

混凝土重力坝多参数弹性位移反演分析 不唯一性理论探讨*

黄耀英¹, 殷晓慧¹, 李春光²

(1. 三峡大学 水利与环境学院, 湖北 宜昌 443002;

2. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071)

摘要: 反演分析是现场监测-反演分析-工程实践检验-正演分析及预测的闭环系统的重要环节, 而参数反分析是工程实践中研究最多的反分析问题. 针对混凝土重力坝多参数反演分析是否具有唯一性, 基于均质地基上重力坝在水压力作用下的位移解析解建立目标函数, 进而以目标函数和非空凸集构建一个凸规划问题, 然后通过分析目标函数的 Hesse 矩阵是否是正定矩阵, 验证目标函数是否是严格凸函数, 从而辨识构建的凸规划问题是否具有唯一全局极小点. 对坝体和岩基弹性参数的不同组合方案分析表明, 当采用理论值与实测值的差值的 l_1 范数作为目标函数时, 目标函数的 Hesse 矩阵均不能保证为正定矩阵, 即混凝土重力坝多参数弹性位移反演分析凸规划问题不具有唯一全局极小点, 反演分析不唯一.

关键词: 多参数反演; 位移反演; 凸规划问题; Hesse 矩阵; 唯一性

中图分类号: TV31; O302 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.400164

引 言

由于室内试验的局限性, 通过室内试验获得的混凝土力学性能与真实情况难免有一定的出入; 对混凝土坝在施工期和运行期进行监测可获得一些实测位移, 通过反分析可以推算混凝土的力学性能, 其数值更接近于真实值^[1]. 反分析是利用原位监测资料来确定系统内在状态的方法. 依据未知量的不同, 反分析内容可以分为模型辨识问题、参数反分析、源反分析、记忆反分析、边界控制反分析和几何反分析等^[2]. 其中, 参数反分析是工程实践中研究最多的反分析问题. 自从 Kavanagh 和 Clough^[3] 采用有限元法反演弹性固体的弹性模量以来, 目前关于采用最优化算法或仿生算法进行多参数反分析的研究已有大量的文献报导^[4-9], 但这些文献一般都回避多参数反分析是否存在唯一解答, 仅有少量的文献从理论上探讨了隧洞的多参数反分析是否具有唯一性. 吕爱钟^[10] 利用平面弹性复变方法和一般弹性理论求得了任意形状巷道的位移解析解表达式, 并在此基础上证明了参数可唯一辨识的最多个数及分析了量测点布置对可辨识性的影响. 张路青等^[11] 利用单个洞室的位移解析解对位移反分析最多能辨识出的参数个

* 收稿日期: 2019-05-09; 修订日期: 2019-05-31

基金项目: 国家自然科学基金(51779130)

作者简介: 黄耀英(1977—), 男, 教授, 博士(通讯作者. E-mail: huangyaoying@sohu.com).

引用格式: 黄耀英, 殷晓慧, 李春光. 混凝土重力坝多参数弹性位移反演分析不唯一性理论探讨[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(2): 171-181.

数进行了研究,发现所有地应力分量和弹性模量同为未知量时的反演不具有唯一性;但一些参数已知时,在一些限定条件下,其余参数能被唯一反演.赵同彬等^[12]对巷道位移反分析中各力学参数、初始地应力的可反演性进行了较深入的研究,提出了用影响度和敏感度两个指标来评价弹塑性模型下各力学参数和初始地应力的可反演性.王建等^[13]对 Duncan-Chang 模型的特点进行了分析,认为由于破坏比、凝聚力和内摩擦角之间存在一种特殊相关性,导致 Duncan-Chang 模型的计算参数与计算结果之间是“多对一”的映射关系,从而导致反演结果的不唯一性.目前从理论上探讨混凝土重力坝多参数弹性位移反演分析唯一性问题尚未见文献报导,究其原因水荷载作用下混凝土重力坝的位移解析解十分复杂.虽然通过分析灵敏系数线性无关是一种辨识多参数反分析唯一性的理论分析方法^[10-11],但由于目前常用的以目标函数和非空凸集构建的数学优化问题本质上是一个凸规划问题^[14-18],因此从凸规划问题角度来分析多参数反演分析的唯一性,在理论上更严谨.为此,本文首先基于均质地基上重力坝在水压力作用下的位移解析解建立目标函数,然后以目标函数和非空凸集构建一个凸规划问题,最后通过分析目标函数是否为严格凸函数来辨识多参数反演分析的唯一性.

1 多参数弹性位移反演分析唯一性证明数学理论

1.1 优化反分析唯一性证明数学理论^[14-19]

设函数 $f(\mathbf{X})$ 定义在凸集 C 上,其中 $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$.

定义 1 若存在常数 $\alpha > 0$,使得 $\forall \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in C$,以及 $\forall \lambda \in (0, 1)$,若有

$$f(\lambda \mathbf{X}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{X}_2) \leq \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{X}_2) - \alpha \lambda (1 - \lambda) \|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\|^2, \quad (1)$$

则称 $f(\mathbf{X})$ 为一致凸函数;若有

$$f(\lambda \mathbf{X}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{X}_2) < \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{X}_2), \quad (2)$$

则称 $f(\mathbf{X})$ 为严格凸函数;若有

$$f(\lambda \mathbf{X}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{X}_2) \leq \lambda f(\mathbf{X}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{X}_2), \quad (3)$$

则称 $f(\mathbf{X})$ 为凸函数.

定义 2 设 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \mathbf{X}_0 \in \mathbf{R}^n$,如果 f 在点 \mathbf{X}_0 处对于自变量 \mathbf{X} 各分量的二阶偏导数

$\frac{\partial^2 f(\mathbf{X}_0)}{\partial x_i \partial x_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 都存在,则称函数 f 在点 \mathbf{X}_0 处二阶可导,并且称矩阵

$$\nabla^2 f(\mathbf{X}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}_0)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{X}_0)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

是 f 在点 \mathbf{X}_0 处的 Hesse 矩阵.

定义 3 设 $f: C \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$,其中 C 是非空凸集, f 是凸函数,则称形式为 $\min_{\mathbf{X} \in C} f(\mathbf{X})$ 的问题为凸规划问题.

设

$$C = \{ \mathbf{X} \mid g_i(\mathbf{X}) \geq 0, i = 1, 2, \dots, l; h_j(\mathbf{X}) = 0, j = 1, 2, \dots, m; \mathbf{X} \in R^n \},$$

若 $-g_1, -g_2, \dots, -g_l$ 都是 R^n 上的凸函数, h_1, h_2, \dots, h_m 都是 R^n 上的线性函数, 容易验证 C 是凸集. 此时, 凸规划问题可以表示成如下形式:

$$\begin{aligned} & \min f(\mathbf{X}), \\ & \text{s.t.} \begin{cases} g_i(\mathbf{X}) \geq 0, & i = 1, 2, \dots, l, \\ h_j(\mathbf{X}) = 0, & j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

定理 1 设 \mathbf{X}^* 是凸规划问题的局部极小点:

- 1) 若 f 是凸函数, 则 \mathbf{X}^* 是凸规划问题全局极小点;
- 2) 若 f 是严格凸函数, 则 \mathbf{X}^* 是凸规划问题唯一全局极小点.

定理 1 的证明在最优化方法的相关文献中已经给出, 可参见文献[14], 本文不再赘述.

定理 2 设 $f: C \subseteq R^n \rightarrow \mathbf{R}$, 其中 C 是非空凸集, 若 Hesse 矩阵在 C 上任意点均正定, 则 f 在 C 上为严格凸函数.

定理 2 的证明在最优化方法的相关文献中已经给出, 可参见文献[14], 本文不再赘述.

1.2 多参数弹性位移反演分析唯一性证明依据

在进行多参数弹性位移优化反演分析时, 一般以理论值(或计算值)与实测值的差值的某种表达式作为目标函数. 对于实际问题, 由于存在多个测点的测值, 因此, 目标函数一般为差值的某种表达式的叠加形式. 目前常采用差值的 l_2 范数作为目标函数. 为便于理论分析, 本文直接采用理论值与实测值的差值的 l_1 范数作为目标函数, 此时, 目标函数为

$$f(\mathbf{X}) = \|\delta(\mathbf{X}) - \delta^m\|_1 = \sum_{i=1}^N |\delta_i(\mathbf{X}) - \delta_i^m|, \quad (5)$$

式中, $\|\cdot\|_1$ 为 l_1 范数, $|\cdot|$ 为取绝对值; δ 为测点的理论位移值, δ^m 为测点的实测位移值, \mathbf{X} 为待优化反演的参数; N 为测点数.

由定义 3, 容易构造和验证待优化反演参数的等式约束和不等式约束(即集合 C) 为凸集. 由定理 1 可知, 如果凸规划问题具有唯一全局极小点 \mathbf{X}^* , 必须保证目标函数 $f(\mathbf{X})$ 为严格凸函数; 由定理 2 可知, 如果 Hesse 矩阵在 C 上任意点均正定, 那么目标函数 $f(\mathbf{X})$ 在 C 上为严格凸函数. 即如果能证明目标函数 $f(\mathbf{X})$ 的 Hesse 矩阵在 C 上任意点均正定, 那么目标函数 $f(\mathbf{X})$ 为严格凸函数, 此时以目标函数 $f(\mathbf{X})$ 和非空凸集 C 构建的凸规划问题具有唯一全局极小点.

当目标函数(式(5))为 N 个测点的理论值与实测值的差值的 l_1 范数时, 此时, 判定目标函数(式(5))是否为严格凸函数比较繁琐. 为此, 以下将首先重点分析一个测点($N = 1$) 的理论值与实测值的差值的 l_1 范数的目标函数类型, 然后分析多个测点的目标函数类型.

对于一个测点($N = 1$) 来说, 由于式(5)为理论值与实测值的差值的 l_1 范数, 当 $\delta(\mathbf{X}) \geq \delta^m$ 时, $f_1(\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{X}) - \delta^m$; 当 $\delta(\mathbf{X}) < \delta^m$ 时, $f_2(\mathbf{X}) = \delta^m - \delta(\mathbf{X})$. 如果目标函数 $f_1(\mathbf{X})$ 和 $f_2(\mathbf{X})$ 的 Hesse 矩阵在 C 上任意点均正定, 此时判定目标函数 $f(\mathbf{X})$ 为严格凸函数, 即目标函数 $f(\mathbf{X})$ 和非空凸集 C 构建的凸规划问题具有唯一全局极小点; 相反地, 如果目标函数 $f_1(\mathbf{X})$ 或 $f_2(\mathbf{X})$ 的 Hesse 矩阵在 C 上不是任意点都正定, 此时目标函数 $f(\mathbf{X})$ 不是严格凸函数. 显然, 如果 $f_1(\mathbf{X})$ 或 $f_2(\mathbf{X})$ 不是严格凸函数, 那么目标函数 $f(\mathbf{X})$ 和非空凸集 C 构建的凸规划问题将不具有唯一全局极小点.

2 均质地基上重力坝在水压力作用下的水平位移解析解

在水压力作用下, 大坝任一监测点产生水平位移 (δ_H), 它由 3 部分组成: 水压力作用在坝

体上产生的内力使坝体变形引起的位移 δ_{1H} ; 在建基础上产生的内力使地基变形引起的位移 δ_{2H} ; 作用在地基上的水荷载使地基转动所引起的位移 δ_{3H} 。即^[1]

$$\delta_H = \delta_{1H} + \delta_{2H} + \delta_{3H} \quad (6)$$

对于重力坝来说, 一般沿坝轴线切取单宽的坝体作为固接于地基上的变截面悬臂梁。水压力引起均质地基上重力坝位移计算简图如图 1 所示。

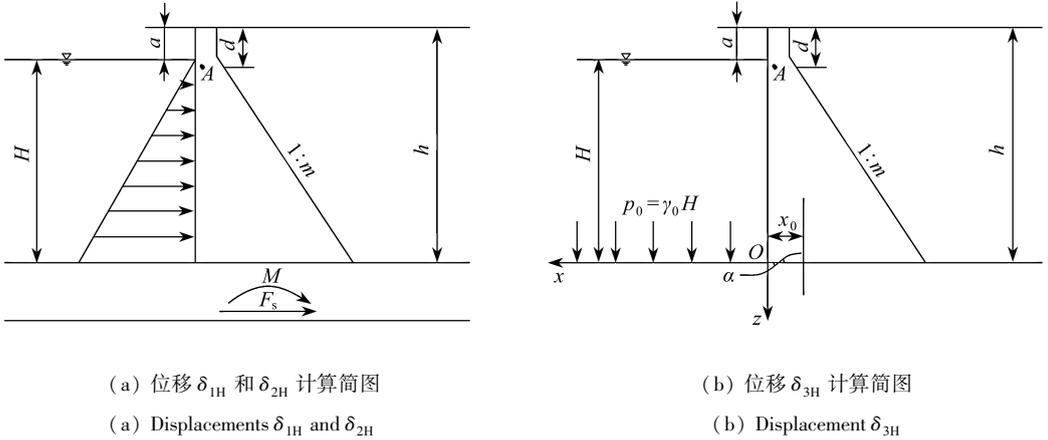


图 1 重力坝位移计算简图

Fig. 1 The calculation diagrams for displacements of gravity dams

吴中如^[1]和黄耀英等^[20]将重力坝剖面简化为上游铅直的三角形楔形体, 推导了均质地基上重力坝在水压力作用下一监测点水平位移解析解:

$$\begin{aligned} \delta_{1H} &= (\delta_{1H})_M + (\delta_{1H})_Q = \\ &= \frac{\gamma_0}{E_c m^3} \left[(h-d)^2 + 6(h-H) \left(d \ln \frac{h}{d} + d - h \right) + \right. \\ &= 6(h-H)^2 \left(\frac{d}{h} - 1 + \ln \frac{h}{d} \right) - \frac{(h-H)^3}{h^2 d} (h-d)^2 \left. \right] + \\ &= \frac{\gamma_0}{m G_c} \left[\frac{h^2 - d^2}{4} - (h-H)(h-d) + \frac{(h-H)^2}{2} \ln \frac{h}{d} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \delta_{2H} &= (\delta_{2H})_M + (\delta_{2H})_{F_s} = \\ &= \frac{4(1-\mu_r^2)\gamma_0 H^3}{3E_r \pi m^2 h^2} (h-d) + \frac{(1-2\mu_r)(1+\mu_r)\gamma_0 H^2}{2E_r m h} (h-d), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\delta_{3H} = - \frac{2\gamma_0 H (1-\mu_r^2) (h-d) \ln x_0}{E_r \pi}, \quad (9)$$

式中, E_c , G_c 分别为坝体混凝土的弹性模量和剪切模量; E_r , μ_r 分别为地基变形模量和 Poisson 比; γ_0 为水的容重; $G_c = E_c / (2(1 + \mu_c))$, μ_c 为坝体混凝土的 Poisson 比; 其余参数含义如图 1 所示。

3 基于单个测点的目标函数的 Hesse 矩阵正定性分析

3.1 不同可能的多参数弹性位移反演分析方案

大坝变形(位移)监测反映了大坝整体变形和受力状态, 且变形监测直观可靠, 国内外普

遍将其作为最主要的监测量.由于运行期的大坝实测变形按其成因分为水压分量 δ_H 、温度分量 δ_T 和时效分量 δ_θ , 因此,在实际大坝工程中,常通过对实测变形资料建立统计模型,分离出水压分量,然后进行混凝土坝体和基岩的弹性参数的反演分析.

目前工程上常采用正、倒垂线或引张线等来监测混凝土大坝的水平位移.现设由图 1 所示测点 A 的实测水平位移资料分离出的水压分量为 δ^m , 坝体和地基的弹性参数为 E_c, μ_c, E_r 和 μ_r , 即待优化反演的参数 $X = [E_c, \mu_c, E_r, \mu_r]$. 由第 2 节,容易计算获得假设材料参数下均质地基上重力坝在水压力作用下的水平位移解析解 $\delta(X)$, 采用单个测点的理论值与实测值的差值的 l_1 范数作为目标函数(式(5)). 由于均质地基上重力坝在水压力作用下的水平位移解析解由 3 部分组成,而且待反演的参数有 4 个,以下对不同可能的多参数弹性位移反演分析方案的唯一性进行分析.

经分析,不同可能的多参数弹性位移反演分析方案有如下 22 种.

1) 不考虑 δ_{3H} , 即 $\delta(X) = \delta_{1H} + \delta_{2H}$, 假设坝体和地基有 2 个弹性参数未知,此时,有如下可能的多参数弹性位移反演分析方案:

方案 1 E_c 和 E_r 未知, μ_c 和 μ_r 为已知参数;

方案 2 E_c 和 μ_c 未知, E_r 和 μ_r 为已知参数;

方案 3 μ_c 和 E_r 未知, E_c 和 μ_r 为已知参数;

方案 4 E_r 和 μ_r 未知, E_c 和 μ_c 为已知参数;

方案 5 E_c 和 μ_r 未知, μ_c 和 E_r 为已知参数;

方案 6 μ_c 和 μ_r 未知, E_c 和 E_r 为已知参数.

2) 考虑 δ_{3H} , 即 $\delta(X) = \delta_{1H} + \delta_{2H} + \delta_{3H}$, 假设坝体和地基有 2 个弹性参数未知,此时,有如下可能的多参数弹性位移反演分析方案:

方案 7 E_c 和 E_r 未知, μ_c 和 μ_r 为已知参数;

方案 8 E_c 和 μ_c 未知, E_r 和 μ_r 为已知参数;

方案 9 μ_c 和 E_r 未知, E_c 和 μ_r 为已知参数;

方案 10 E_r 和 μ_r 未知, E_c 和 μ_c 为已知参数;

方案 11 E_c 和 μ_r 未知, μ_c 和 E_r 为已知参数;

方案 12 μ_c 和 μ_r 未知, E_c 和 E_r 为已知参数.

3) 不考虑 δ_{3H} , 即 $\delta(X) = \delta_{1H} + \delta_{2H}$, 假设坝体和地基有 3 个弹性参数未知,此时,有如下可能的多参数弹性位移反演分析方案:

方案 13 E_c, μ_c 和 E_r 未知, μ_r 为已知参数;

方案 14 E_c, μ_c 和 μ_r 未知, E_r 为已知参数;

方案 15 E_c, E_r 和 μ_r 未知, μ_c 为已知参数;

方案 16 μ_c, E_r 和 μ_r 未知, E_c 为已知参数.

(4) 考虑 δ_{3H} , 即 $\delta(X) = \delta_{1H} + \delta_{2H} + \delta_{3H}$, 假设坝体和地基有 3 个弹性参数未知,此时,有如下可能的多参数弹性位移反演分析方案:

方案 17 E_c, μ_c 和 E_r 未知, μ_r 为已知参数;

方案 18 E_c, μ_c 和 μ_r 未知, E_r 为已知参数;

方案 19 E_c, E_r 和 μ_r 未知, μ_c 为已知参数;

方案 20 μ_c, E_r 和 μ_r 未知, E_c 为已知参数.

5) 不考虑 δ_{3H} , 即 $\delta(\mathbf{X}) = \delta_{1H} + \delta_{2H}$, 假设坝体和地基 4 个弹性参数均未知, 即

方案 21 E_c, μ_c, E_r 和 μ_r 未知.

6) 考虑 δ_{3H} , 即 $\delta(\mathbf{X}) = \delta_{1H} + \delta_{2H} + \delta_{3H}$, 假设坝体和地基 4 个弹性参数均未知, 即

方案 22 E_c, μ_c, E_r 和 μ_r 未知.

由于式(5)为理论值与实测值的差值的 l_1 范数, 对于单个测点来说, 当 $\delta(\mathbf{X}) \geq \delta^m$ 时, $f_1(\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{X}) - \delta^m$; 当 $\delta(\mathbf{X}) < \delta^m$ 时, $f_2(\mathbf{X}) = \delta^m - \delta(\mathbf{X})$. 因此, 目标函数为 $f_1(\mathbf{X})$ 和 $f_2(\mathbf{X})$ 各有 22 种不同方案.

3.2 典型方案下目标函数的 Hesse 矩阵正定性分析

由于不同方案下目标函数的 Hesse 矩阵正定性分析过程较为类似, 以下以方案 21 和方案 22 为例进行分析.

(a) 对于方案 21, 不考虑 δ_{3H} , 即 $\delta(\mathbf{X}) = \delta_{1H} + \delta_{2H}$, 假设坝体和地基 4 个弹性参数均未知. 当 $\delta(\mathbf{X}) \geq \delta^m$ 时, 目标函数 $f_1(\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{X}) - \delta^m = \delta_{1H} + \delta_{2H} - \delta^m$, 其中, $\mathbf{X} = [E_c, \mu_c, E_r, \mu_r]$. 将水平位移解析解代入目标函数有

$$f_1(\mathbf{X}) = \delta_{1H} + \delta_{2H} - \delta^m = \frac{A}{E_c} + \frac{B(1 + \mu_c)}{E_c} + \frac{C(1 - \mu_r^2)}{E_r} + \frac{D(1 - 2\mu_r)(1 + \mu_r)}{E_r} - \delta^m, \quad (10)$$

式中

$$A = \frac{\gamma_0}{m^3} \left[(h-d)^2 + 6(h-H) \left(d \ln \frac{h}{d} + d - h \right) + 6(h-H)^2 \left(\frac{d}{h} - 1 + \ln \frac{h}{d} \right) - \frac{(h-H)^3}{h^2 d} (h-d)^2 \right],$$

$$B = \frac{2\gamma_0}{m} \left[\frac{h^2 - d^2}{4} - (h-H)(h-d) + \frac{(h-H)^2}{2} \ln \frac{h}{d} \right],$$

$$C = \frac{4\gamma_0 H^3}{3\pi m^2 h^2} (h-d),$$

$$D = \frac{\gamma_0 H^2}{2mh} (h-d).$$

对目标函数 $f_1(\mathbf{X})$ 求二阶导数, 计算 Hesse 矩阵, 容易得到

$$\nabla^2 f_1(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{2A + 2B(1 + \mu_c)}{E_c^3} & -\frac{B}{E_c^2} & 0 & 0 \\ -\frac{B}{E_c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2C(1 - \mu_r^2) + 2D(1 - 2\mu_r)(1 + \mu_r)}{E_r^3} & \frac{2C\mu_r + D(1 + 4\mu_r)}{E_r^2} \\ 0 & 0 & \frac{2C\mu_r + D(1 + 4\mu_r)}{E_r^2} & -\frac{2C - 4D}{E_r} \end{bmatrix}.$$

由上述 Hesse 矩阵容易验证,当 $d < h$ 时,一阶顺序主子式 $A_1 > 0$,二阶顺序主子式 $A_2 < 0$,且特征值有正有负,即方案 21 的 Hesse 矩阵为不定矩阵。

由类似的推导,当 $\delta(\mathbf{X}) < \delta^m$ 时,目标函数 $f_2(\mathbf{X}) = \delta^m - \delta(\mathbf{X}) = \delta^m - (\delta_{1H} + \delta_{2H})$,其中, $\mathbf{X} = [E_c, \mu_c, E_r, \mu_r]$ 。容易分析得到,目标函数 $f_2(\mathbf{X})$ 的 Hesse 矩阵为不定矩阵。

(b) 对于方案 22,考虑 δ_{3H} ,即 $\delta(\mathbf{X}) = \delta_{1H} + \delta_{2H} + \delta_{3H}$,假设坝体和地基 4 个弹性参数均未知。当 $\delta(\mathbf{X}) \geq \delta^m$ 时,目标函数 $f_1(\mathbf{X}) = \delta(\mathbf{X}) - \delta^m = \delta_{1H} + \delta_{2H} + \delta_{3H} - \delta^m$,其中, $\mathbf{X} = [E_c, \mu_c, E_r, \mu_r]$ 。将位移解析解代入目标函数有

$$f_1(\mathbf{X}) = \delta_{1H} + \delta_{2H} + \delta_{3H} - \delta^m = \frac{A}{E_c} + \frac{B(1 + \mu_c)}{E_c} + \frac{C'(1 - \mu_r^2)}{E_r} + \frac{D(1 - 2\mu_r)(1 + \mu_r)}{E_r} - \delta^m, \quad (11)$$

式中

$$C' = \frac{4\gamma_0 H^3}{3\pi m^2 h^2}(h - d) - \frac{2\gamma_0 H \ln x_0}{\pi}(h - d)。$$

对目标函数 $f(\mathbf{X})$ 求二阶导数,计算 Hesse 矩阵,容易得到

$$\nabla^2 f_1(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \frac{2A + 2B(1 + \mu_c)}{E_c^3} - \frac{B}{E_c^2} & & 0 & & 0 \\ -\frac{B}{E_c^2} & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2C'(1 - \mu_r^2) + 2D(1 - 2\mu_r)(1 + \mu_r)}{E_r^3} & \frac{2C'\mu_r + D(1 + 4\mu_r)}{E_r^2} & \\ 0 & 0 & \frac{2C'\mu_r + D(1 + 4\mu_r)}{E_r^2} & \frac{-2C' - 4D}{E_r} & \end{bmatrix}。$$

由上述 Hesse 矩阵容易验证,当 $d < h$ 时,一阶顺序主子式 $A_1 > 0$,二阶顺序主子式 $A_2 < 0$,且特征值有正有负,即方案 22 的 Hesse 矩阵为不定矩阵。

由类似的推导,当 $\delta(\mathbf{X}) < \delta^m$ 时,目标函数 $f_2(\mathbf{X}) = \delta^m - \delta(\mathbf{X}) = \delta^m - (\delta_{1H} + \delta_{2H} + \delta_{3H})$,其中, $\mathbf{X} = [E_c, \mu_c, E_r, \mu_r]$ 。容易分析得到,目标函数 $f_2(\mathbf{X})$ 的 Hesse 矩阵为不定矩阵。

3.3 不同可能方案下目标函数的 Hesse 矩阵正定性分析汇总

对上述 22 种可能方案下目标函数的 Hesse 矩阵逐一进行正定性分析,将分析结果汇总如表 1。表中,斜杠前为目标函数 $f_1(\mathbf{X})$ 的分析结果,斜杠后为目标函数 $f_2(\mathbf{X})$ 的分析结果。例如,“positive definite / negative definite”即该方案下,目标函数 $f_1(\mathbf{X})$ 的分析结果为 positive definite,而目标函数 $f_2(\mathbf{X})$ 的分析结果为 negative definite,其余类同。

由表 1 可见,除方案 1($\delta(\mathbf{X}) = \delta_{1H} + \delta_{2H}$,当 $\delta(\mathbf{X}) \geq \delta^m$, E_c 和 E_r 未知, μ_c 和 μ_r 为已知参数)目标函数 $f_1(\mathbf{X})$ 的 Hesse 矩阵为正定矩阵外,其余方案的 Hesse 矩阵均不是正定矩阵。而当 $\delta(\mathbf{X}) < \delta^m$ 时,方案 1 的目标函数 $f_2(\mathbf{X})$ 的 Hesse 矩阵为负定矩阵,因此,方案 1 的目标函数 $f(\mathbf{X})$ 的 Hesse 矩阵也不能保证在非空凸集 C 上的任意点均为正定,即上述可能方案的目标函数 $f(\mathbf{X})$ 均不是严格凸函数。此时,以目标函数 $f(\mathbf{X})$ 和非空凸集 C 构建的凸规划问题不具有唯

一全局极小点,反演分析不唯一。

表 1 不同方案下目标函数的 Hesse 矩阵正定性分析汇总

Table 1 The positive definiteness analysis on Hessian matrices of objective functions under different schemes

theoretical displacement	E_c and E_r	E_c and μ_c	μ_c and E_r	E_r and μ_r	E_c and μ_r	μ_c and μ_r
	unknown	unknown	unknown	unknown	unknown	unknown
$\delta(\mathbf{X}) = \delta_{1H} + \delta_{2H}$	positive definite/ negative definite	indefinite/ indefinite	positive semi-definite/ negative semi-definite	indefinite/ indefinite	indefinite/ indefinite	negative semi-definite/ positive semi-definite
$\delta(\mathbf{X}) = \delta_{1H} + \delta_{2H} + \delta_{3H}$	indefinite/ indefinite	indefinite/ indefinite	negative semi-definite/ positive semi-definite	indefinite/ indefinite	indefinite/ indefinite	indefinite/ indefinite
theoretical displacement	E_c, μ_c and E_r	E_c, μ_c and μ_r	E_c, E_r and μ_r	μ_c, E_r and μ_r	E_c, μ_c, E_r and μ_r	unknown
	unknown	unknown	unknown	unknown	unknown	unknown
$\delta(\mathbf{X}) = \delta_{1H} + \delta_{2H}$	indefinite/ indefinite	indefinite/ indefinite	indefinite/ indefinite	indefinite/ indefinite	indefinite/ indefinite	indefinite/ indefinite
$\delta(\mathbf{X}) = \delta_{1H} + \delta_{2H} + \delta_{3H}$	indefinite/ indefinite	indefinite/ indefinite	indefinite/ indefinite	indefinite/ indefinite	indefinite/ indefinite	indefinite/ indefinite

4 多个测点的目标函数的 Hesse 矩阵正定性讨论

对于 N 个测点 ($N \geq 2$) 的目标函数类型,由于式(5)为理论值与实测值的差值的 l_1 范数,在优化过程中,根据 $\delta_i(\mathbf{X}) \geq \delta_i^m$ 和 $\delta_i(\mathbf{X}) < \delta_i^m$ 进行组合, N 个测点的目标函数 $f(\mathbf{X})$ 存在 2^N 种目标函数 $f_k(\mathbf{X})$ ($k = 1, 2, \dots, 2^N$). 如果目标函数 $f_k(\mathbf{X})$ ($k = 1, 2, \dots, 2^N$) 的 Hesse 矩阵在 C 上任意点均正定,此时判定目标函数 $f(\mathbf{X})$ 为严格凸函数;相反地,如果目标函数 $f_k(\mathbf{X})$ ($k = 1, 2, \dots, 2^N$) 的 Hesse 矩阵在 C 上不是任意点都正定,此时判定目标函数 $f(\mathbf{X})$ 不是严格凸函数。

当 $\delta_i(\mathbf{X}) \geq \delta_i^m$ ($i = 1, 2, \dots, N$) 时, $f_1(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^N (\delta_i(\mathbf{X}) - \delta_i^m)$. 由目标函数表达式的叠加性,容易证明, N 个测点目标函数 $f(\mathbf{X})$ 的 Hesse 矩阵在非空凸集 C 上的任意点不能保证为正定,即目标函数 $f(\mathbf{X})$ 不是严格凸函数.此时,以目标函数 $f(\mathbf{X})$ 和非空凸集 C 构建的凸规划问题不具有唯一全局极小点,因此反演结果不唯一。

5 结 论

1) 本文基于均质地基上重力坝在水压力作用下的位移解析解,建议了一种多参数反演分析唯一性的理论分析方法,即由位移解析解和实测值建立目标函数.然后以目标函数和非空凸集构建一个凸规划问题,通过分析目标函数的 Hesse 矩阵的正定性,证明目标函数是否是严格凸函数,从而辨识了多参数反演分析的唯一性。

2) 由均质地基上重力坝在水压力作用下的位移解析解与坝体和岩基的弹性参数,探讨了 22 种不同可能的多参数弹性位移反演分析方案.分析表明,虽然不考虑 δ_{3H} ,即 $\delta(\mathbf{X}) = \delta_{1H} +$

δ_{2H} , 当 $\delta(X) \geq \delta^m$, 假设 E_c 和 E_r 未知, μ_c 和 μ_r 为已知时, 目标函数的 Hesse 矩阵为正定矩阵, 但是当 $\delta(X) < \delta^m$ 时, 该方案的目标函数的 Hesse 矩阵为负定矩阵. 即上述可能方案的目标函数 $f(X)$ 均不是严格凸函数, 此时, 以目标函数 $f(X)$ 和非空凸集 C 构建的凸规划问题不具有唯一全局极小点, 反演分析不唯一.

参考文献 (References):

- [1] 吴中如. 水工建筑物安全监控理论及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003. (WU Zhongru. *Safety Monitoring Theory & Its Application of Hydraulic Structures*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2003. (in Chinese))
- [2] 姜弘道, 陈国荣, 赵洪臣, 等. 岩土工程中的反分析方法及其应用[J]. 工程力学, 1998, 15(S): 87-99. (JIANG Hongdao, CHEN Guorong, ZHAO Hongchen, et al. Back analysis method in geotechnical engineering and its application[J]. *Engineering Mechanics*, 1998, 15(S): 87-99. (in Chinese))
- [3] KAVANAGH K T, CLOUGH R W. Finite element application in the characterization of elastic solids[J]. *International Journal of Solids Structures*, 1971, 7(1): 11-13.
- [4] GIODA G, MAIER G. Direct search solution of an inverse problem in elastoplasticity: identification of cohesion, friction angle and in situ stress by pressure tunnel tests[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1980, 15(11): 1823-1848.
- [5] 冯夏庭, 周辉, 李邵军, 等. 岩石力学与工程综合集成智能反馈分析方法及应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(9): 1737-1744. (FENG Xiating, ZHOU Hui, LI Shaojun, et al. Integrated intelligent feedback analysis of rock mechanics and engineering problems and its applications[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, 26(9): 1737-1744. (in Chinese))
- [6] 孙钧. 岩石流变力学及其工程应用研究的若干进展[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, 26(6): 1081-1106. (SUN Jun. Rock rheological mechanics and its advance in engineering applications [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, 26(6): 1081-1106. (in Chinese))
- [7] 顾冲时, 李波, 虞鸿, 等. 碾压混凝土坝力学参数的反分析[J]. 中国科学: 技术科学, 2010, 40(6): 651-656. (GU Chongshi, LI Bo, YU Hong, et al. Back analysis of mechanical parameters of roller compacted concrete dam[J]. *Scientia Sinica: Technologica*, 2010, 40(6): 651-656. (in Chinese))
- [8] 张涛, 卢玫, 李博汉, 等. 用于寻源导热反问题的自适应蚁群算法研究[J]. 应用数学和力学, 2014, 35(7): 823-830. (ZHANG Tao, LU Mei, LI Bohan, et al. Research on self-adaptive ant colony algorithm for inverse problem of sourcing heat conduction[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, 35(7): 823-830. (in Chinese))
- [9] 周焕林, 严俊, 余波, 等. 识别含热源瞬态热传导问题的热扩散系数[J]. 应用数学和力学, 2018, 39(2): 160-169. (ZHOU Huanlin, YAN Jun, YU Bo, et al. Identification of thermal diffusion coefficients for transient heat conduction problems with heat sources[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, 39(2): 160-169. (in Chinese))
- [10] 吕爱钟. 巷道围岩参数及地应力可辨识性的探讨[J]. 岩石力学与工程学报, 1988, 7(2): 155-164. (LÜ Aizhong. Discussion of identifiability for parameters of the surrounding rock of a tun-

- nel and in situ stress[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1988, 7(2): 155-164. (in Chinese))
- [11] 张路青, 贾正雪. 弹性位移反分析对地应力、弹模的反演唯一性[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(2): 172-177. (ZHANG Luqing, JIA Zhengxue. Inversion uniqueness of elastic displacement back-analysis for ground stress, elastic modulus and Poisson's ratio[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2001, 23(2): 172-177. (in Chinese))
- [12] 赵同彬, 谭云亮, 张玉明, 等. 巷道工程位移反分析的可反演性评价研究[J]. 采矿与安全工程学报, 2006, 23(2): 224-227, 232. (ZHAO Tongbin, TAN Yunliang, ZHANG Yuming, et al. Invertibility evaluation of back-analysis of roadway displacement[J]. *Journal of Mining & Safety Engineering*, 2006, 23(2): 224-227, 232. (in Chinese))
- [13] 王建, 岑威钧, 张煜. 邓肯-张模型参数反演的不唯一性[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(7): 1054-1057. (WANG Jian, CEN Weijun, ZHANG Yu. Non-uniqueness of back-analyzed parameters of Duncan-Chang model[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2011, 33(7): 1054-1057. (in Chinese))
- [14] 郭科, 陈聆, 魏友华. 最优化方法及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007. (GUO Ke, CHEN Ling, WEI Youhua. *Optimization Method and Its Application*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2007. (in Chinese))
- [15] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001. (YUAN Yaxiang, SUN Wenyu. *Optimization Theory and Method*[M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese))
- [16] 张光澄, 王文娟, 韩会磊, 等. 非线性最优化计算方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005. (ZHANG Guangcheng, WANG Wenjuan, HAN Huilei, et al. *Nonlinear Optimization Calculation Method*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2005. (in Chinese))
- [17] 孙文瑜, 徐成贤, 朱德通. 最优化方法[M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 2010. (SUN Wenyu, XU Chengxian, ZHU Detong. *Optimization Method*[M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2010. (in Chinese))
- [18] 韦增欣, 陆莎. 非线性优化算法[M]. 北京: 科学出版社, 2016. (WEI Zengxin, LU Sha. *Nonlinear Optimization Algorithm*[M]. Beijing: Science Press, 2016. (in Chinese))
- [19] 《数学手册》编写组. 数学手册[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979. (*Mathematics Manual Writing Group. Mathematics Manual*[M]. Beijing: Higher Education Press, 1979. (in Chinese))
- [20] 黄耀英, 沈振中, 王润富, 等. 水荷载引起混凝土重力坝位移的理论研究[J]. 力学与实践, 2010, 32(1): 33-36. (HUANG Yaoying, SHEN Zhenzhong, WANG Runfu, et al. Theoretical study on concrete gravity dam's displacement with water load[J]. *Mechanics in Engineering*, 2010, 32(1): 33-36. (in Chinese))

Theoretical Study on Multi-Parameter Inversion Non-Uniqueness Based on Elastic Displacements of Concrete Gravity Dams

HUANG Yaoying¹, YIN Xiaohui¹, LI Chunguang²

(1. *College of Hydraulic & Environmental Engineering, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443002, P.R.China;*
2. *State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, P.R.China*)

Abstract: Inversion analysis is an important part of the closed-loop system of on-site monitoring, inversion analysis, engineering practice test, forward analysis and prediction, and the back analysis problem in engineering practice mainly involves the parameter back analysis. Aimed at the uniqueness of multi-parameter inversion analysis on concrete gravity dams, the objective functions were established based on the theoretical solution of gravity dam displacements on homogeneous foundation under water pressure, and a convex programming problem was constructed with the objective function and the non-empty convex set. Then the positive definiteness of the Hessian matrix of the objective function was analyzed to verify the strict convexity of the objective function, thereby to identify whether the constructed convex programming problem has a unique global minimum. The analysis on different combinations of elastic constants of dams and rock foundations shows that, when the l_1 norm of the difference between the theoretical value and the measured value is used as the objective function, the Hessian matrix of the objective function cannot be guaranteed to be a positive definite matrix, that is, the multi-parameter elastic displacement inversion analysis of concrete gravity dams does not have a unique global minimum point.

Key words: multi-parameter inversion; inversion based on displacement; convex programming problem; Hessian matrix; uniqueness

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(51779130)