

固定时间梯度流在 ℓ_1 - ℓ_2 范数中的 稀疏重构*

胡登洲, 何兴

(西南大学 电子信息工程学院, 重庆 400700)

摘要: 压缩感知(compressed sensing, CS)是一种全新的信号采样技术,对于稀疏信号,它能够以远小于传统的 Nyquist 采样定理的采样点来重构信号.在压缩感知中,采用动态连续系统,对 ℓ_1 - ℓ_2 范数的稀疏信号重构问题进行了研究.提出了一种基于固定时间梯度流的稀疏信号重构算法,证明了该算法在 Lyapunov 意义上的稳定性并且收敛于问题的最优解.最后通过与现有的投影神经网络算法的对比,体现了该算法的可行性以及在收敛速度上的优势.

关键词: 压缩感知; ℓ_1 - ℓ_2 范数; 固定时间梯度流; 稀疏信号重构

中图分类号: O357.41

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.400202

引言

压缩感知也称为压缩采样或稀疏采样,由 Candès 和 Donoho 于 2006 年正式提出^[1-2].此后压缩感知理论得到了飞速的发展,在信号处理^[3]、压缩感知^[2]、机器学习^[4]等方面得到了广泛的应用.压缩感知理论由信号的稀疏表示、设计观测矩阵、设计信号重构算法三部分构成.稀疏信号或可压缩信号通过一个与变换基不相关的观测矩阵将高维信号投影到一个低维空间上,获得一个低维信号,此信号包含恢复信号所需要的重要信息,然后通过求解优化问题从低维的信号中将原信号高概率重构出来.在稀疏信号重构中,从欠定线性系统 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 中重构稀疏信号 \mathbf{x} ,即求解方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的最稀疏解,可以通过求解 \mathbf{x} 的 0 范数的最小化问题获得:

$$\min_{\mathbf{x} \in R^n} \|\mathbf{x}\|_0, \quad \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (1)$$

其中 \mathbf{A} 是观测矩阵, $\mathbf{A} \in R^{m \times n} (m \ll n)$, 测量向量 $\mathbf{b} \in R^m$, $\|\mathbf{x}\|_0$ 表示向量 \mathbf{x} 中非 0 元素的个数.考虑到问题(1)是一个 NP-hard^[5]问题,在满足一些条件下,可以用 ℓ_1 范数最小化代替 ℓ_0 范数,即求解 ℓ_1 范数最小化问题:

$$\min_{\mathbf{x} \in R^n} \|\mathbf{x}\|_1, \quad \text{s.t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (2)$$

在文献[6]中,为了重构稀疏信号,使得问题(1)与问题(2)等价,则观测矩阵 \mathbf{A} 需满足限制等距性质(restricted isometry property, RIP),观测矩阵 \mathbf{A} 的 RIP 参数 δ_s 满足下式的最小值:

* 收稿日期: 2019-07-02; 修订日期: 2019-07-09

基金项目: 国家自然科学基金(61773320)

作者简介: 胡登洲(1992—),男,硕士生(E-mail: 1076060236@qq.com);

何兴(1986—),男,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: hexingdoc@swu.edu.cn).

$$(1 - \delta_s) \| \mathbf{x} \|_2^2 \leq \| \mathbf{Ax} \|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \| \mathbf{x} \|_2^2,$$

其中 \mathbf{x} 为稀疏信号, $\| \mathbf{x} \|_2$ 是 \mathbf{x} 的 Euclid 范数 (Euclidean norm), s 为稀疏度, $0 \leq s \leq n$ 并且为正整数, $\delta_s \in (0, 1)$, 观测矩阵 \mathbf{A} 满足 s 阶 RIP. 通过对问题 (2) 的求解, 稀疏信号 \mathbf{x} 可以从低维的线性测量值中恢复出来. 在问题 (2) 中如果 \mathbf{b} 受到噪声的干扰如 Gauss 噪声, 可以放宽问题 (2) 的限制条件, 得到下面的问题:

$$\min_{\mathbf{x} \in R^n} \| \mathbf{x} \|_1, \quad \text{s.t.} \quad \| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \|_2^2 < e, \tag{3}$$

其中 $e \geq 0$, 问题 (3) 是一个二次约束线性规划 (quadratically constrained linear program, QCLP) 问题. 对于任意的 $e \geq 0$, 求解问题 (3) 可以近似转化为求解如下问题^[7]:

$$\min_{\mathbf{x} \in R^n} \left(\frac{1}{2} \| \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \|_2^2 + \alpha \| \mathbf{x} \|_1 \right), \tag{4}$$

其中 $\alpha > 0$, 即求解 ℓ_1 - ℓ_2 范数^[8]最小化问题. ℓ_1 - ℓ_2 范数的稀疏信号重构在人脸识别^[9-10]、图像修复^[11]、去噪^[12]、块稀疏模型^[13]中有着广泛的应用. 近些年来, 为了求解问题 (4), 很多算法被提出, 如基追踪去噪算法^[14]、内点算法^[15]、梯度投影稀疏重构方法 (gradient projection for sparse reconstruction, GPSR)^[7]等. 然而, 这些算法的求解效率很大程度上取决于数据的维度, 通常需要大量的迭代, 一般数字计算机的数值迭代算法效率较低, 当遇到拥有大量数据应用程序时会导致很高的计算量和存储需求. 人工神经网络^[16]自提出以来, 由于其大规模并行分布式计算和收敛速度快等优点, 被广泛应用于求解优化问题上. 其中, 递归神经网络 (recurrent neural network, RNN) 被大量用于求解信号处理和稀疏逼近等问题^[17]. 文献 [18] 提出了一种基于连续时间投影神经网络 (projection neural network, PNN) 的稀疏信号重构算法. 文献 [19] 提出了一种基于比例梯度投影的神经网络的稀疏信号重构算法. 以上的这些稀疏信号重构算法仍有进一步提高收敛速度的空间.

本文在文献 [20] 的启发下引入了动态连续系统, 提出了一种基于固定时间梯度流的稀疏信号重构算法, 用于求解 ℓ_1 - ℓ_2 范数最小化问题, 证明了该算法的稳定性, 最后与投影神经网络算法相比, 能够更快地收敛于最优值.

1 预备知识

问题 (4) 是一个不可微的凸问题, 在文献 [21] 中, 通过将变量 \mathbf{x} 分为正数部分和负数部分来求解, 问题 (4) 能够转化为凸二次规划问题, 下面的向量 \mathbf{u} 与 $-\mathbf{v}$ 分别替代正数部分和负数部分:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} > \mathbf{0}, \mathbf{v} > \mathbf{0},$$

其中 $u_i = (x_i)_+, v_i = (-x_i)_+, i = 1, 2, 3, \dots, n$, 这里的 $(\cdot)_+$ 表示 $(x_i)_+ = \max \{x_i, 0\}$. 因此 $\| \mathbf{x} \|_1 = \mathbf{1}_n^T \mathbf{u} + \mathbf{1}_n^T \mathbf{v}$, 其中 $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^T$ 为 n 维全 1 的向量, 问题 (4) 可以等价为

$$\min_{\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n} \left(\frac{1}{2} \| \mathbf{b} - \mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \|_2^2 + \alpha (\mathbf{1}_n^T \mathbf{u} + \mathbf{1}_n^T \mathbf{v}) \right), \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}. \tag{5}$$

进一步地, 问题 (5) 可以重写为

$$\min F(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{Bz} + \mathbf{c}^T \mathbf{z}, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \tag{6}$$

其中

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \alpha \mathbf{1}_{2n} + \begin{pmatrix} -\mathbf{A}^T \mathbf{b} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{b} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & -\mathbf{A}^T \mathbf{A} \\ -\mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{A} \end{pmatrix}.$$

考虑到下面的动态系统:

$$\dot{z} = f(t, z), \quad z(0) = z_0, \quad (7)$$

其中 $x \in R^n$, $f: R \times R^n \rightarrow R^n$ 是一个非线性系统, 假设(7)的平衡点为零点.

定义 1^[22-24] 如果系统(7)全局渐进稳定, 且系统的任意解 $z(t, z_0)$ 在某一有限时间达到平衡点, 则称系统(7)的平衡点 $z = \mathbf{0}$ 是全局有限时间稳定的, 即 $z(t, z_0) = \mathbf{0}, \forall t \geq T(z_0)$, 这里的 $T: R^n \rightarrow R_+ \cup \{0\}$ 为稳定时间函数.

定义 2^[22] 如果系统(7)是全局有限时间稳定, 稳定时间函数 $T(z_0)$ 是有界的, $T_{\max} > 0$, 即对于 $\forall z_0 \in R^n$ 有 $T(z_0) \leq T_{\max}$, 那么系统(7)的平衡点 $z = \mathbf{0}$ 是全局固定时间稳定.

引理 1^[25] 如果存在一个连续的径向无界函数 $V: R^n \rightarrow R_+ \cup \{0\}$, 则有 $V(z) = 0 \Leftrightarrow z = \mathbf{0}$. 系统(7)的任意解 $z(t)$ 满足不等式:

$$V(\dot{z}(t)) \leq - (aV^p(z(t)) + bV^q(z(t)))^k, \quad (8)$$

其中 $a, b, p, q > 0, kp < 1, kq > 1$. 全局固定时间如下:

$$T(z_0) \leq \frac{1}{a^k(1-kp)} + \frac{1}{b^k(kq-1)}. \quad (9)$$

2 固定时间梯度流

不等式约束优化问题(6)可以通过内点法^[15]转化为无约束的优化问题^[25]:

$$\min F(z) = \frac{1}{2} z^T Bz + c^T z - \theta \sum_{i=1}^{2n} \ln z_i, \quad (10)$$

参数 $\theta > 0$, 根据内点法可知参数 $\theta \rightarrow 0$.

引理 2 目标函数(10)与问题(6)逼近误差的上界为 θ .

证明 对于任意的 $\theta > 0$, 目标函数都是凸的, 问题(6)的 Lagrange 函数为

$$L(z, \lambda) = \frac{1}{2} z^T Bz + c^T z + \lambda^T z.$$

取 Lagrange 函数最优解:

$$L(\tilde{z}, \tilde{\lambda}) = \frac{1}{2} \tilde{z}^T B\tilde{z} + c^T \tilde{z} + \tilde{\lambda}^T \tilde{z}.$$

对于 $\theta > 0$, 函数(10)取 z_i^* 为最优解, 可以得知当 $\theta \rightarrow 0$ 时 \tilde{z} 收敛于 z^* .

$$z_i^* \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 2n,$$

则

$$Bz^{*T} + c - \frac{\theta}{z_i} = 0.$$

给出

$$\lambda_i^* = -\frac{\theta}{z_i},$$

因此有

$$L(z^*, \lambda^*) = \frac{1}{2} z^{*T} Bz^* + c^T z^* + \lambda^{*T} z^* = \frac{1}{2} z^{*T} Bz^* + c^T z^* - \theta. \quad (11)$$

从式(11)中可以得出, 取最优点时, 目标函数(10)与问题(6)的逼近误差为 θ .

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{A} & -\mathbf{A}^T \mathbf{A} \\ -\mathbf{A}^T \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{A} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

已知 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 是一个半正定且对称的矩阵, 而 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 也为半正定, 则 \mathbf{B} 为半正定.

$$\nabla^2 F(\mathbf{z}) = \mathbf{B} + \theta \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1^2} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{z_n^2} \end{pmatrix}.$$

所以存在一个 $r > 0$, 使得 $\mathbf{B} + \theta \mathbf{d} \geq r\mathbf{I}$ 成立, $\mathbf{d} = \text{diag}(1/z_1^2, \dots, 1/z_n^2)$, 则目标函数为严格凸函数. 由此可知 $\nabla F(\mathbf{z}^*) = \mathbf{B}\mathbf{z}^{*T} + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}^* = \mathbf{0}$, \mathbf{z}^* 为目标函数 $F(\mathbf{z})$ 唯一的最优点.

有限时间收敛取决于初始条件, 固定时间收敛与初值条件无关, 接下来提出一种基于固定时间梯度流的稳定算法:

$$\dot{\mathbf{z}} = -c_1 \frac{\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}}{\|\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}\|^{(l_1-1)/l_1}} - c_2 \frac{\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}}{\|\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}\|^{(l_2-1)/l_2}}, \quad (12)$$

其中

$$c_1, c_2 > 0, l_1 > 1, 0 < l_2 < 1.$$

引理 3 算法 (12) 的平衡点是问题 (10) 的最优点.

证明 对于算法 (12) 的平衡点即 $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$ 满足

$$-c_1 \frac{\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}}{\|\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}\|^{(l_1-1)/l_1}} - c_2 \frac{\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}}{\|\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}\|^{(l_2-1)/l_2}} = \mathbf{0},$$

则 $\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z} = \mathbf{0}$, 对问题 (10) 求一阶导得到 $\nabla F(\mathbf{z}) = \mathbf{B}\mathbf{z} + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}$, 因此问题 (10) 的 $\nabla F(\mathbf{z}^*) = \mathbf{0}$, 则 $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{0}$, 这就保证了算法 (12) 的平衡点等价于问题 (10) 的最优点 \mathbf{z}^* .

定理 1 当目标函数 $F(\mathbf{z})$ 是严格凸函数, 存在一个 $r > 0$, $\mathbf{B} + \theta \mathbf{d} \geq r\mathbf{I}$, 对于任意的 $\mathbf{z}(0)$ 在固定时间 $T_1 < \infty$, 算法 (12) 的轨迹收敛于最优点 \mathbf{z}^* .

证明 选取 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{z}) = \|\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}\|^2/2$ 并对函数的时间求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{z}) &= \left(\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \frac{\theta}{\mathbf{z}} \right)^T (\mathbf{B} + \theta \mathbf{d}) \dot{\mathbf{z}} = \\ &= \left(\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \frac{\theta}{\mathbf{z}} \right)^T (\mathbf{B} + \theta \mathbf{d}) \left(-c_1 \frac{\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}}{\|\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}\|^{(l_1-1)/l_1}} - \right. \\ &\quad \left. c_2 \frac{\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}}{\|\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}\|^{(l_2-1)/l_2}} \right) = \\ &= -c_1 \left(\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \frac{\theta}{\mathbf{z}} \right)^T (\mathbf{B} + \theta \mathbf{d}) \frac{\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}}{\|\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}\|^{(l_1-1)/l_1}} - \\ &\quad c_2 \left(\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \frac{\theta}{\mathbf{z}} \right)^T (\mathbf{B} + \theta \mathbf{d}) \frac{\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}}{\|\mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \theta/\mathbf{z}\|^{(l_2-1)/l_2}}. \end{aligned}$$

令 $\alpha_1 = 2 - (l_1 - 1)/l_1$ 和 $\alpha_2 = 2 - (l_2 - 1)/l_2$, 因为 $l_1 > 1$, 可得 $1 < \alpha_1 < 2$, 同样地, $0 < l_2 < 1$, 可得 $\alpha_2 > 2$. 将 $\mathbf{B} + \theta \mathbf{d} \geq r\mathbf{I}$ 代入上述等式, 可以得到如下不等式:

$$\dot{V}(\mathbf{z}) \leq -c_1 r \left\| \mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \frac{\theta}{\mathbf{z}} \right\|^{\alpha_1} - c_2 r \left\| \mathbf{B}\mathbf{z}^T + \mathbf{c} - \frac{\theta}{\mathbf{z}} \right\|^{\alpha_2} \leq$$

$$-c_1 r \cdot 2^{\alpha_1/2} V^{\alpha_1/2}(z) - c_2 r \cdot 2^{\alpha_2/2} V^{\alpha_2/2}(z),$$

这里的 $\alpha_1/2 < 1, \alpha_2/2 > 1$. 因此, 对于所有的 $t \geq T_1, V(z(t)) = 0$, 这里

$$\begin{aligned} t &= \int_0^\infty (c_1 r \cdot 2^{\alpha_1/2} V^{\alpha_1/2} + c_2 r \cdot 2^{\alpha_2/2} V^{\alpha_2/2})^{-1} dV = \\ &\int_0^1 (c_1 r \cdot 2^{\alpha_1/2} V^{\alpha_1/2} + c_2 r \cdot 2^{\alpha_2/2} V^{\alpha_2/2})^{-1} dV + \\ &\int_1^\infty (c_1 r \cdot 2^{\alpha_1/2} V^{\alpha_1/2} + c_2 r \cdot 2^{\alpha_2/2} V^{\alpha_2/2})^{-1} dV \leq \\ &\int_0^1 (c_1 r \cdot 2^{\alpha_1/2} V^{\alpha_1/2})^{-1} dV + \int_1^\infty (c_2 r \cdot 2^{\alpha_2/2} V^{\alpha_2/2})^{-1} dV = \\ &\frac{2^{1-\alpha_1/2}}{c_1 r(2-\alpha_1)} + \frac{2^{1-\alpha_2/2}}{c_2 r(\alpha_2-2)}, \end{aligned}$$

所以

$$T_1 \leq \frac{2^{1-\alpha_1/2}}{c_1 r(2-\alpha_1)} + \frac{2^{1-\alpha_2/2}}{c_2 r(\alpha_2-2)}.$$

3 实验结果对比

接下来, 将本文算法与投影神经网络算法^[19]作对比, 仿真过程如下. 原始的稀疏信号 $\mathbf{x} \in R^n, n = 128$, 稀疏度 $s = 5$ 位置是任意产生的, 稀疏信号的非零项从正态 Gauss 分布 (normal Gaussian distribution) 中提取. 然后观测向量 $\mathbf{b} \in R^m, m = 64$, 这里的 $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, 观测矩阵 \mathbf{A} 服从正态 Gauss 分布, $\mathbf{A} \in R^{m \times n}$ (将 \mathbf{A} 中的每列元素都单位标准化). 相对误差的计算方式为 $\xi = \|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|_2^2 / \|\mathbf{x}\|_2^2, \tilde{\mathbf{x}}$ 代表算法重构的信号. 依据文献[14], 参数 α 的选取如下:

$$\alpha = \sigma \sqrt{2 \lg n},$$

其中 $\sigma > 0$, 本实验中选取 $\sigma = 0.005$, 惩罚因子 $\theta = 0.0001$, 对全局收敛性进行分析, 分别绘制了信号重构图、相对误差图、信号收敛图, 如图 1~3 所示.

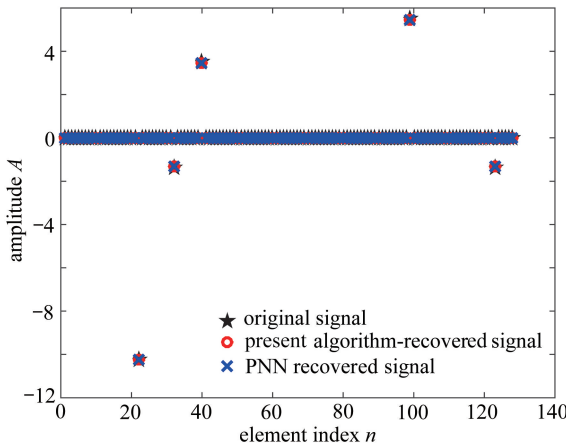


图 1 算法重构信号的对比

Fig. 1 Comparison of algorithm reconstruction signals

在初始条件相同的情况下, 图 1 把本文算法和投影神经网络算法进行比较. 结果表明, 本文算法与投影神经网络算法具有相同的稀疏解, 有 5 个非零分量, 对应于原始稀疏信号 \mathbf{x} 中的

非零分量.

在初始条件相同的情况下,图 2 对比了本文算法与投影神经网络算法重构信号的误差.结果表明,本文算法与投影神经网络算法收敛后的相对误差相同.

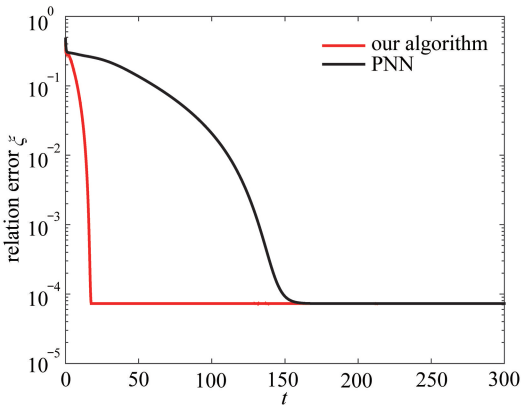


图 2 算法重构的重构误差对比

Fig. 2 Comparison of algorithm reconstruction errors

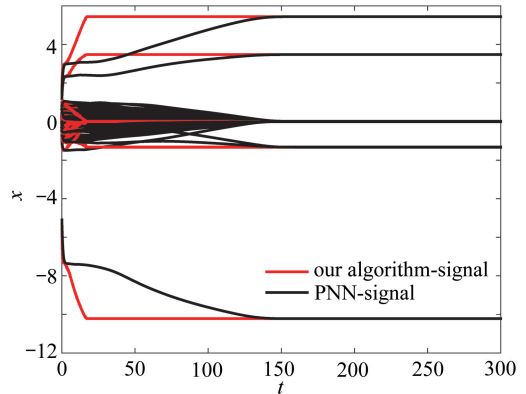


图 3 算法重构的收敛图对比

Fig. 3 Comparison of the convergent graphs reconstructed by the algorithm

图 3 给出了本文算法与投影神经网络算法解的收敛图对比.相对于投影神经网络算法,本文算法收敛更快,能够在较短的时间内达到收敛.

4 结 论

本文对于 ℓ_1 - ℓ_2 范数最小化的稀疏信号重构问题,提出了一种基于固定时间梯度流信号重构的算法,给出了具体过程,通过内点法把问题(6)转化为无约束优化问题(10),用分块矩阵的半正定性证明了问题(10)即目标函数 $F(z)$ 为严格凸函数.证明了问题(12)的平衡点是问题(10)的最优点以及该算法在 Lyapunov 函数上的稳定性.最后通过实验与投影神经网络算法相比较,得出本文提出算法的收敛速度更快.

参考文献 (References):

- [1] CANDÈS E J. Compressive sampling[J]. *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, 2006, **17**(2): 1433-1452.
- [2] DONOHO D. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289-1306.
- [3] COMBETTES P L. Signal recovery by proximal forward-backward splitting[J]. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2005, **4**(4): 1168-1200.
- [4] ZHU J, ROSSET S, HASTIE T. 1-norm support vector machines[C]//*Advances in Neural Information Processing Systems*. Vancouver, Canada: MIT Press, 2003: 49-56.
- [5] NATARAJAN B K. Sparse approximation solutions to linear systems[J]. *SIAM Journal on Computing*, 1995, **24**(2): 227-234.
- [6] YIN P, LOU Y, HE Q, et al. Minimization of $\ell_{1,2}$ for compressed sensing[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2015, **37**(1): 536-563.
- [7] FIGUEIREDO M A T, NOWAK R D, WRIGHT S J. Gradient projection for sparse reconstruction: application to compressed sensing and other inverse problems[J]. *IEEE Journal of Se-*

- lected Topics in Signal Processing*, 2007, **1**(4): 586-597.
- [8] CANDES E, TAO T. Decoding by linear programming[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, **51**(12): 4203-4215.
- [9] YANG A, GANESH A, SASTRY S, et al. Fast ℓ_1 -minimization algorithms and an application in robust face recognition[C]//*Proceedings of the 17th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. Hong Kong, China, 2010.
- [10] ANDRES A M, PADOVANI S, TEPPER M, et al. Face recognition on partially occluded images using compressed sensing[J]. *Pattern Recognition Letters*, 2014, **36**: 235-242.
- [11] MALLAT S. *A Wavelet Tour of Signal Processing; the Sparse Way*[M]. Burlington: Academic Press, 2009.
- [12] BRUCKSTEIN A M, DONOHO D L, ELAD M. From sparse solutions of systems of equations to sparse modeling of signals and images[J]. *SIAM Review*, 2009, **51**: 34-81.
- [13] 陈鹏清, 黄尉. 基于 ℓ_1 - ℓ_2 范数的块稀疏信号重构[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(8): 932-942. (CHEN Pengqing, HUANG Wei. Block-sparse signal recovery based on ℓ_1 - ℓ_2 norm minimization [J]. *Applied Mathematica and Mechanics*, 2017, **38**(8): 932-942. (in Chinese))
- [14] CHEN S S, DONOHO D L, SAUNDERS M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. *SIAM Review*, 2001, **43**(1): 129-159.
- [15] KIM S J, KOH K, LUSTIG M, et al. An interior-point method for large-scale ℓ_1 -regularized least squares[J]. *IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing*, 2007, **51**: 606-617.
- [16] TANK D W, HOPFIELD J J. Simple neural optimization network: an A/D converter, signal decision circuit and a linear programming circuit[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1986, **33**(5): 533-541.
- [17] BALAVOINE A, ROMBERG J, ROZELL C J. Convergence and rate analysis of neural networks for sparse approximation[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, **23**(9): 1377-1389.
- [18] LIU Q, WANG J. L_1 -minimization algorithms for sparse signal reconstruction based on a projection neural network[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, **27**(3): 698-707.
- [19] LIU Y W, HU J F. A neural network for ℓ_1 - ℓ_2 minimization based on scaled gradient projection: application to compressed sensing[J]. *Neurocomputing*, 2016, **173**(3): 988-993.
- [20] GARG K, PANAGOUD D. A new scheme of gradient flow and saddle-point dynamics with fixed-time convergence guarantees[R/OL]. [2019-07-02]. <https://arxiv.org/abs/1808.10474v1>.
- [21] FUCHS J J. Multipath time-delay detection and estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, **47**(1): 237-243.
- [22] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(8): 2106-2110.
- [23] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2000, **38**(3): 751-766.
- [24] ORLOV Y. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems[J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2005, **43**(4): 1253-1271.
- [25] LOPEZ-RAMIREZ F, EFIMOV D, POLYAKOV A, et al. On necessary and sufficient conditions for fixed-time stability of continuous autonomous systems[C]//*17th European Control Conference (ECC)*. Cyprus, 2018.
- [26] LI C, YU X, HUANG T, et al. Distributed optimal consensus over resource allocation network

and its application to dynamical economic dispatch[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, **29**(6): 2407-2417.

Sparse Reconstruction of Fixed-Time Gradient Flow in the ℓ_1 - ℓ_2 Norm

HU Dengzhou, HE Xing

(College of Electronic and Information Engineering, Southwest University, Chongqing 400700, P.R.China)

Abstract: The compressed sensing (CS) is a new signal sampling technology, which can reconstruct signals at sampling points far smaller than those in the traditional Nyquist sampling theorem for sparse signals. For the compressed sensing, a dynamic continuous system was used to study the sparse signal reconstruction of the ℓ_1 - ℓ_2 norm. A sparse signal reconstruction algorithm based on the fixed time gradient flow was proposed, and was proved to be stable in the sense of Lyapunov and to converge to the optimal solution of the problem. Finally, the feasibility and advantages in the convergence speed of this algorithm were demonstrated through comparison between the proposed algorithm and existing projection neural network algorithms.

Key words: compressed sensing; ℓ_1 - ℓ_2 norm; fixed-time gradient flow; sparse signal reconstruction

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(61773320)

引用本文/Cite this paper:

胡登洲, 何兴. 固定时间梯度流在 ℓ_1 - ℓ_2 范数中的稀疏重构[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(11): 1270-1277.

HU Dengzhou, HE Xing. Sparse reconstruction of fixed-time gradient flow in the ℓ_1 - ℓ_2 norm[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(11): 1270-1277.