文章编号:1000-0887(2019)11-1224-11

离散分数阶神经网络的全局 Mittag-Leffler 稳定性*

游星星， 梁伦海

(重庆交通大学 经济与管理学院, 重庆 400074)

摘要： 研究了一类离散分数阶神经网络的 Mittag-Leffler 稳定性问题.首先, 基于离散分数阶微积分理论、神经网络理论,提出了一类离散分数阶神经网络.其次,利用不等式技巧和离散 Laplace 变换,通过构造合适的 Lyapunov 函数,得到了离散分数阶神经网络全局 Mittag-Leffler 稳定的充分性判据.最后,通过一个数值仿真算例验证了所提出理论的有效性.

关 键 词： 全局 Mittag-Leffler 稳定性； 分数阶神经网络； 离散时间； Lyapunov 函数

中图分类号： O357.41　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.400163

引　　言

自 1982 年美国加州理工学院生物物理学家 Hopfield 提出了神经网络的数学模型以来[1]，各种类型的网络模型相继被建立[2-3].由于神经网络具有自学习功能、联想记忆功能和鲁棒性强等特点,现已广泛应用于联想记忆、图像处理、信号传输、保密通讯、模式识别等诸多领域[4].从神经网络稳定性的研究工作来看,无论是实值神经网络还是复值神经网络,其模型都是用整数阶微积分描述的.然而,在实际研究中,整数阶微积分也有局限性,其整数阶导数建立的神经网络无法准确地描述大部分神经元具有的记忆特性和历史依赖性.人们发现,利用分数阶微积分所建立的模型比用经典的整数阶微积分建立的模型能更准确地描述这些自然现象及反映系统的性态,这也是分数阶微积分最主要的优势.因此,分数阶微积分具有的功能是整数阶微积分不能替代的.最近,一些学者利用分数阶微积分描述模型所具有的良好的记忆能力和遗传特性,将分数阶微积分理论引入到神经网络,建立了分数阶神经网络模型.在设计神经网络解决实际问题时,往往需要对其稳定性进行讨论与分析,稳定性是保证控制系统正常工作的先决条件,合理选择网络的参数和激活函数,可以确保网络正常、高效地完成工作[5].因此,对分数阶神经网络稳定性进行深入研究具有重要意义.Lyapunov 直接方法是非线性系统中稳定性分析的重要工具.当 Lyapunov 直接方法扩展到分数阶系统时,就产生了 Mittag-Leffler 稳定性[6-7].近年来,一大批关于分数阶神经网络的 Mittag-Leffler 稳定性研究理论被相继报道[6-12].

众所周知,在计算机模拟和仿真中,离散化过程是研究人员分析系统行为最主要的方法,

* **收稿日期：** 2019-05-07; **修订日期：** 2019-05-23
基金项目： 重庆市研究生教育创新基金(CYS18230)
作者简介： 游星星(1994—),男,硕士生(通讯作者. E-mail：youxingxing11@163.com)；
梁伦海(1995—),男,硕士生(E-mail：765046989@qq.com).

几乎所有的数值仿真实验结果都是通过把连续系统离散化得到的.因此,我们直接关心的是离散系统是否保持了连续系统的性质.同样地,那些适用于分析连续分数阶系统所建立的稳定性判据是否能应用于离散分数阶系统.一些学者对于离散的分数阶微积分进行了研究,也得到了一些理论结果[13-16]:文献[13-14]给出了离散的 Mittag-Leffler 函数的定义和性质,并且研究了离散 Laplace 变换在 Caputo 分数阶差分算子和 Mittag-Leffler 函数上的应用;文献[15]基于离散分数阶微积分、不等式技巧和不动点定理,考虑了具有泄漏时滞的离散分数阶双向联想记忆神经网络的存在性、唯一性和一致稳定性;文献[16]通过利用 Krasnoselskii 不动点定理和 Arzela-Ascoli 定理,研究了具有非线性时滞的离散分数阶 Lotka-Volterra 模型.然而,这些文献研究的大多是离散分数阶微积分的性质,很少有文献涉及到离散分数阶神经网络的 Mittag-Leffler 稳定性.

鉴于以上分析,本文通过构造合适的 Lyapunov 函数,结合不等式技巧和离散 Laplace 变换,研究了一类离散分数阶神经网络的全局 Mittag-Leffler 稳定性,得到了确保网络平衡点稳定的充分性判据.相比于已有的文献,本文的贡献主要体现在两个方面:

1) 据笔者所知,本文第一次研究了离散分数阶神经网络的全局 Mittag-Leffler 稳定性.根据连续分数阶神经网络和离散分数阶微积分的理论,得到了 Lyapunov 直接法在实数域上的几个引理,从而将连续分数阶神经网络的部分性质扩展应用到离散分数阶神经网络.

2) 应用离散的 Laplace 变换和不等式技巧,得到了判定 Mittag-Leffler 稳定的充分条件.

本文的结构如下:第 1 节介绍了有关离散分数阶微积分的预备知识,包括离散分数阶神经网络模型、相关的定义及引理;第 2 节给出了离散分数阶神经网络全局 Mittag-Leffler 稳定的充分性判据;第 3 节通过一个数值仿真实例验证了提出理论的有效性;最后总结了全文所做的工作.

1 预备知识

1.1 模型描述

为了方便表达,本文使用以下记号.

R^n 和 C^n 分别表示由 n 维实数和复数向量构成的空间,$R^{n\times n}$ 表示由 $n\times n$ 维实数矩阵构成的集合;$\boldsymbol{I}_n$ 表示 $n\times n$ 的单位矩阵;对于 $\boldsymbol{z}(t)=(z_1(t),z_2(t),\cdots,z_n(t))^{\mathrm{T}}\in R^n$,$\|\boldsymbol{z}(t)\|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}z_j^2(t)}$ 表示 $\boldsymbol{z}(t)$ 的范数;对于 $\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$,$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值;$\Im=\{1,2,\cdots,n\}$;$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$,类似地 $\mathbf{N}_+=\{1,2,\cdots\}$.

本文考虑如下的一类离散分数阶神经网络:

$$ {}^{c}\nabla_0^{\alpha}z_j(t)=-c_jz_j(t)+\sum_{k=1}^{n}a_{jk}f_k(z_k(t))+U_j,\quad j\in\Im,\ t\in\mathbf{N}, \tag{1}$$

其向量形式为

$$ {}^{c}\nabla_0^{\alpha}\boldsymbol{z}(t)=-\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}(t))+\boldsymbol{U},\qquad t\in\mathbf{N}, \tag{2}$$

其中 ${}^{c}\nabla_0^{\alpha}$ 表示一类阶数为 $\alpha(0<\alpha<1)$ 的 Caputo 分数阶差分算子,j 表示神经元的数量;$\boldsymbol{z}(t)=(z_1(t),z_2(t),\cdots,z_n(t))^{\mathrm{T}}\in R^n$ 表示神经元的状态向量;$\boldsymbol{C}=\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in R^{n\times n}$ 表示自反馈连接权向量矩阵,其中 $c_j>0$;$\boldsymbol{A}=(a_{jk})_{n\times n}\in R^{n\times n}$ 表示连接权矩阵;$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}(t))=(f_1(z_1(t)),f_2(z_2(t)),\cdots,f_n(z_n(t)))^{\mathrm{T}}$: $R^n\to R^n$ 表示神经元的向量值激活函数;$\boldsymbol{U}=(U_1(t),U_2(t),\cdots,U_n(t))^{\mathrm{T}}\in R^n$ 表示系统(1)的外部输入.

系统(1)的初始条件为

$$z_j(0)=\phi_{j0},\tag{3}$$

其向量形式为

$$\boldsymbol{z}(0)=\boldsymbol{\phi}_0.\tag{4}$$

为了获得主要结果，做出如下假设.

假设 1 系统(1)存在唯一的平衡点 $\boldsymbol{z}^*=(z_1^*,z_2^*,\cdots,z_n^*)^{\mathrm{T}}$，使得下面的等式成立：

$$-c_jz_j^*+\sum_{k=1}^{n}a_{jk}f_k(z_k^*)+U_j=0,\qquad j\in\Im.$$

假设 2 对于任意给定的 $u,v\in\mathbf{R}$，存在常数 $L_k>0$，使得

$$|f_k(u)-f_k(v)|\leqslant L_k|u-v|,\qquad k\in\Im,$$

定义

$$\boldsymbol{L}=\mathrm{diag}(L_1,L_2,\cdots,L_n).$$

根据假设 1，令 $\hat{z}(t)=z(t)-z^*$，则系统(1)可以表示为

$${}^{\mathrm{c}}\nabla_0^{\alpha}\hat{z}_j(t)=-c_j\hat{z}_j(t)+\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(f_k(\hat{z}_k(t)+z_k^*)-f_k(z_k^*)),\qquad j\in\Im,\ t\in\mathbf{N}.\tag{5}$$

系统(5)的初值条件为

$$\hat{z}_j(0)=\phi_{j0}-z_j^*.$$

1.2 基本定义和引理

本小节中将给出如下的基本定义和引理.

定义 1[15-16] 对于自然数 α,t 的 α 次上升函数被定义为

$$t^{\overline{\alpha}}=\frac{\Gamma(t+\alpha)}{\Gamma(t)},\qquad t\in\mathbf{R}\setminus\{\cdots,-2,-1,0\},\ 0^{\overline{\alpha}}=0,$$

其中 $\Gamma(\cdot)$表示 Gamma 函数.另外，定义迭代运算符 $\nabla^{\alpha}=\nabla(\nabla^{(\alpha-1)})$.

定义 2[15-16] 对于任意的阶数 $\alpha>0$，令 $x:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$，$\rho(s)=s-1$，则

1) $x(t)$ 的 nabla 差分被定义为

$$\nabla x(t)=x(t)-x(t-1),\qquad t\in\mathbf{N}_+.$$

2) $x(t)$ 的 Riemann-Liouville 和算子被定义为

$$\nabla_0^{-\alpha}x(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{s=1}^{t}(t-\rho(s))^{\overline{\alpha-1}}x(s),\qquad t\in\mathbf{N}_+.$$

3) $x(t)$ 的 Caputo 差分算子被定义为

$${}^{\mathrm{c}}\nabla_0^{\alpha}x(t)=\nabla_0^{-(1-\alpha)}\nabla x(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{s=1}^{t}(t-\rho(s))^{\overline{-\alpha}}\nabla x(s),\qquad t\in\mathbf{N}_+.$$

4) 令 $\mu>-1$，则差分算子的幂被定义为

$$\nabla_0^{-\alpha}t^{\overline{\mu}}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\alpha+\mu+1)}t^{\overline{\alpha+\mu}},\qquad t\in\mathbf{N}.$$

注 1 根据定义 2，对任意的常数 $a,b\in\mathbf{R}$，可以得到 ${}^{\mathrm{c}}\nabla_0^{\alpha}(af(t)+bg(t))=a\,{}^{\mathrm{c}}\nabla_0^{\alpha}f(t)+b\,{}^{\mathrm{c}}\nabla_0^{\alpha}g(t)$.

定义 3[13-14] 对于任意的 $\vartheta\in\mathbf{R}$，$|\vartheta|<1$ 和 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{C}$ 且 $\mathrm{Re}(\alpha)>0$，双参数的离散 nabla Mittag-Leffler 函数被定义为

$$E_{\overline{\alpha,\beta}}(\vartheta,\gamma)=\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta^k\frac{\gamma^{\overline{k\alpha+\beta-1}}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}.\tag{6}$$

特别地，当 $\beta = 1$ 时，

$$E_{\bar{\alpha}}(\vartheta,\gamma) \triangleq E_{\overline{\alpha,1}}(\vartheta,\gamma) = \sum_{k=0}^{\infty} \vartheta^k \frac{\gamma^{\overline{k\alpha}}}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \tag{7}$$

定义 4（Mittag-Leffler 稳定性）　系统(5)的平衡点 z^* 被称为全局 Mittag-Leffler 稳定的，如果存在正常数 ϑ, d 且 $0 < \vartheta < 1$，使得

$$\| z(t) - z^* \| \leqslant \{ m(\boldsymbol{\phi}_0 - z^*) E_{\bar{\alpha}}(-\vartheta, t) \}^d, \qquad t \in \mathbf{N} \tag{8}$$

成立，其中 $z(t)$ 是系统(5)的任意解，$\boldsymbol{\phi}_0$ 是系统的初值条件，$\alpha \in (0,1)$，$m(\mathbf{0}) = 0$，$m(z) \geqslant 0$，$m(z)$ 在 R^n 上是局部 Lipschitz 函数。

引理 1[13-14]　函数 $f(t)$，Caputo 差分算子函数 ${}^{c}\nabla_0^{\alpha} f(t)$，$f(t)$ 与 $g(t)$ 的卷积以及 Mittag-Leffler 函数的离散 Laplace 变换分别为

$$\mathscr{N}\{f(t)\} = \sum_{\mathfrak{s}=1}^{\infty} (1-t)^{\mathfrak{s}-1} f(\mathfrak{s}),$$

$$\mathscr{N}\{{}^{c}\nabla_0^{\alpha} f(t)\} = \mathfrak{s}^{\alpha} \mathscr{N}\{f(\mathfrak{s})\} - \mathfrak{s}^{\alpha-1} f(0),$$

$$\mathscr{N}\{f(t) * g(t)\} = \mathscr{N}\{f(\mathfrak{s})\} \mathscr{N}\{g(\mathfrak{s})\},$$

$$\mathscr{N}\{E_{\bar{\alpha}}(\vartheta,t)\} = \frac{\mathfrak{s}^{\alpha-1}}{\mathfrak{s}^{\alpha} - \vartheta},$$

$$\mathscr{N}\{E_{\overline{\alpha,\alpha}}(\vartheta,t)\} = \frac{1}{\mathfrak{s}^{\alpha} - \vartheta}.$$

引理 2　令函数 $x(t)$：$\mathbf{N} \to \mathbf{R}$，则对任意的 $0 < \alpha < 1$，有

$${}^{c}\nabla_0^{\alpha} | x(t) | \leqslant \operatorname{sgn}(x(t))\, {}^{c}\nabla_0^{\alpha} x(t). \tag{9}$$

证明　根据定义 2，$1/\Gamma(1-\alpha) > 0$ 和 $(t-\rho(s))^{\overline{-\alpha}} > 0$，可将不等式(9)的左边表示为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{t} (t-\rho(s))^{\overline{-\alpha}} \nabla | x(s) | = \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{t} (t-\rho(s))^{\overline{-\alpha}} (| x(s) | - | x(s-1) |) \leqslant \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{t} (t-\rho(s))^{\overline{-\alpha}} | x(s) - x(s-1) |.
\end{aligned}$$

不失一般性，如果 $x(s) - x(s-1) \geqslant 0$，那么

$$\begin{aligned}
&{}^{c}\nabla_0^{\alpha} | x(t) | \leqslant \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{t} (t-\rho(s))^{\overline{-\alpha}} | x(s) - x(s-1) | = \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{t} (t-\rho(s))^{\overline{-\alpha}} (x(s) - x(s-1)) = \\
&\quad {}^{c}\nabla_0^{\alpha} x(t).
\end{aligned}$$

如果 $x(s) - x(s-1) \leqslant 0$，那么

$$\begin{aligned}
&{}^{c}\nabla_0^{\alpha} | x(t) | \leqslant \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{t} (t-\rho(s))^{\overline{-\alpha}} | x(s) - x(s-1) | = \\
&\quad -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^{t} (t-\rho(s))^{\overline{-\alpha}} (x(s) - x(s-1)) = \\
&\quad -{}^{c}\nabla_0^{\alpha} x(t).
\end{aligned}$$

因此

$$^{c}\nabla_0^{\alpha}|x(t)| \leqslant \mathrm{sgn}(x(t))\,^{c}\nabla_0^{\alpha}x(t).$$

引理 3 令函数 $x(t):\mathbf{N}\to\mathbf{R}$,则对任意的 $0<\alpha<1$,有

$$\frac{1}{2}\,^{c}\nabla_0^{\alpha}x^2(t) \leqslant x(t)\,^{c}\nabla_0^{\alpha}x(t), \qquad \forall\alpha\in(0,1). \tag{10}$$

证明 不等式(10)可以等价为下列形式:

$$x(t)\,^{c}\nabla_0^{\alpha}x(t) - \frac{1}{2}\,^{c}\nabla_0^{\alpha}x^2(t) \geqslant 0, \qquad \forall\alpha\in(0,1).$$

根据定义 2,可得

$$\begin{aligned}
&x(t)\,^{c}\nabla_0^{\alpha}x(t) - \frac{1}{2}\,^{c}\nabla_0^{\alpha}x^2(t) = \\
&\quad x(t)\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{s=1}^{t}(t-\rho(s))^{\overline{-\alpha}}\nabla x(s) - \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{s=1}^{t}(t-\rho(s))^{\overline{-\alpha}}\frac{1}{2}\nabla x^2(s) = \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{s=1}^{t}(t-\rho(s))^{\overline{-\alpha}}\times \\
&\quad \left[(x(s)-x(s-1))\left(x(t)-\frac{1}{2}x(s)-\frac{1}{2}x(s-1)\right)\right] = \\
&\quad \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{s=1}^{t}(t-\rho(s))^{\overline{-\alpha}}\times \\
&\quad \frac{1}{2}[(x(s)-x(s-1))(x(t)-x(s)+x(t)-x(s-1))].
\end{aligned}$$

不失一般性,可以假设

$$x(s)-x(s-1)\geqslant 0, \qquad s=1,2,\cdots,t.$$

由此,可以得到 $x(t)-x(s)\geqslant 0$ 和 $x(t)-x(s-1)\geqslant 0$,那么

$$(x(s)-x(s-1))(x(t)-x(s)+x(t)-x(s-1))\geqslant 0.$$

同样地,假设

$$x(s)-x(s-1)\leqslant 0, \qquad s=1,2,\cdots,t.$$

可以推出 $x(t)-x(s)\leqslant 0$ 和 $x(t)-x(s-1)\leqslant 0$,那么

$$(x(s)-x(s-1))(x(t)-x(s)+x(t)-x(s-1))\geqslant 0.$$

因为 $1/\Gamma(1-\alpha)>0$, $(t-\rho(s))^{\overline{-\alpha}}>0$ 且

$$(x(s)-x(s-1))(x(t)-x(s)+x(t)-x(s-1))/2\geqslant 0,$$

所以

$$x(t)\,^{c}\nabla_0^{\alpha}x(t) - \frac{1}{2}\,^{c}\nabla_0^{\alpha}x^2(t) \geqslant 0.$$

故

$$\frac{1}{2}\,^{c}\nabla_a^{\alpha}x^2(t) \leqslant x(t)\,^{c}\nabla_a^{\alpha}x(t), \qquad \forall\alpha\in(0,1).$$

引理 4 令 $V(t,z(t)):\mathbf{N}\times R^n\to\mathbf{R}$ 是一个正定递减的标量函数,如果存在一个常数 ϑ,使得

$$^{c}\nabla_0^{\alpha}V(t,z(t)) \leqslant \vartheta V(t,z(t)), \qquad 0<\alpha<1 \tag{11}$$

成立，那么

$$V(t,\boldsymbol{z}(t)) \leqslant V(0,\boldsymbol{z}(0))E_{\bar{\alpha}}(\vartheta,t), \qquad t \in \mathbf{N}. \tag{12}$$

证明　由不等式(11)可得，如果存在一个非负函数 $\mathscr{M}(t)$ 满足

$${}^{c}\nabla_0^{\alpha}V(t,\boldsymbol{z}(t)) + \mathscr{M}(t) = \vartheta V(t,\boldsymbol{z}(t)).$$

根据引理1，对上式的左右两边应用离散 Laplace 变换得

$$\mathscr{N}\{{}^{c}\nabla_0^{\alpha}V(t,\boldsymbol{z}(t)) + \mathscr{M}(t)\} = \mathscr{N}\{\vartheta V(t,\boldsymbol{z}(t))\},$$

即

$$\mathfrak{s}^{\alpha}V(\mathfrak{s}) - \mathfrak{s}^{\alpha-1}V(0) + \mathscr{M}(\mathfrak{s}) = \vartheta V(\mathfrak{s}),$$

其中 $V(\mathfrak{s}) = \mathscr{N}\{V(t,\boldsymbol{z}(t))\}$，且 $\mathscr{M}(\mathfrak{s}) = \mathscr{N}\{\mathscr{M}(t)\}$.其可以写成如下形式：

$$V(\mathfrak{s}) = \frac{V(0)\mathfrak{s}^{\alpha-1} - \mathscr{M}(\mathfrak{s})}{\mathfrak{s}^{\alpha} - \vartheta}.$$

取 $V(\mathfrak{s})$ 的离散 Laplace 逆变换，则

$$V(t,\boldsymbol{z}(t)) = V(0,\boldsymbol{z}(0))E_{\bar{\alpha}}(\vartheta,t) - \mathscr{M}(t) * E_{\overline{\alpha,\alpha}}(\vartheta,t),$$

其中 $*$ 表示卷积运算.因为 $\mathscr{M}(t)$，$E_{\overline{\alpha,\alpha}}(\vartheta,t)$ 是非负函数，所以

$$V(t,\boldsymbol{z}(t)) \leqslant V(0,\boldsymbol{z}(0))E_{\bar{\alpha}}(\vartheta,t).$$

引理5[10](Young 不等式)　如果存在常数 $a > 0$，$b > 0$，$1 < p < +\infty$ 和 $1/p + 1/q = 1$，那么

$$a\ b \leqslant \frac{1}{p}a^{p} + \frac{1}{q}b^{q},$$

当且仅当 $b = a^{p-1}$ 上面的等号成立.此外，对于任意的 $\zeta > 0$，有

$$ab \leqslant \frac{1}{p}(a\zeta^{-1})^{p} + \frac{1}{q}(b\zeta)^{q}.$$

2　主要结果

在本节中，通过构造合适的 Lyapunov 函数，结合不等式技巧，给出了一类离散分数阶神经网络的全局 Mittag-Leffler 稳定的充分性判据.

定理1　若假设1和假设2成立，且对于任意的 $\zeta > 0$，有

$$0 < \vartheta_1 = \min_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{2c_j - \sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|L_k\zeta - \sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|L_j\zeta^{-1}\right\} < 1, \tag{13}$$

则系统(5)的平衡点是全局 Mittag-Leffler 稳定的.

证明　构造下列正定的 Lyapunov 函数：

$$V(t,\hat{z}(t)) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\hat{z}_j^2(t). \tag{14}$$

对任意的 $\zeta > 0$，取 $p,q = 2$，由引理5可得

$$|\hat{z}_j(t)||\hat{z}_k(t)| \leqslant \frac{1}{2}(\zeta^{1/2}|\hat{z}_j(t)|)^2 + \frac{1}{2}(\zeta^{-1/2}|\hat{z}_k(t)|)^2 =$$
$$\frac{1}{2}\zeta\hat{z}_j^2(t) + \frac{1}{2}\zeta^{-1}\hat{z}_k^2(t). \tag{15}$$

计算 $V(t,\hat{z}(t))$ 沿着系统(5)的 Caputo 差分，根据假设2、引理2、引理3和式(15)，有

$${}^{c}\nabla_0^{\alpha}V(t,\hat{z}(t)) \leqslant \sum_{j=1}^{n}|\hat{z}_j(t)|{}^{c}\nabla_0^{\alpha}|\hat{z}_j(t)| \leqslant$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} |\hat{z}_j(t)| \operatorname{sgn}(\hat{z}_j(t))\, {}^{c}\nabla_0^{\alpha}\hat{z}_j(t) = \\
&\sum_{j=1}^{n} |\hat{z}_j(t)| \operatorname{sgn}(\hat{z}_j(t)) \left[-c_j\hat{z}_j(t) + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(f_k(\hat{z}_k(t)+z_k^*) - f_k(z_k^*)) \right] \leqslant \\
&\sum_{j=1}^{n} |\hat{z}_j(t)| \left[-c_j|\hat{z}_j(t)| + \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|\,|f_k(\hat{z}_k(t)+z_k^*) - f_k(z_k^*)| \right] \leqslant \\
&\sum_{j=1}^{n} |\hat{z}_j(t)| \left[-c_j|\hat{z}_j(t)| + \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}| L_k |\hat{z}_k(t)| \right] \leqslant \\
&-\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{z}_j^2(t) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}| L_k\left(\frac{1}{2}\zeta\hat{z}_j^2(t) + \frac{1}{2}\zeta^{-1}\hat{z}_k^2(t)\right) = \\
&-\sum_{j=1}^{n}\left(2c_j - \sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|L_k\zeta - \sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|L_j\zeta^{-1}\right)\frac{1}{2}\hat{z}_j^2(t) \leqslant \\
&-\vartheta_1 V(t, \hat{\boldsymbol{z}}(t)),
\end{aligned} \tag{16}
$$

其中 $0 < \vartheta_1 = \min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{2c_j - \sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|L_k\zeta - \sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|L_j\zeta^{-1}\right\} < 1.$

根据引理 4，可以得到

$$V(t, \hat{\boldsymbol{z}}(t)) \leqslant V(0, \hat{\boldsymbol{z}}(0))E_{\bar{\alpha}}(-\vartheta_1, t), \qquad t \in \mathbf{N}.$$

所以

$$\|\hat{\boldsymbol{z}}(t) - \boldsymbol{z}^*\| \leqslant mE_{\bar{\alpha}}^{1/2}(-\vartheta_1, t),$$

其中 $m = \|\boldsymbol{\phi}_0 - \boldsymbol{z}^*\|$，并且当 $m = 0$ 时，有 $\boldsymbol{\phi}_0 = \boldsymbol{z}^*$ 成立.根据定义 4，系统(5) 的平衡点 $\boldsymbol{z}^*$ 是全局 Mittag-Leffler 稳定的.

定理 2 若假设 1 和假设 2 成立，且有

$$0 < \vartheta_2 = \min_{1\leqslant j\leqslant n}\{2c_j\} - 4\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Xi}) < 1, \tag{17}$$

其中

$$\boldsymbol{\Xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\Omega} = \frac{|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{L}}{2},$$

则系统(5)的平衡点是全局 Mittag-Leffler 稳定的.

证明 考虑矩阵

$$\boldsymbol{\Xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

作初等变换

$$\lambda\boldsymbol{I}_{2n} - \boldsymbol{\Xi} = \begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{0} & \lambda\boldsymbol{I}_n - \lambda^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix},$$

可知 $\boldsymbol{\Xi}$ 的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{I}_{2n} - \boldsymbol{\Xi}| = |\lambda\boldsymbol{I}_n|\,|\lambda\boldsymbol{I}_n - \lambda^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}| = |\lambda^2\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}|.$$

显然，λ 和 $-\lambda$ 是矩阵 $\boldsymbol{\Xi}$ 的两个特征值.对于矩阵 $\boldsymbol{\Xi} \neq \boldsymbol{0}$，总可以得到 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Xi}) > 0$.考虑下列正定的 Lyapunov 函数：

$$V(t, \hat{\boldsymbol{z}}(t)) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\hat{z}_j^2(t). \tag{18}$$

计算 $V(t, \hat{\boldsymbol{z}}(t))$ 沿着系统(5)的 Caputo 差分，根据假设 2、引理 2 和引理 3 可得

$$
\begin{aligned}
{}^{c}\nabla_{0}^{\alpha}V(t,\hat{\boldsymbol{z}}(t)) \leqslant & \sum_{j=1}^{n} |\hat{z}_j(t)|\,{}^{c}\nabla_{0}^{\alpha}|\hat{z}_j(t)| \leqslant \\
& \sum_{j=1}^{n} |\hat{z}_j(t)|\,\mathrm{sgn}(\hat{z}_j(t))\,{}^{c}\nabla_{0}^{\alpha}\hat{z}_j(t) = \\
& \sum_{j=1}^{n} |\hat{z}_j(t)|\,\mathrm{sgn}(\hat{z}_j(t))\left[-c_j\hat{z}_j(t)+\sum_{k=1}^{n}a_{jk}(f_k(\hat{z}_k(t)+z_k^{*})-f_k(z_k^{*}))\right] \leqslant \\
& \sum_{j=1}^{n} |\hat{z}_j(t)|\left[-c_j|\hat{z}_j(t)|+\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}||f_k(\hat{z}_k(t)+z_k^{*})-f_k(z_k^{*})|\right] \leqslant \\
& -\sum_{j=1}^{n}c_j\hat{z}_j^2(t)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}|L_k|\hat{z}_j(t)||\hat{z}_k(t)| = \\
& -\sum_{j=1}^{n}c_j\hat{z}_j^2(t)+|\hat{\boldsymbol{z}}(t)|^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}|\hat{\boldsymbol{z}}(t)|+|\hat{\boldsymbol{z}}(t)|^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}|\hat{\boldsymbol{z}}(t)| = \\
& -\sum_{j=1}^{n}c_j\hat{z}_j^2(t)+(|\hat{\boldsymbol{z}}(t)|^{\mathrm{T}},|\hat{\boldsymbol{z}}(t)|^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{\Omega}\\ \boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\hat{\boldsymbol{z}}(t)|\\ |\hat{\boldsymbol{z}}(t)|\end{pmatrix} \leqslant \\
& -\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{c_j\}\sum_{j=1}^{n}\hat{z}_j^2(t)+\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Xi})(|\hat{\boldsymbol{z}}(t)|^{\mathrm{T}}|\hat{\boldsymbol{z}}(t)|+|\hat{\boldsymbol{z}}(t)|^{\mathrm{T}}|\hat{\boldsymbol{z}}(t)|) = \\
& -\left(\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{2c_j\}-4\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Xi})\right)V(t,\hat{\boldsymbol{z}}(t)) = -\vartheta_2 V(t,\hat{\boldsymbol{z}}(t)),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

其中

$$
\boldsymbol{\Omega}=\frac{|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{L}}{2},\ 0<\vartheta_2=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{2c_j\}-4\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Xi})<1.
$$

根据引理4，可以得到

$$
V(t,\hat{\boldsymbol{z}}(t)) \leqslant V(0,\hat{\boldsymbol{z}}(0))E_{\bar{\alpha}}(-\vartheta_2,t),\qquad t\in\mathbf{N}.
$$

所以

$$
\|\hat{\boldsymbol{z}}(t)-\boldsymbol{z}^{*}\| \leqslant mE_{\bar{\alpha}}^{1/2}(-\vartheta_2,t),
$$

其中 $m=\|\boldsymbol{\phi}_0-\boldsymbol{z}^{*}\|$，并且当 $m=0$ 时，有 $\boldsymbol{\phi}_0=\boldsymbol{z}^{*}$ 成立。根据定义4，系统(5)的平衡点 $\boldsymbol{z}^{*}$ 是全局 Mittag-Leffler 稳定的。

注2 近年来，由于分数阶神经网络具有良好的记忆能力和遗传特性，分数阶神经网络的动力学行为引起了学者们的广泛关注(见文献[6-12])。但他们都是研究的连续时间分数阶神经网络的 Mittag-Leffler 稳定性或者同步性。不同于已有的文献，本文考虑了离散时间分数阶神经网络的全局 Mittag-Leffler 稳定性。并且，文中的研究结果表明 Lyapunov 直接法在离散分数阶神经网络上的应用也是可能的，从而在某种意义上推广了 Lyapunov 直接法的适用范围。

注3 文献[15-16]利用离散分数阶微积分理论和不动点定理，研究了一类离散分数阶神经网络的解的存在性和稳定性。与文献[15-16]中的方法不同，本文首次考虑了将 Lyapunov 直接法运用于离散分数阶神经网络全局 Mittag-Leffler 稳定性分析。

3 数值仿真

例1 考虑如下的离散分数阶神经网络系统：

$$
{}^{c}\nabla_{0}^{\alpha}z_j(t)=-c_jz_j(t)+\sum_{k=1}^{n}a_{jk}f_k(z_k(t))+U_j,\qquad j\in\Im,\ t\in\mathbf{N},
\tag{20}
$$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0.630\,0 & 0\\ 0 & 0.590\,0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-0.116\,0 & -0.134\,0\\ 0.086\,0 & 0.104\,0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}-0.2\\ 0.212\end{pmatrix},$$

激活函数 $f_1(z_1(t))=0.7\tanh(z_1(t))$, $f_2(z_2(t))=0.5\tanh(z_2(t))$, 阶数 $\alpha=0.96$.

取定参数为 $\zeta=2.4$, $\boldsymbol{L}=\mathrm{diag}(L_1,L_2)=\mathrm{diag}(0.7,0.5)$, 容易验证满足假设2.我们可以得到 $0<\vartheta_1=\min\{0.845\,4,0.861\,1\}=0.845\,4<1$ 和 $0<\vartheta_2=0.916\,1<1$, 其分别满足定理 1 和定理 2 中的条件.因此系统(20)的平衡点是全局 Mittag-Leffler 稳定的.图 1 和图 2 分别给出了状态变量 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 在初值条件 $\boldsymbol{\phi}_0=(-0.216\,1,\ 0.013\,5)^{\mathrm{T}}$ 下随时间 t 变化的轨迹图, 其验证了平衡点的稳定性.

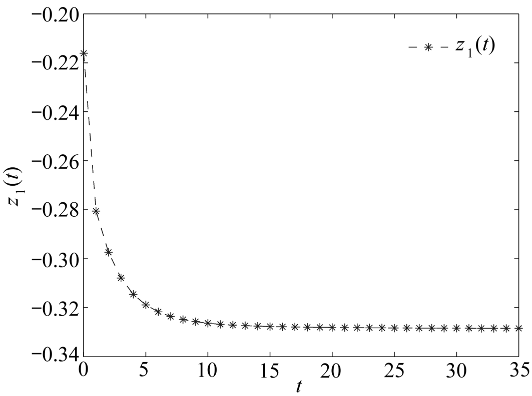

图 1　系统(20)状态变量 $z_1(t)$ 的时间响应轨线

Fig. 1　The time response trajectory of state variable $z_1(t)$ for system (20)

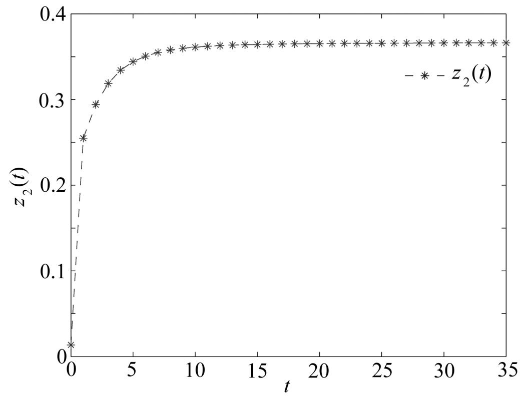

图 2　系统(20)状态变量 $z_2(t)$ 的时间响应轨线

Fig. 2　The time response trajectory of state variable $z_2(t)$ for system (20)

4　总　　结

基于离散分数阶微积分理论, 本文提出了一类实数域上的离散分数阶神经网络, 通过构造合适的 Lyapunov 函数, 给出了该网络的全局 Mittag-Leffler 稳定性判据.数值仿真算例验证了所提出理论的有效性.在未来的工作中, 我们将考虑带有时滞的离散分数阶神经网络的存在性、唯一性以及 Mittag-Leffler 同步性和基于忆阻的离散分数阶神经网络的动力学行为分析.

参考文献(References):

[1]　廖晓昕. Hopfield 型神经网络的稳定性[J]. 中国科学(A 辑), 1993, **23**(10): 1025-1035.(LIAO Xiaoxin. Stability of Hopfield neural networks[J]. *Science in China* (*Series A*), 1993, **23**(10): 1025-1035.(in Chinese))

[2]　马儒宁, 陈天平. 基于投影算子的回归神经网络模型及其在最优化问题中的应用[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(4): 484-494.(MA Runing, CHEN Tianping. Recurrent neural network model based on projective operator and its application to optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**(4): 484-494.(in Chinese))

[3]　王利敏, 宋乾坤, 赵振江. 基于忆阻的分数阶时滞复值神经网络的全局渐进稳定性[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(3): 333-346.(WANG Limin, SONG Qiankun, ZHAO Zhenjiang. Global asymptotic stability of memristor-based fractional-order complex-valued neural networks with time delays[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(3): 333-346.(in Chinese))

[4]　曾德强, 吴开腾, 宋乾坤, 等. 时滞神经网络随机抽样控制的状态估计[J]. 应用数学和力学,

2018, **39**(7): 821-832.(ZENG Deqiang, WU Kaiteng, SONG Qiankun, et al. State estimation for delayed neural networks with stochastic sampled-data control[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(7): 821-832.(in Chinese))

[5] ZHANG L, SONG Q, ZHAO Z. Stability analysis of fractional-order complex-valued neural networks with both leakage and discrete delays[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, **298**: 296-309.

[6] LI Y, CHEN Y Q, PODLUBNY I. Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems[J]. *Automatica*, 2009, **45**(8): 1965-1969.

[7] LI Y, CHEN Y Q, PODLUBNY I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2010, **59**(5): 1810-1821.

[8] CHEN J, ZENG Z, JIANG P. Global Mittag-Leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks[J]. *Neural Networks*, 2014, **51**: 1-8.

[9] CHEN J, LI C, YANG X. Global Mittag-Leffler projective synchronization of nonidentical fractional-order neural networks with delay via sliding mode control[J]. *Neurocomputing*, 2018, **313**: 324-332.

[10] YANG X, LI C, HUANG T, SONG Q, et al. Global Mittag-Leffler synchronization of fractional-order neural networks via impulsive control[J]. *Neural Processing Letters*, 2018, **48**(1): 459-479.

[11] PRATAP A, RAJA R, CAO J, et al. Stability and synchronization criteria for fractional order competitive neural networks with time delays: an asymptotic expansion of Mittag Leffler function[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, **356**(4): 2212-2239.

[12] YE R, LIU X, ZHANG H, et al. Global Mittag-Leffler synchronization for fractional-order BAM neural networks with impulses and multiple variable delays via delayed-feedback control strategy[J]. *Neural Processing Letters*, 2019, **49**(1): 1-18.

[13] ABDELJAWAD T, JARAD F, BALEANU D. A semigroup-like property for discrete Mittag-Leffler functions[J]. *Advances in Difference Equations*, 2012, **2012**(1): 72.

[14] ABDELJAWAD T, AL-MDALLAL Q M. Discrete Mittag-Leffler kernel type fractional difference initial value problems and Gronwall's inequality[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, **339**: 218-230.

[15] ALZABUT J, TYAGI S, ABBAS S. Discrete fractional-order BAM neural networks with leakage delay: existence and stability results[J]. *Asian Journal of Control*, 2018. DOI: 10.1002/asjc.1918.

[16] ALZABUT J, ABDELJAWAD T, BALEANU D. Nonlinear delay fractional difference equations with applications on discrete fractional Lotka-Volterra competition model[J]. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 2018, **25**(5): 889-898.

Global Mittag-Leffler Stability of Discrete-Time Fractional-Order Neural Networks

YOU Xingxing， LIANG Lunhai

（*School of Economics and Management*， *Chongqing Jiaotong University*，
Chongqing 400074，*P.R.China*）

Abstract：The Mittag-Leffler stability of a class of discrete-time fractional-order neural networks was studied. Based on the discrete fractional calculus theory and the neural network theory，a class of discrete-time fractional-order neural networks were proposed. By means of the inequality techniques and the discrete Laplace transform，and through construction of the appropriate Lyapunov function，the sufficient criteria for global Mittag-Leffler stability of discrete-time fractional-order neural networks were obtained. Finally，a numerical simulation example verifies the validity of the proposed theory.

Key words：global Mittag-Leffler stability；fractional-order neural network；discrete time；Lyapunov function

引用本文/Cite this paper：

游星星，梁伦海. 离散分数阶神经网络的全局 Mittag-Leffler 稳定性［J］. 应用数学和力学，2019，**40**（11）：1224-1234.

YOU Xingxing，LIANG Lunhai. Global Mittag-Leffler stability of discrete-time fractional-order neural networks［J］. *Applied Mathematics and Mechanics*，2019，**40**（11）：1224-1234.