有满足触发条件的数据才会被传输到控制器. 若不满足触发条件, 则不被传输, 且控制器的数据保持不变, 直到下一个满足触发条件的采样数据被传输到控制器, 此时控制器的数据才被更新. 本文中的事件触发机制设计如下:

$$(e(t_{k+j}) - e(t_k))^T \mathbf{C}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{C} (e(t_{k+j}) - e(t_k)) < \varsigma e^T(t_k) \mathbf{C}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{C} e(t_k), \quad (5)$$

其中矩阵  $\mathbf{\Omega} > \mathbf{0}, \varsigma \in [0, 1)$  是触发参数,  $\bar{p}(t_k)$  只有在满足不等式(5)的情况下才会被传输.

**注1** 当满足事件触发机制时, 数据信息将被传输到控制器, 随后控制器的数据信息更新, 否则将不传输数据信息.  $\varsigma$  在一定程度上可以决定事件触发机制的触发次数.  $\varsigma$  越大, 系统对于同步误差容忍度越高, 两次触发之间的间隔时间也就越长. 当  $\varsigma = 0$  时, 所有采样数据都不会被传输. 事件触发机制(5)不工作, 没有数据信息将被传输到控制器. 即此时的控制器只有一个恒定的初始值. 当  $\varsigma \neq 0$  时, 事件触发机制正常工作, 采样数据将在机制(5)内进行分析 and 判断, 然后选择相应的采样数据传输到控制器.

从系统中的控制器可以被设计为如下形式:

$$u(t) = u(t_k) = \mathbf{K} \mathbf{C} e(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+j}). \quad (6)$$

**注2** 从式(4)和(6)可以看出, 主从系统的所有采样数据输出都用于设计控制器. 因此, 这种设计方法比文献[20]中单纯依靠主系统或从系统的输出采样更加有效.

基于式(6), 同步误差系统(3)可以被写出这种形式:

$$\dot{e}(t) = \mathbf{A}e(t) + \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i e(t - d_i(t)) + \mathbf{K} \mathbf{C} e(t_k). \quad (7)$$

为了获得主从系统同步的充分条件, 需要给出以下引理.

**引理1** (Jensen 积分不等式)<sup>[21]</sup> 对于任意的常量矩阵  $\mathbf{D} > \mathbf{0}$ , 任意的标量  $a$  和  $b$ , 其中满足  $a < b$ , 存在向量函数  $\psi(s): [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ , 均有下面的不等式成立:

$$\left\langle \int_a^b \psi(s) ds, \mathbf{D} \int_a^b \psi(s) ds \right\rangle \leq (b - a) \int_a^b \psi^T(s) \mathbf{D} \psi(s) ds.$$

**引理2**<sup>[20]</sup> 对于向量  $\mathbf{Q} > \mathbf{0}, \mathbf{Y}$  和任意的向量  $\iota$ , 有不等式  $-\mathbf{Y} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Y} \leq \iota^2 \mathbf{Q} - 2\iota \mathbf{Y}$  成立.

## 2 主从系统同步证明

在这一节中, 将给出一个使基于事件触发机制带有多个时变时滞的主从系统达到同步的准则.

**定理1** 对于给定的标量  $\varsigma$ , 反馈增益  $\mathbf{K}$  和矩阵  $\mathbf{\Omega} > \mathbf{0}$ , 如果存在适当维度的正定矩阵  $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}_i, \mathbf{W}_i, i = 1, 2, \dots, N$ , 满足如下不等式:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{P} \mathbf{K} \mathbf{C} & \mathbf{H}_{13} & \mathbf{A}_0 \\ & -\mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{K} \mathbf{C} \\ & & \mathbf{H}_{33} & \tilde{\mathbf{A}} \\ * & & & \mathbf{H}_{44} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} &= [\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N]^T, \quad \mathbf{\Pi}_{11} = \mathbf{A}_0^T \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^N (\mathbf{Q}_i - \mathbf{W}_i), \\ \mathbf{\Pi}_{13} &= [\mathbf{A}_1 \mathbf{P} + \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{A}_N \mathbf{P} + \mathbf{W}_N], \quad \mathbf{v}_{ii} = -(1 - \mu_i) \mathbf{Q}_i - \mathbf{W}_i, \\ \mathbf{\Pi}_{44} &= - \sum_{i=1}^N \frac{1}{d_M^2 \mathbf{W}_i}, \\ \mathbf{\Pi}_{33} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{11} & & & \\ & \mathbf{v}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{v}_{NN} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

那么,具有事件触发条件(5)的误差系统(7)是渐近稳定的.

**证明** 构造一个如下的 Lyapunov 泛函:

$$\begin{aligned}V(x_t) &= \mathbf{e}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}(t) + \int_{t-t_k}^t \mathbf{e}^T(t-s) \mathbf{R} \mathbf{e}(t-s) ds + \\ &\quad \sum_{i=1}^N \int_{t-d_i(t)}^t \mathbf{e}^T(s) \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(s) ds + \sum_{i=1}^N d_M \int_{-d_M(t)}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\mathbf{e}}^T(s) \mathbf{W}_i \dot{\mathbf{e}}(s) ds d\theta.\end{aligned}\quad (9)$$

基于误差系统(7),让所构造的 Lyapunov 泛函对  $t$  进行求导可得

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t) &= \dot{\mathbf{e}}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}(t) + \mathbf{e}^T(t) \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}}(t) - \mathbf{e}^T(t_k) \mathbf{R} \mathbf{e}(t_k) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N \mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(t) - \sum_{i=1}^N (1 - \mu_i) \mathbf{e}^T(t - d_i(t)) \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(t - d_i(t)) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N d_M \int_{-d_i}^0 \dot{\mathbf{e}}^T(t) \mathbf{W}_i \dot{\mathbf{e}}(t) d\theta - \sum_{i=1}^N d_M \int_{-d_i}^0 \dot{\mathbf{e}}^T(t + \theta) \mathbf{W}_i \dot{\mathbf{e}}(t + \theta) d\theta = \\ &\quad 2\dot{\mathbf{e}}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}^T(t_k) \mathbf{R} \mathbf{e}(t_k) + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(t) - \\ &\quad \sum_{i=1}^N (1 - \mu_i) \mathbf{e}^T(t - d_i(t)) \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(t - d_i(t)) + \sum_{i=1}^N d_M^2 \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{W}_i \dot{\mathbf{e}}(t) - \\ &\quad \sum_{i=1}^N d_M \int_{-d_M}^0 \dot{\mathbf{e}}^T(t + \theta) \mathbf{W}_i \dot{\mathbf{e}}(t + \theta) d\theta.\end{aligned}\quad (10)$$

由引理 1,对于每个  $1 \leq i \leq N$ ,可以得到

$$\begin{aligned}-d_M \int_{-d_M}^0 \dot{\mathbf{e}}^T(t + \theta) \mathbf{W}_i \dot{\mathbf{e}}(t + \theta) d\theta \leq \\ - \left\langle \int_{-d_i}^0 \dot{\mathbf{e}}(t + \theta) d\theta, \mathbf{W}_i \int_{-d_i}^0 \dot{\mathbf{e}}(t + \theta) d\theta \right\rangle = \\ - (\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t - d_i(t)))^T \mathbf{W}_i (\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t - d_i(t))).\end{aligned}\quad (11)$$

将式(11)代入到式(10),可以得到

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t) &= 2\dot{\mathbf{e}}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}^T(t_k) \mathbf{R} \mathbf{e}(t_k) + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(t) - \\ &\quad \sum_{i=1}^N (1 - \mu_i) \mathbf{e}^T(t - d_i(t)) \mathbf{Q}_i \mathbf{e}(t - d_i(t)) + \\ &\quad \sum_{i=1}^N d_M^2 \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{W}_i \dot{\mathbf{e}}(t) - \sum_{i=1}^N (\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t - d_i(t)))^T \mathbf{W}_i (\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t - d_i(t))) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\dot{\mathbf{e}}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}^T(t_k)\mathbf{R}\mathbf{e}(t_k) + \sum_{i=1}^N \mathbf{e}^T(t)\mathbf{Q}_i\mathbf{e}(t) - \\
 &\sum_{i=1}^N (1 - \mu_i)\mathbf{e}^T(t - d_i(t))\mathbf{Q}_i\mathbf{e}(t - d_i(t)) + \sum_{i=1}^N d_M^2 \dot{\mathbf{e}}^T\mathbf{W}_i\dot{\mathbf{e}}(t) - \\
 &\sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{e}(t - d_i(t)) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{W}_i & -\mathbf{W}_i \\ * & \mathbf{W}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{e}(t - d_i(t)) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta}^T(t)\mathbf{G}\boldsymbol{\eta}(t), \tag{12}
 \end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{\eta}(t) = [\mathbf{e}^T(t), \mathbf{e}^T(t_k), \mathbf{e}^T(t - d_1), \dots, \mathbf{e}^T(t - d_N)]^T.$$

由于  $\mathbf{G} < \mathbf{0}$ , 可以得出  $\dot{\mathbf{V}}(t) < \mathbf{0}$ , 所以误差系统(7)是渐近稳定的. 证明结束.

**注3** 在定理1中,  $\mathbf{PKC}$  包含在式(8)中, 这无法直接通过线性矩阵不等式工具箱(LMI)得到最优解. 为了解决这个问题, 需要对定理1进行一些优化. 换句话说, 为了更容易地获得最优解, 需要让  $\mathbf{K} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Y}$ . 通过这种方式, 可以将  $\mathbf{PKC}$  简化为  $\mathbf{YC}$ . 这将有助于通过解 LMI 获得最优解.

在定理1的基础上, 可以更方便地获得使基于事件触发机制带有多个时变时滞的主从系统达到同步的准则.

**定理2** 对于给定的标量  $\varsigma$ , 反馈增益  $\mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{P}^{-1}$ , 和矩阵  $\boldsymbol{\Omega} > \mathbf{0}$ , 如果存在适当维度的正定矩阵  $\mathbf{P} > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{R} > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Q}_i > \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{W}_i > \mathbf{0}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , 满足以下不等式:

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{II}_{11} & \mathbf{YC} & \mathbf{II}_{13} & d_M^2\mathbf{A}\mathbf{P} \\ & -\mathbf{R} & \mathbf{0} & d_M^2\mathbf{Y}\mathbf{C} \\ & & \mathbf{II}_{33} & \hat{\mathbf{A}} \\ * & & & d_M^2\hat{\mathbf{H}}_{44} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{A}} &= [d_M^2\mathbf{A}_1\mathbf{P}, \dots, d_M^2\mathbf{A}_N\mathbf{P}]^T, \quad \mathbf{II}_{11} = \mathbf{A}_0^T\mathbf{P} + \mathbf{P}^T\mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^N (\mathbf{Q}_i - \mathbf{W}_i), \\
 \mathbf{II}_{13} &= [\mathbf{A}_1\mathbf{P} + \mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{A}_N\mathbf{P} + \mathbf{W}_N], \quad \mathbf{II}_{33} = \text{diag}\{\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{22}, \dots, \mathbf{v}_{NN}\}, \\
 \mathbf{v}_{ii} &= -(1 - \mu_i)\mathbf{Q}_i - \mathbf{W}_i, \quad \hat{\mathbf{H}}_{44} = -2\mathbf{N}\mathbf{P} + \sum_{i=1}^N \mathbf{W}_i.
 \end{aligned}$$

那么, 具有事件触发条件(5)的误差系统(7)是渐近稳定的.

**证明** 通过 Schur 引理和定理1,  $\mathbf{G} < \mathbf{0}$  可以改写为

$$\mathbf{E}_r + d_M^2\check{\mathbf{A}}^T \sum_{i=1}^N \mathbf{W}_i\check{\mathbf{A}} < \mathbf{0}, \tag{14}$$

其中  $\check{\mathbf{A}} = [\mathbf{A}_0, \mathbf{K}\mathbf{C}, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_N]^T$ . 式(14)等价于

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \boldsymbol{\Psi}_{11} \\ * & \boldsymbol{\Psi}_{22} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_r &= \begin{bmatrix} \mathbf{II}_{11} & \mathbf{PKC} & \mathbf{II}_{13} \\ & -\mathbf{R} & \mathbf{0} \\ * & & \mathbf{II}_{33} \end{bmatrix}, \\
 \boldsymbol{\Psi}_{11} &= [d_M^2\mathbf{A}, d_M^2\mathbf{K}\mathbf{C}, d_M^2\mathbf{A}_1, \dots, d_M^2\mathbf{A}_N]^T, \quad \boldsymbol{\Psi}_{22} = -d_M^2 \sum_{i=1}^N \mathbf{W}_i^{-1}.
 \end{aligned}$$

然后,对式(15)前乘后乘  $\bar{\Gamma} = \text{diag}\{\mathbf{I}, \mathbf{P}\}$ , 可以得到

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{11} & \mathbf{Y}\mathbf{C} & \mathbf{\Pi}_{12} & d_M^2 \mathbf{A}_0 \mathbf{P} \\ & -\mathbf{R} & \mathbf{0} & d_M^2 \mathbf{Y}\mathbf{C} \\ & & \mathbf{\Pi}_{33} & \hat{\mathbf{A}} \\ * & & & \mathbf{P}\Psi_{22}\mathbf{P} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{A}} = [d_M^2 \mathbf{A}_1 \mathbf{P}, \dots, d_M^2 \mathbf{A}_N \mathbf{P}]^T. \quad (16)$$

由引理 2, 可以得到

$$-\mathbf{P} \sum_{i=1}^N \mathbf{W}_i^{-1} \mathbf{P} \leq -2\mathbf{N}\mathbf{P} + \sum_{i=1}^N \mathbf{W}_i, \quad (17)$$

所以, 将式(17)代入式(16)中, 可获得式(13), 证明结束.

**注 4** 在本文中, 研究了基于事件触发机制的多时变时滞主从系统的同步问题. 构造了相应的动态微分方程模型来描述主从系统, 然后在事件触发机制下获得主从系统同步的充分条件. 由于事件触发机制的存在, 大大降低了在同步过程中的数据信息量. 这给很多实际工程应用带来极大的便利. 在未来的研究中, 笔者将把这个结果扩展到其他现有网络研究中.

### 3 仿 真

为了验证本文所提出的方法的有效性, 给出如下的仿真.

在这里, 设计一个带有两个时变时滞项的主系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t - d_1(t)) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t - d_2(t)), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -18 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0.6 \\ -0.4 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.6 \\ -0.6 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1.2 & -0.2 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}, d_1 = \frac{7}{4} \sin\left(\frac{2}{38}t\right) + \frac{7}{4}, d_2 = \sin(0.8t) + 4.$$

带有两个时变时滞项的从系统如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_0 \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}(t - d_1(t)) + \mathbf{A}_2 \hat{\mathbf{x}}(t - d_2(t)) + \mathbf{u}(t), \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t). \end{cases} \quad (19)$$

选择参数  $\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 13.846 & 1 & 0.361 & 1 \\ 0.361 & 1 & 6.162 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $\varsigma = 0.85$ , 利用 MATLAB 的 LMI 工具箱, 对式(13)进行求解, 可以得到如下的最优解:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3.769 & 0 & 0.088 & 7 \\ 0.087 & 7 & 4.237 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.464 & 8 & -0.002 & 0 \\ -0.002 & 0 & 0.459 & 4 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 5.282 & 2 & 0.093 & 7 \\ 0.093 & 7 & 5.327 & 8 \end{bmatrix}, \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 5.534 & 7 & -0.086 & 8 \\ -0.086 & 8 & 5.585 & 9 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1.751 & 6 & 0.032 & 7 \\ 0.032 & 7 & 1.946 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 4.025 & 9 & -0.012 & 9 \\ -0.012 & 9 & 3.980 & 6 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 0.556 & 1 & -0.123 & 0 \\ -0.123 & 0 & 0.554 & 8 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 0.191 & 9 & 0.126 & 9 \\ 0.126 & 9 & 0.198 & 7 \end{bmatrix}.$$

通过验证, 以上的参数满足定理 1 和定理 2 所给出的条件. 系统仿真图如图 2、3 所示. 图 2

表示的是事件触发机制(5)下的触发时间间隔,其中,纵坐标表示信息传输过程中两个相邻控制信号更新之间的间隔.纵坐标值越大,两次相邻触发之间的间隔时间越长,即控制信号更新所需要的时间越长.因此,从图2中可以看出,在基于事件触发机制下的主从系统同步过程中,需要传输的信号是显著减少的.这有效地降低了网络通信的压力.图3给出了主从系统的状态轨迹.误差系统的状态如图4所示,可以看出系统逐渐稳定,即主从系统保持同步状态.

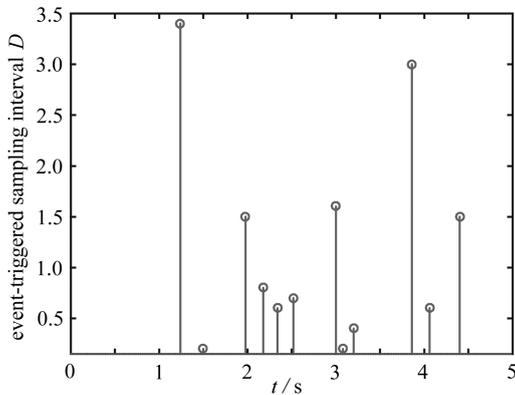


图2 在事件触发机制下释放采样信息时间间隔

Fig. 2 Release time intervals under the event-triggered control

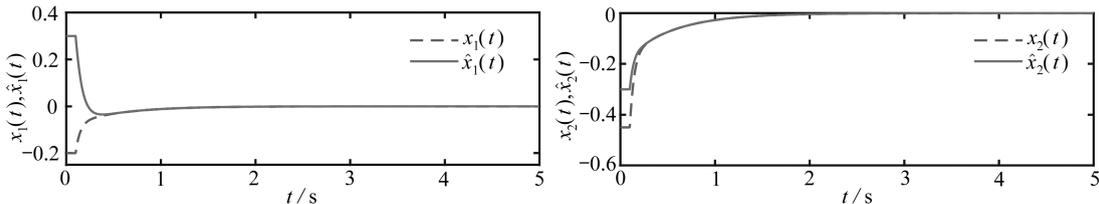


图3 主从系统的状态轨迹

Fig. 3 The master-slave system state trajectories

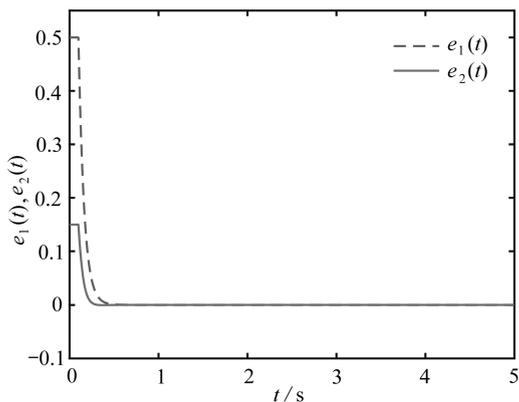


图4 误差系统的状态轨迹

Fig. 4 The error system state trajectories

## 4 结 论

本文针对主从时滞系统的同步问题,设计了一种基于事件触发机制的同步控制器,并基于Lyapunov 稳定理论,给出了能够使主从系统达到同步的充分条件.所提出的事件触发机制不仅

可以使主从系统快速达到同步,而且有效地减少了数据信息在通信通道内的传输,极大地降低了数据传输量,减轻网络带宽压力.同时,考虑到了在数据传输过程中的时变时滞,这使得系统更加满足实际需要,提高了该系统的实用性.最后,通过 MATLAB 仿真,验证了所提出方法的有效性.

**致谢** 本文作者衷心感谢上海工程技术大学研究生科研创新项目(17KY0209)对本文的资助.

#### 参考文献(References):

- [1] WU F, SUN Y, YANG Y, et al. Constant-delay and constant-feedback moving window network coding for wireless multicast: design and asymptotic analysis[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2015, **33**(2): 127-140.
- [2] PEKAŘ L, GAO Q B. Spectrum analysis of LTI continuous-time systems with constant delays: a literature overview of some recent results[J]. *IEEE Access*, 2018, **6**: 35457-35491.
- [3] KIM J H. Delay-dependent robust  $H_\infty$  filtering for uncertain discrete-time singular systems with interval time-varying delay[J]. *Automatica*, 2010, **46**(3): 591-597.
- [4] MAZENC F, NICULESCU S I, BEKAIK M. Stabilization of time-varying nonlinear systems with distributed input delay by feedback of plant's state[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(1): 264-269.
- [5] RERN S, KABAMBA P T, BERNSTEIN D S. Guardian map approach to robust stability of linear systems with constant real parameter uncertainty[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, **39**(1): 162-164.
- [6] CHOI H H, CHUNG M J. Memoryless stabilization of uncertain dynamic systems with time-varying delayed states and controls[J]. *Automatica*, 1995, **31**(9): 1349-1351.
- [7] KIM J H, JEUNG E T, PARK H B. Robust control for parameter uncertain delay systems in state and control input[J]. *Automatica*, 1996, **32**(9): 1337-1339.
- [8] 舒含奇, 宋乾坤. 带有时滞的 Clifford 值神经网络的全局指数稳定性[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(5): 513-525.(SHU Hanqi, SONG Qiankun. Global stability of Clifford-valued recurrent neural networks with mixed time-varying delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(5): 513-525.(in Chinese))
- [9] YANG X S, LAM J, HO D W, et al. Fixed-time synchronization of complex networks with impulsive effects via nonchattering control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(11): 5511-5521.
- [10] SHEN B, WANG Z, LIU X. Sampled-data synchronization control of dynamical networks with stochastic sampling[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(10): 2644-2650.
- [11] CHEN W H, LU X, ZHENG W X. Impulsive stabilization and impulsive synchronization of discrete-time delayed neural networks[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, **26**(4): 734-748.
- [12] SEONG S, SOHN I, CHOI S, et al. Distributed synchronization algorithm for infrastructure-less public safety networks[J]. *Journal of Communications and Networks*, 2018, **20**(3): 316-324.
- [13] LI X J, YANG G H. Adaptive fault-tolerant synchronization control of a class of complex dy-

- namical networks with general input distribution matrices and actuator faults [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2015, **28**(3): 559-569.
- [14] 张平奎, 杨绪君. 基于激励滑模控制的分数阶神经网络的修正投影同步研究[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(3): 343-354. (ZHANG Pingkui, YANG Xujun. Modified projective synchronization of a class of fractional-order neural networks based on active sliding mode control[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(3): 343-354. (in Chinese))
- [15] NOH K L, SERPEDIN E, QARAQE K, et al. A new approach for time synchronization in wireless sensor networks: pairwise broadcast synchronization[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2008, **7**(9): 3318-3322.
- [16] WANG W. Approach of adaptive synchronization for bistatic SAR real-time imaging[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2007, **45**(9): 2695-2700.
- [17] WANG S, HUANG Y, REN S. Synchronization and robust synchronization for fractional-order coupled neural networks[J]. *IEEE Access*, 2017, **5**: 12439-12448.
- [18] MAREY M, DOBRE O A, LIAO B. Second-order statistics-based blind synchronization algorithm for two receive-antenna orthogonal stbc systems[J]. *IEEE Communications Letters*, 2014, **18**(7): 1115-1118.
- [19] 闫欢, 赵振江, 宋乾坤. 具有泄漏时滞的复值神经网络的全局同步性[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(8): 832-841. (YAN Huan, ZHAO Zhenjiang, SONG Qiankun. Global synchronization of complex-valued neural networks with leakage time delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(8): 832-841. (in Chinese))
- [20] DING L, HAN Q L, GE X, et al. An overview of recent advances in event-triggered consensus of multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, **48**(4): 1110-1123.
- [21] LI H Y, ZHANG Z X, YAN H C, et al. Adaptive event-triggered fuzzy control for uncertain active suspension systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, **49**(12): 4388-4397.
- [22] WEN S P, ZENG Z G, CHEN M Z Q, et al. Synchronization of switched neural networks with communication delays via the event-triggered control[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, **28**(10): 2334-2343.

# Synchronization of Master-Slave Systems With Multiple Time-Varying Delays Based on the Event-Triggered Mechanism

ZHOU Jun<sup>1</sup>, TONG Dongbing<sup>1</sup>, CHEN Qiaoyu<sup>2</sup>

(1. *School of Electronic and Electrical Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, P.R.China;*

2. *School of Statistics and Mathematics, Shanghai Lixin University of Accounting and Finance, Shanghai 201620, P.R.China*)

**Abstract:** The synchronization problem of master-slave systems with multiple time-varying delays based on the event-triggered mechanism was studied. The proposed event-triggered mechanism can effectively reduce data transmission and mitigate the pressure of network bandwidth during the synchronization process of master-slave systems. With the Lyapunov stability theory and the linear matrix inequality method, the sufficient conditions for the synchronization of master-slave systems with multiple time-varying delays were obtained. Finally, the effectiveness of the proposed synchronization criterion was verified through the MATLAB simulation.

**Key words:** master-slave system; multi-time-varying delay; synchronization; event-triggered mechanism

**Foundation item:** The National Natural Science Foundation of China (61673257; 11501367); China Postdoctoral Science Foundation (2019M661322)

---

引用本文/Cite this paper:

周军, 童东兵, 陈巧玉. 基于事件触发控制带有多时变时滞的主从系统同步[J]. 应用数学和力学, 2019, 40(12): 1389-1398.

ZHOU Jun, TONG Dongbing, CHEN Qiaoyu. Synchronization of master-slave systems with multiple time-varying delays based on the event-triggered mechanism[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, 40(12): 1389-1398.