

基于 Bayes FFT 的螺栓连接结构 模型更新方法*

张 勇¹, 赵 岩¹, 欧阳华江²

(1. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室; 工程力学系, 辽宁 大连 116023;
2. 利物浦大学 工程学院, 利物浦 L693BX, 英国)

摘要: 提出了一种基于 Bayes FFT 的螺栓连接结构模型更新方法,该方法中,通过弹簧和薄层单元模拟螺栓连接,借助子结构技术建立了组合结构动力学方程.进一步地,在 Bayes 理论框架下,由测试时域信号 FFT 变换系数的统计特征构造模型更新了参数的后验概率密度函数,以其负对数似然函数极值为优化目标进行参数更新,采用最大后验估计得到最优估计值,并通过后验概率分布渐近于 Gauss 分布的性质进行参数的不确定性量化.在数值算例中,考虑随机载荷作用下组合悬臂梁结构的模型更新问题,针对两种不同连接模型化方式给出了更新参数的不确定量化,并通过测量功率谱和修正功率谱对比,验证了所提出方法的正确性和有效性.

关键词: 螺栓连接结构; 模型更新; Bayes FFT 方法; 不确定量化

中图分类号: O324

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.400373

引 言

对于具有螺栓连接的组合结构,连接系统的力学特征对结构整体动力学性能具有显著的影响,为了准确刻画连接系统的力学特征,对组合结构进行不确定性模型更新成为结构动力学研究的重要课题^[1-2].通常而言,不确定模型修正方法可分为概率方法和非概率方法.近些年来,基于概率的 Bayes 方法被广泛应用于动力学模型更新领域,该方法不仅考虑了实际测量数据,还将含有经验信息的先验概率考虑进修正参数的概率密度函数中,在不确定性量化时,具有很好的优势^[3].

Bayes 理论最早由 Thomas Bayes 提出,Beck 和 Katafygiotis^[4]通过引入预测误差来描述试验模型和理论模型的差异,首次将 Bayes 理论运用于结构动力学识别中.在此基础上,基于 Bayes 的不确定模型修正方法逐渐成为国内外研究的热点.Vanik 等^[5]的研究表明,根据结构的响应可以获得结构的模型参数和损伤模型的概率分布.Yuen^[6]讨论了健康监测运用于实际结构的不确定性问题,提出了一种可连续在线进行健康监测的 Bayes 概率方法,该方法克服了

* 收稿日期: 2019-12-16; 修订日期: 2020-03-05

基金项目: 国家自然科学基金(11772084;11672052)

作者简介: 张勇(1991—),男,博士生(E-mail: 404247432@qq.com);

赵岩(1974—),男,教授(通讯作者. E-mail: yzhao@dlut.edu.cn).

引用格式: 张勇,赵岩,欧阳华江.基于 Bayes FFT 的螺栓连接结构模型更新方法[J].应用数学和力学,2020,41(8): 866-876.

利用振动数据识别刚度变化时存在的反问题固有的病态条件,随后又发展了基于不完全模态数据的 Bayes 模型分析方法,避免了被测模态与结构模态的不匹配.Ching 等^[7]在 Yuen^[6]的两阶段概率方法的基础上,提出了新的两阶段概率监测方法,将非凹的非线性优化问题转化为两个耦合的二次优化问题,提高了算法的鲁棒性.Yan 等^[8]在两阶段快速 Fourier 谱密度方法的基础上提出了一个快速解析迭代格式,提高了求解最优参数和量化不确定的计算效率.Au 等^[9]利用测量数据的 FFT 转化值的概率统计特性构造后验概率密度函数,提出了基于强迫振动数据的模态特征识别的快速 Bayes FFT 方法,该方法被证明对于分离模态和密集模态也同样适用。

在组合结构中,连接系统通过摩擦接触界面传递各子结构之间的相互作用,在以往螺栓组合结构的模型更新中,为简化问题,通常将连接系统作为确定性参数进行识别,忽略了连接系统本身存在的固有不确定性.针对这一问题,本文基于测试时域信号 FFT 变换系数的统计特征,提出了一种考虑连接不确定性的组合结构模型更新方法.通过 Bayes 推理框架建立参数优化的目标函数,优化了分析得到的参数最优估计值,并利用其 Hesse 阵量化参数不确定性.为提高优化过程计算效率,引入虚拟激励法进行组合结构随机振动重分析.本文在数值算例中,考虑了两种不同连接系统建模方式的组合悬臂梁结构,采用提出的方法进行不确定性模型更新,通过测量功率谱和修正功率谱对比,验证了所提出方法的正确性和有效性。

1 螺栓连接结构的平稳随机振动分析

1.1 螺栓连接描述的力学模型

连接结构的主要作用是将两个或多个独立子结构组合成为整体.对于连接结构的模型化,具有代表性的有弹簧单元和薄层单元两种.图 1 给出了螺栓连接组合梁结构示意图,下面分别介绍连接结构的两种建模方式。

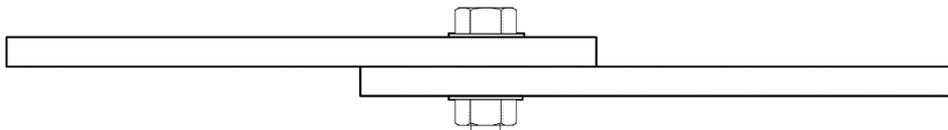


图 1 螺栓连接组合梁结构

Fig. 1 An assembled beam structure with bolted joints

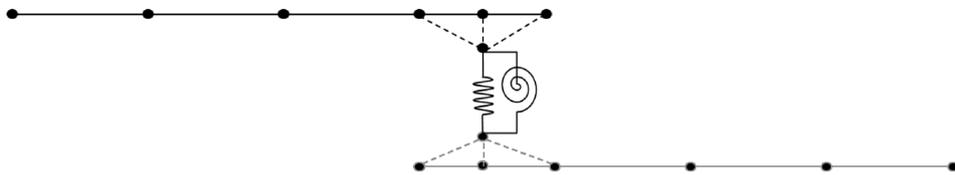


图 2 弹簧单元模拟连接结构示意图

Fig. 2 Bolted joints modelled as a spring

1.1.1 弹簧单元

弹簧单元是通过弹簧耦合子结构中被连接单元节点,该方法适用于接触面积较小,发生小变形的线性结构,Li^[10]用线性平动弹簧和旋转弹簧模拟了接触界面耦合关系.Ingole 和 Chatterjee^[11]同样将连接结构建模为弹簧模型,利用子结构综合法建立了连接系统的频率方程.如图 1 所示的两根梁通过螺栓结构连接,其采用弹簧单元模拟的有限元结构示意图如图 2 所示.首先确定子结构中被连接单元节点,然后通过两个线性弹簧来模拟螺栓结构,连接结构的频响

函数可以表示为

$$\mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} k_1 & \\ & k_2 \end{bmatrix}^{-1}, \quad (1)$$

其中 k_1 和 k_2 分别为线性平动弹簧和旋转弹簧刚度。

1.1.2 薄层单元

图 3 给出了组合结构薄层单元的建模方法,在被连接结构之间添加薄层单元,通过薄层单元来模拟连接接触面。薄层单元是结构之间的一层很薄的实体材料,能够表征连接结构在法向和切向的连接特征,还可以考虑结构之间的无滑移、滑移和界面脱黏等变形^[12]。Ahmadian 等^[13]将具有线弹性本构关系的薄层单元用于接触刚度系数的模型修正。Mayer 和 Gaul^[14]提出了非线性薄层单元,并运用到螺栓连接结构的接触建模中。在有限元模拟中,薄层单元的刚度阵为

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV. \quad (2)$$

对于线弹性行为, \mathbf{D} 可表示为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_2 & & & \\ C_2 & C_1 & C_2 & & & \\ C_2 & C_2 & C_1 & & & \\ & & & G_1 & & \\ & & & & G_2 & \\ & & & & & G_3 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其中

$$C_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_2 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (4)$$

这里 E 为弹性模量, ν 为 Poisson 比, G_i 为剪切模量,在考虑各向同性材料时, $G_1 = G_2 = G_3 = G$ 。

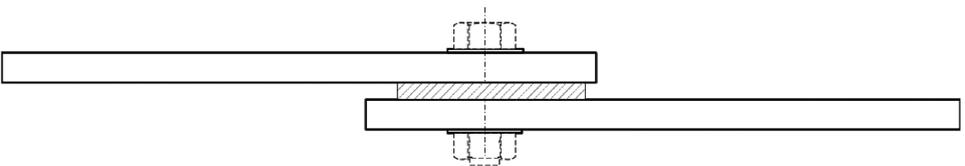


图 3 薄层单元模拟连接结构

Fig. 3 Bolted joints modelled as a thin layer element

1.2 组合结构动力学方程

假设关注的频率不高,可以暂时忽略连接结构的质量。图 4 给出了螺栓连接组合结构的子结构建模示意图, b 、 c 分别代表子结构 1 和子结构 2 中与螺栓连接的自由度; a 和 d 分别表示子结构 1 和子结构 2 中与螺栓结构不连接的其他自由度, 右上角的角标代表子结构编号。由此可以推导出子结构 1 和子结构 2 的动力学响应方程为^[15]

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_a^1 \\ \mathbf{x}_b^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{aa}^1 & \mathbf{H}_{ab}^1 \\ \mathbf{H}_{ba}^1 & \mathbf{H}_{bb}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a^1 \\ \mathbf{f}_b^1 + \mathbf{f}_j^1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_c^2 \\ \mathbf{x}_d^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{cc}^2 & \mathbf{H}_{cd}^2 \\ \mathbf{H}_{dc}^2 & \mathbf{H}_{dd}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_c^2 + \mathbf{f}_j^2 \\ \mathbf{f}_d^2 \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

其中 $\mathbf{x}_a^1, \mathbf{x}_b^1, \mathbf{x}_c^2$ 和 \mathbf{x}_d^2 为位移向量, $\mathbf{f}_a^1, \mathbf{f}_b^1, \mathbf{f}_c^2$ 和 \mathbf{f}_d^2 为分别施加在对应自由度的荷载, \mathbf{f}_j^1 和 \mathbf{f}_j^2 为螺栓在子结构之间的相互作用力, 且有以下关系:

$$\mathbf{f}_j^1 = -\mathbf{f}_j^2. \quad (6)$$

那么 \mathbf{x}_c^2 和 \mathbf{x}_b^1 位移向量的差可以表示为

$$\mathbf{x}_c^2 - \mathbf{x}_b^1 = \mathbf{H}_j \cdot \mathbf{f}_j^1, \quad (7)$$

其中 \mathbf{H}_j 为连接结构的频响函数.

由此,不难推导出整体结构的动力学方程:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_a^1 \\ \mathbf{x}_b^1 \\ \mathbf{x}_c^2 \\ \mathbf{x}_d^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{aa}^1 - \mathbf{H}_{ab}^1 \mathbf{B} \mathbf{H}_{ba}^1 & \mathbf{H}_{ab}^1 - \mathbf{H}_{ab}^1 \mathbf{B} \mathbf{H}_{bb}^1 & \mathbf{H}_{ab}^1 \mathbf{B} \mathbf{H}_{cc}^2 & \mathbf{H}_{ab}^1 \mathbf{B} \mathbf{H}_{cd}^2 \\ \mathbf{H}_{ba}^1 - \mathbf{H}_{bb}^1 \mathbf{B} \mathbf{H}_{ba}^1 & \mathbf{H}_{bb}^1 - \mathbf{H}_{bb}^1 \mathbf{B} \mathbf{H}_{bb}^1 & \mathbf{H}_{bb}^1 \mathbf{B} \mathbf{H}_{cc}^2 & \mathbf{H}_{bb}^1 \mathbf{B} \mathbf{H}_{cd}^2 \\ \mathbf{H}_{cc}^2 \mathbf{B} \mathbf{H}_{ba}^1 & \mathbf{H}_{cc}^2 \mathbf{B} \mathbf{H}_{bb}^1 & \mathbf{H}_{cc}^2 - \mathbf{H}_{cc}^2 \mathbf{B} \mathbf{H}_{cc}^2 & \mathbf{H}_{cc}^2 - \mathbf{H}_{cc}^2 \mathbf{B} \mathbf{H}_{cd}^2 \\ \mathbf{H}_{dc}^2 \mathbf{B} \mathbf{H}_{ba}^1 & \mathbf{H}_{dc}^2 \mathbf{B} \mathbf{H}_{bb}^1 & \mathbf{H}_{dc}^2 - \mathbf{H}_{dc}^2 \mathbf{B} \mathbf{H}_{cc}^2 & \mathbf{H}_{dc}^2 - \mathbf{H}_{dc}^2 \mathbf{B} \mathbf{H}_{cd}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a^1 \\ \mathbf{f}_b^1 \\ \mathbf{f}_c^2 \\ \mathbf{f}_d^2 \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{B} = (\mathbf{H}_{aa}^1 + \mathbf{H}_{bb}^1 + \mathbf{H}_j)^{-1}. \quad (9)$$

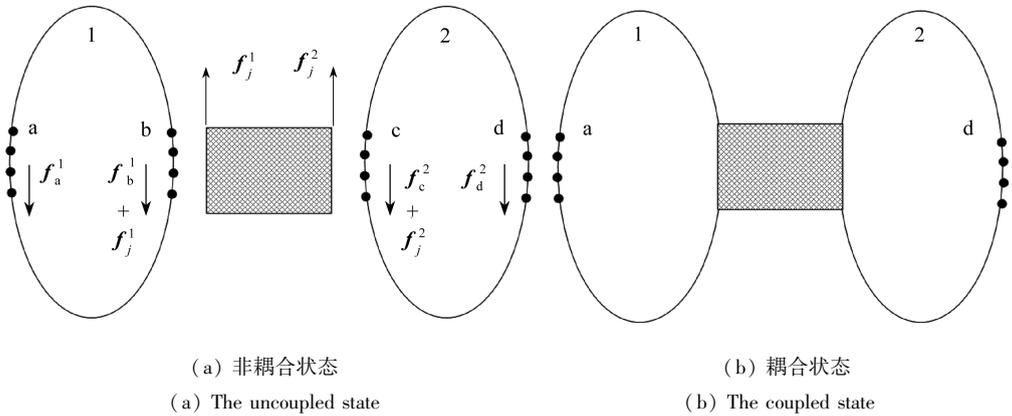


图4 螺栓连接组合结构的子结构示意图

Fig. 4 Substructures of the assembled structure with bolted joints

1.3 组合结构平稳随机振动功率谱分析

假设 n 自由度的线性组合结构体系受 m 点部分相干平稳随机激励 $\mathbf{f}(t)$ 作用,考虑连接系统的参数存在不确定性,则体系的结构运动方程在频域可以表示为

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}, \omega) \mathbf{F}(\omega) = \mathbf{X}(\omega), \quad (10)$$

其中 $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}) = (-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}))^{-1}$ 为组合结构频响函数, $\boldsymbol{\theta}$ 为系统的不确定参数向量, $\mathbf{F}(\omega)$ 是 $\mathbf{f}(t)$ 的 Fourier 变换形式. $\mathbf{F}(\omega)$ 的功率谱矩阵 $\mathbf{S}_{ff}(\omega)$ 已知,表示为如下形式:

$$\mathbf{S}_{ff}(i\omega) = \begin{bmatrix} S_{11}(i\omega) & S_{12}(i\omega) & \cdots & S_{1m}(i\omega) \\ S_{21}(i\omega) & S_{22}(i\omega) & \cdots & S_{2m}(i\omega) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{m1}(i\omega) & S_{m2}(i\omega) & \cdots & S_{mm}(i\omega) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

由于功率谱矩阵必定是一 Hermite 矩阵,所以它可进行如下的分解:

$$\mathbf{S}_{ff}(i\omega) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \boldsymbol{\psi}_j (\bar{\boldsymbol{\psi}}_j)^T, \quad (12)$$

其中上划线 ($\bar{\cdot}$) 与 T 代表取复共轭及矩阵(向量)转置,而 λ_j 及 $\boldsymbol{\psi}_j$ 则是该 Hermite 矩阵的特

征对,它们满足

$$\mathbf{S}_{ff}\boldsymbol{\psi}_j = \lambda_j\boldsymbol{\psi}_j, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (13)$$

$$(\bar{\boldsymbol{\psi}}_j)^T \boldsymbol{\psi}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (14)$$

其中 $r \leq m$ 为输入激励功率谱矩阵 \mathbf{S}_{ff} 的秩。

由虚拟激励法^[16], 只要用式(14)中的每一阶特征对构造下列虚拟激励:

$$\tilde{\mathbf{f}}_j = \bar{\boldsymbol{\psi}}_j \sqrt{\lambda_j} e^{i\omega t}. \quad (15)$$

将式(15)代入方程(10), 很容易将 \mathbf{S}_{ff} 表示为

$$\mathbf{S}_{ff}(i\omega) = \sum_{j=1}^m \overline{(\tilde{\mathbf{f}}_j)} (\tilde{\mathbf{f}}_j)^T. \quad (16)$$

由虚拟激励法可以得到响应功率谱为

$$\mathbf{S}_{xx}(\omega, \boldsymbol{\theta}) = [\bar{\mathbf{H}}(\omega, \boldsymbol{\theta})] \mathbf{S}_{ff} [\mathbf{H}(\omega, \boldsymbol{\theta})]^T, \quad (17)$$

其中 $\mathbf{H}(\omega, \boldsymbol{\theta})$ 为系统的频率响应函数矩阵, 螺栓整体结构的频响函数由式(8)计算得到. 想比于传统的 CQC 和 SRSS 方法, 虚拟激励法的计算效率和计算精度明显较高, 为下一步优化迭代过程节约了计算时间成本, 且本文的计算结构是线性结构, 使用虚拟激励法求解随机响应十分方便。

2 基于 Bayes FFT 识别螺栓连接结构模型更新

2.1 时域测量信号的 FFT 及其系数的概率分布

在平稳随机载荷作用下, 结构的实际测量响应一般是离散时域信号. 假设 n_c 个自由度的测量信号 $\mathbf{x}(t)$ 的离散形式是 $\{\mathbf{x}_j\}_{j=0}^{N-1}$, 采样间隔为 Δt , 其 Fourier 变化形式为^[17]

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \sqrt{\Delta t} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{x}_j e^{-2\pi ijk/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (18)$$

其中 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 的下角标 k 代表频点为 $\omega_k = 2\pi k/(N\Delta t)$, $\sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{x}_j e^{-2\pi ijk/N}$ 是 FFT 系数。

当测量数据足够长的时候, $\hat{\mathbf{X}} = \{\hat{\mathbf{X}}_k\}_{k=0}^{N-1}$ 是渐近 Gauss 且不相关、独立的, 其联合概率等价于边缘概率的乘积^[17]。

将复向量 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 转化为实部和虚部向量 $[\text{Re } \hat{\mathbf{X}}_k; \text{Im } \hat{\mathbf{X}}_k]$, 其渐近满足如下关系:

$$p_{\hat{\mathbf{X}}_k}(\mathbf{x}_k) = (2\pi)^{-n_c} |\mathbf{C}_k|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \text{Re } \mathbf{x}_k \\ \text{Im } \mathbf{x}_k \end{bmatrix}^T \mathbf{C}_k \begin{bmatrix} \text{Re } \mathbf{x}_k \\ \text{Im } \mathbf{x}_k \end{bmatrix}\right\}, \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} E[\text{Re } \hat{\mathbf{X}}_k \text{ Re } \hat{\mathbf{X}}_k] & E[\text{Re } \hat{\mathbf{X}}_k \text{ Im } \hat{\mathbf{X}}_k] \\ E[\text{Im } \hat{\mathbf{X}}_k \text{ Re } \hat{\mathbf{X}}_k] & E[\text{Im } \hat{\mathbf{X}}_k \text{ Im } \hat{\mathbf{X}}_k] \end{bmatrix},$$

这里 $E[\cdot]$ 指取平均数。

令 $\mathbf{S}_k = E[\hat{\mathbf{X}}_k \hat{\mathbf{X}}_k^*]$, $\mathbf{Q}_k = E[\hat{\mathbf{X}}_k \hat{\mathbf{X}}_k^T]$ 代入上式化简为

$$p_{\hat{\mathbf{X}}_k}(\mathbf{x}_k) = \pi^{-n_c} |\mathbf{S}_k|^{-1/2} |\mathbf{P}_k|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \bar{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{S}_k & \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{Q}_k^* & \bar{\mathbf{S}}_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \bar{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix}\right\}, \quad (20)$$

这里 $\bar{\mathbf{x}}_k$ 代表 \mathbf{x}_k 的共轭, 且

$$\mathbf{P}_k = \bar{\mathbf{S}}_k - \mathbf{Q}_k^* \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{Q}_k.$$

当测量数据足够长的时候有 $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{Q}_k = 0$, 进一步简化方程为

$$p_{\hat{\mathbf{X}}_k}(\mathbf{x}_k) = \pi^{-n_c} |\mathbf{S}_k|^{-1} \exp(-\mathbf{x}_k^* \mathbf{S}_k^{-1} \mathbf{x}_k). \quad (21)$$

在数据足够长的假定下, $\{\hat{\mathbf{X}}_k\}_{k=0}^{N-1}$ 中各频率值 $\hat{\mathbf{X}}_k$ 是独立的, 则 $\hat{\mathbf{X}} = \{\hat{\mathbf{X}}_k\}_{k=0}^{N-1}$ 的概率分布为

$$p_{\hat{\mathbf{X}}}(\mathbf{x}_k) = \prod_k p_{\hat{\mathbf{X}}_k}(\mathbf{x}_k). \quad (22)$$

2.2 结构模型更新的 Bayes 估计方法

为了将分析模型嵌入到概率模型中, 引入测量误差, 假定测量值和理论值之间存在以下关系:

$$\mathbf{x}_j^c = \mathbf{x}(j\Delta t, \boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\epsilon}_j, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad (23)$$

其中 \mathbf{x}_j^c 是实际测量信号, $\mathbf{x}(j\Delta t, \boldsymbol{\theta})$ 是组合结构的理论响应, 测量误差模型化为一个零均值的离散限带白噪声随机过程 $\boldsymbol{\epsilon}$.

实际测试样本功率谱均值与理论功率谱和测量误差功率谱存在如下关系^[7]:

$$\lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0+}} E[\hat{\mathbf{X}}_k \hat{\mathbf{X}}_k^*] = \mathbf{S}_{xx}(\omega, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{S}_{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (24)$$

理论功率谱 $\mathbf{S}_{xx}(\omega, \boldsymbol{\theta})$ 可由虚拟激励法按式(17)计算得到.

当测量数据足够长时, 有如下近似:

$$E[\hat{\mathbf{X}}_k \hat{\mathbf{X}}_k^*] = E[\mathbf{S}_k] \approx \mathbf{S}_{xx}(\omega, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{S}_{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (25)$$

由 Bayes 推理可以得到连接结构不确定参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的后验概率分布为

$$p(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathbf{X}}) = \alpha p(\hat{\mathbf{X}} | \boldsymbol{\theta}) p(\boldsymbol{\theta}), \quad (26)$$

其中 $\alpha = p(\hat{\mathbf{X}})^{-1}$ 是与参数无关的归一化参数; $p(\hat{\mathbf{X}} | \boldsymbol{\theta})$ 为 Bayes 估计的似然函数; $p(\boldsymbol{\theta})$ 为参数的先验概率密度函数, 为了充分体现测量信息的价值, 一般取先验函数为均匀分布函数.

似然函数 $p(\hat{\mathbf{X}} | \boldsymbol{\theta})$ 可以由式(22)给出:

$$p(\hat{\mathbf{X}} | \boldsymbol{\theta}) = \prod_k p(\hat{\mathbf{X}}_k | \boldsymbol{\theta}) = \prod_k [\pi^{-n_c} |\mathbf{S}_k|^{-1} \exp(-\hat{\mathbf{X}}_k^* \mathbf{S}_k^{-1} \hat{\mathbf{X}}_k)]. \quad (27)$$

基于后验分布的概率函数 $p(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathbf{X}})$ 对 $\boldsymbol{\theta}$ 进行 Bayes 估计通常采用以下三种方式: ① 以后验密度函数的最大值点作为 $\boldsymbol{\theta}$ 的点估计, 称为最大后验估计 (MAP); ② 以后验分布的中位数作为 $\boldsymbol{\theta}$ 的点估计, 称为后验中位数估计; ③ 以后验分布的均值作为 $\boldsymbol{\theta}$ 的点估计, 称为后验期望估计. 人们常常根据自己关心的值不同, 选取不同的估计方法. 在结构无输入振动特性识别问题中经常采用 MAP, 本文同样选用 MAP 作为 $\boldsymbol{\theta}$ 的点估计. 对此, 可以由式(26)和(27)构造关于参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的目标函数:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = -\ln[p(\boldsymbol{\theta} | \hat{\mathbf{X}})] \propto -\ln[p(\hat{\mathbf{X}} | \boldsymbol{\theta})] = n_c N \ln \pi + \sum_k \ln |\mathbf{S}_k(\boldsymbol{\theta})| + \sum_k \hat{\mathbf{X}}_k^* \mathbf{S}_k(\boldsymbol{\theta})^{-1} \hat{\mathbf{X}}_k, \quad (28)$$

其中 n_c 为测量自由度数目, N 为频率点数目. 最优值 $\boldsymbol{\theta}^*$ 可通过解目标函数的最小值得到.

后验概率分布渐近于 Gauss 分布^[6,17], 其均值是 $\boldsymbol{\theta}^*$, 协方差矩阵是 $J(\boldsymbol{\theta})$ 在 $\boldsymbol{\theta}^*$ 处的 Hesse 阵的逆阵 $\mathbf{H}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_m, \boldsymbol{\theta}_n) |_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^*}$. 目标函数的 Hesse 阵可以通过下式计算:

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}_m, \boldsymbol{\theta}_n) |_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^*} = \left. \frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_m \partial \theta_n} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^*} =$$

$$\sum_k \left[\frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_m \partial \theta_n} (\ln |S_k(\boldsymbol{\theta})| + \widehat{\mathbf{X}}_k^* S_k(\boldsymbol{\theta})^{-1} \widehat{\mathbf{X}}_k) \right] \Bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^*} \cdot \quad (29)$$

在 Bayes 方法的实际运用中,往往由于试验数据有限,修正参数的后验概率密度函数不能近似为 Gauss 分布函数,无法通过参数的 Hesse 矩阵间接计算参数协方差矩阵,或者是修正参数的后验分布呈高维、复杂的概率分布时,对参数的不确定性量化,需要借助 MCMC 抽样方法。本文试验数据足够,通过式(29)就可以得到参数的不确定性方差。

3 数值算例

3.1 连接结构弹簧单元模拟情形

考虑两个相同的梁模型,子结构 A 和子结构 B,通过螺栓连接成悬臂梁结构,如图 5 所示。梁的弹性模量为 $E = 210 \text{ GPa}$; Poisson 比为 $\nu = 0.3$; 每根梁长为 $L_{\text{sub}} = 0.3 \text{ m}$; 密度为 $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$; 截面惯性矩为 $I = 1.0667 \times 10^{-9} \text{ m}^4$; 采用有限元梁模型对各个子结构进行有限元建模,每个节点具有平移和转动自由度,子结构中被连接部分节点分别被约束到两个虚拟节点,虚拟节点之间通过刚度为 k_1 的线性平动弹簧和刚度为 k_2 的线性旋转弹簧连接。

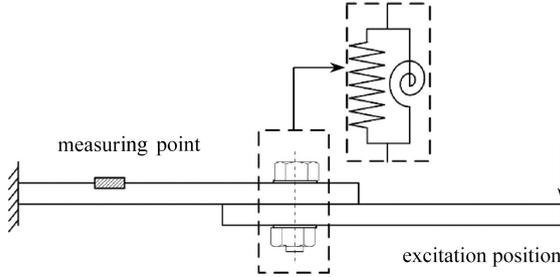


图 5 含弹簧单元的组合结构激励和测量点位置

Fig. 5 Excitation and measuring point positions of the assembled structure with spring elements

关于测量时域信号,可以通过三角级数叠加模拟结构随机时域响应样本,平稳随机时域信号 $x_m(t)$ 可由下式得到^[17]:

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^{N_f} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (30)$$

其中 $A_k^2 = 4S_{xx}(\omega_k) \Delta\omega$, φ_k 为 $[0, 2\pi]$ 范围内均匀分布的随机数。

含测量噪声信号为 $x_m^{\text{noise}}(t) = x_m(t) + \epsilon(t)$, $\epsilon(t)$ 模拟为零均值、方差为 σ_ϵ^2 的限带白噪声信号。 σ_ϵ^2 由噪声强度和响应信号共同决定:

$$\gamma = \frac{\max(S_{xx})}{\sigma_\epsilon^2}, \quad (31)$$

其中 γ 为噪声强度,而噪声的功率谱密度为

$$\sigma_\epsilon^2 = 2 \int_0^{f_u} S_\epsilon df, \quad (32)$$

这里 f_u 是限带白噪声的频率上限。

平稳随机荷载作用于悬臂梁模型自由端,功率谱密度为 $S_f = 1 \text{ N}^2 \cdot \text{s}$, 结构响应功率谱的观察位置为子结构 A 的中点附近。模拟生成含 5% 噪声的时域测量信号及其 FFT 变化得到的功率谱测量样本如图 6 所示。

测量信号的频率区间为 $(0, 1000) \text{ Hz}$, 按照频点数目 512, 1024 和 2048 分为 3 种工况,所

得螺栓参数的识别结果见表 1~3,包括最优估计值 θ^* 、标准差、变异系数和均值偏差。均值偏差的表达式为 $|\theta^* - \theta_i| / \theta_i$ 。从表中可以看出,本文方法在计算频点数目较小的情况下,计算得到最优估计值与目标值之间的偏差不会超过 5%。螺栓参数的最优估计值随着测量频点数目增加越来越接近目标值,而标准差也逐渐减小。参数 k_1 比 k_2 的识别结果更加接近真实值,主要原因是前 1 000 Hz 的功率谱中, k_1 的作用较大,抗干扰能力较强。

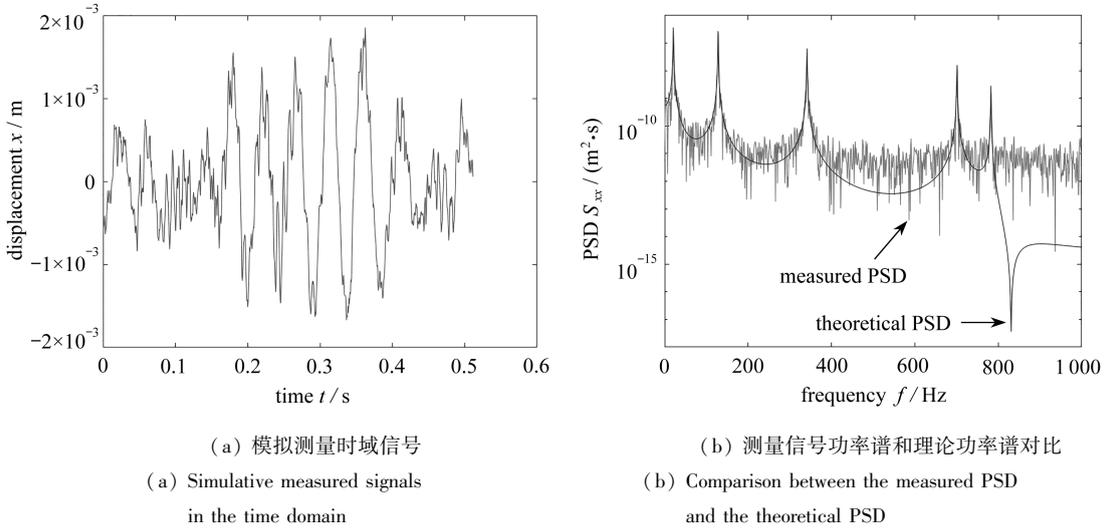


图 6 模拟测量信号

Fig. 6 Simulative measured signals

表 1 螺栓参数识别结果(频率点数为 512)

Table 1 Estimation results of bolt parameters(512 frequency points)

parameter	actual parameter θ_i	optimal estimator θ^*	standard deviation σ	COV $\lambda_c / \%$	mean value bias $\lambda_m / \%$
k_1	1.000 0E6	1.006 8E6	1 233.045 1	0.12	0.68
k_2	1.000 0E4	1.020 0E4	39.797 0	0.39	2.20

表 2 螺栓参数识别结果(频率点数为 1 024)

Table 2 Estimation results of bolt parameters(1 024 frequency points)

parameter	actual parameter θ_i	optimal estimator θ^*	standard deviation σ	COV $\lambda_c / \%$	mean value bias $\lambda_m / \%$
k_1	1.000 0E6	1.002 2E6	742.151 1	0.07	0.22
k_2	1.000 0E4	1.020 0E4	29.311 1	0.29	1.70

表 3 螺栓参数识别结果(频率点数为 2 048)

Table 3 Estimation results of bolt parameters(2 048 frequency points)

parameter	actual parameter θ_i	optimal estimator θ^*	standard deviation σ	COV $\lambda_c / \%$	mean value bias $\lambda_m / \%$
k_1	1.000 0E6	1.001 8E6	522.004 1	0.05	0.18
k_2	1.000 0E4	1.010 0E4	28.923 4	0.29	1.00

3.2 连接结构薄层单元模拟情形

本小节连接结构采用虚拟各向同性材料模拟,如图 7,两根悬臂梁通过单螺栓连接,连接区域有厚度为 $h = 4 \text{ mm}$ 的虚拟材料,其密度 $\rho = 0 \text{ kg/m}^3$,弹性模量 E 和剪切模量 G 为不确定参

数,在有限元模型中,虚拟材料与相邻被连接结构共用节点.图 7 是激励位置和测量点位置,与算例 1 不同,该算例有两个观测点,共同参与参数识别,平稳随机荷载的功率谱密度为 $S_f = 1 \text{ N}^2 \cdot \text{s}$,位置在悬臂梁自由端.

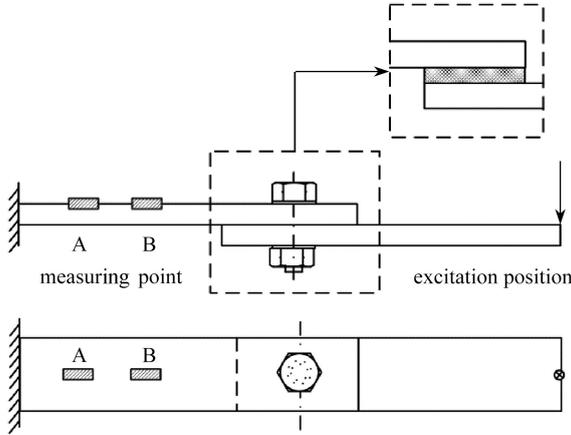


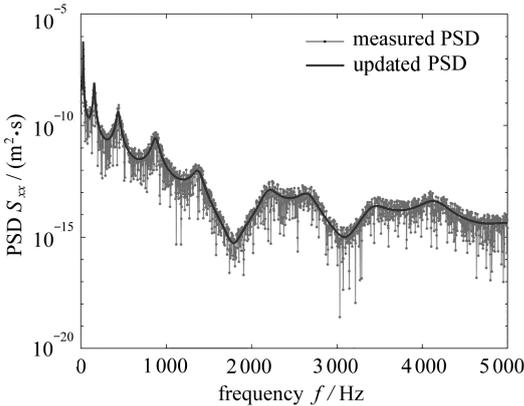
图 7 含薄层单元的组合结构激励和测量点位置

Fig. 7 Excitation and measuring point positions of the assembled structure with thin layer elements

表 4 虚拟材料参数识别结果

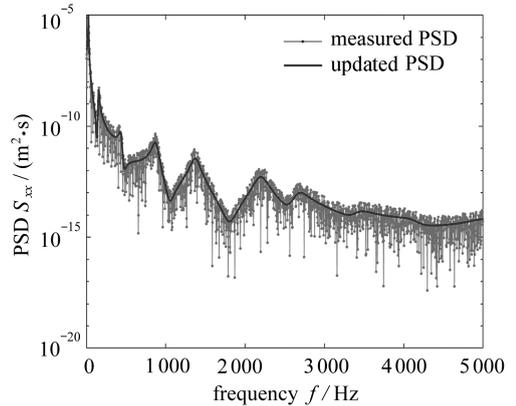
Table 4 Estimation results of virtual material parameters

parameter	actual parameter θ_i	optimal estimator θ^*	standard deviation σ	COV $\lambda_c / \%$	Mean value bias $\lambda_m / \%$
E	7.500 0E8	7.509 6E8	3.633 1E6	0.48	0.13
G	2.777 8E8	2.707 2E8	7.657 7E6	2.83	2.54



(a) 测量点 A

(a) Measuring point A



(b) 测量点 B

(b) Measuring point B

图 8 测量功率谱和修正功率谱对比图

Fig. 8 Comparison between measured PSD and the updated PSD

表 4 是虚拟材料力学特征不确定参数识别结果,可以看出,剪切模量的均值偏差稍大,但依然不足 5%.剪切模量的方差比弹性模量的方差大 6 倍,说明被识别的剪切模量参数离散程度更高,容易受噪声干扰.为了更形象,方便对比测量信号与实际结构随机响应的差别,遂将测量时域信号转化为功率谱,并与优化得到的螺栓参数的结构功率谱进行对比.图 8 是两个测量

点测量功率谱和修正功率谱的对比图,从图中可以得到,修正功率谱基本与测量功率谱吻合。图中的测量功率谱样本,没有进行功率谱平均,并不“光滑”,但是也能通过 Bayes FFT 概率方法准确地识别目标参数,说明该方法对样本的容量没有要求,只是要求单个时间样本足够长。

4 结 论

Bayes 方法目前已经被广泛用于土木结构的健康监测、结构损伤识别等方面,而基于 Bayes 连接结构的不确定模型更新的研究还不多见。本文以组合结构的响应功率谱为测量信息,利用其统计规律建立概率模型,引入 Bayes 推理框架得到不确定参数的后验概率分布函数,通过一般的优化方法求解不确定参数的最优估计值和方差。同时,使用了子结构方法和虚拟激励法求解频域响应,提高了计算效率,为将该方法推广于复杂结构连接结构参数不确定分析奠定了一定的基础。

参考文献(References):

- [1] 姜东, 吴邵庆, 史勤丰, 等. 基于薄层单元的螺栓连接结构接触面不确定性参数识别[J]. 工程力学, 2015, **32**(4): 220-227.(JIANG Dong, WU Shaoqing, SHI Qinfeng, et al. Contact interface parameter identification of bolted joint structure with uncertainty using thin layer element method[J]. *Engineering Mechanics*, 2015, **32**(4): 220-227.(in Chinese))
- [2] 颜王吉, 曹诗泽, 任伟新. 结构系统识别不确定性分析的 Bayes 方法及其进展[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(1): 44-59.(YAN Wangji, CAO Shize, REN Weixin. Uncertainty quantification for system identification utilizing the Bayesian theory and its recent advances[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(1): 44-59.(in Chinese))
- [3] 陈喆, 何欢, 陈国平, 等. 考虑不确定性因素的有限元模型修正方法研究[J]. 振动工程学报, 2017, **30**(6): 921-928.(CHEN Zhe, HE Huan, CHEN Guoping, et al. The research of finite element model updating method considering the uncertainty[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2017, **30**(6): 921-928.(in Chinese))
- [4] BECK J L, KATAFYGIOTIS L S. Updating models and their uncertainties, I: Bayesian statistical framework[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, **124**(4): 455-461.
- [5] VANIK M W, BECK J L, AU S K. Bayesian probabilistic approach to structural health monitoring[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2000, **126**(7): 738-745.
- [6] YUEN K V. *Bayesian Methods for Structural Dynamics and Civil Engineering*[M]. 1st ed. Singapore: John Wiley & Sons, 2010.
- [7] CHING J Y, BECK J L. New Bayesian model updating algorithm applied to a structural health monitoring benchmark[J]. *Structural Health Monitoring*, 2004, **3**(4): 313-332.
- [8] YAN W, KATAFYGIOTIS L S. A novel Bayesian approach for structural model updating utilizing statistical modal information from multiple setups[J]. *Structural Safety*, 2015, **52**: 260-271.
- [9] AU S K, NI Y C. Fast Bayesian modal identification of structures using known single-input forced vibration data[J]. *Structural Control & Health Monitoring*, 2014, **21**(3): 381-402.
- [10] LI W L. A new method for structural model updating and joint stiffness identification[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2002, **16**(1): 155-167.
- [11] INGOLE S B, CHATTERJEE A. Joint stiffness identification: a three-parameter joint model of cantilever beam[J]. *The International Journal of Acoustics and Vibration*, 2017, **22**(1): 3-13.

- [12] JALALI H, HEDAYATI A, AHMADIAN H. Modelling mechanical interfaces experiencing micro-slip/slap[J]. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2011, **19**(6): 751-764.
- [13] AHMADIAN H, JALALI H, MOTTERSHEAD J E, et al. Dynamic modeling of spot welds using thin layer interface theory[C]//*Tenth Intonational Congress on Sound and Vibration*. Stockholm, Sweden, 2003.
- [14] MAYER M H, GAUL L. Segment-to-segment contact elements for modelling joint interfaces in finite element analysis[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2007, **21**(2): 724-734.
- [15] MEHRPOUYA M, GRAHAM E, PARK S S. FRF based joint dynamics modeling and identification[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013, **39**(1/2): 265-279.
- [16] 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京: 科学出版社, 2004. (LIN Jiahao, ZHANG Yahui. *Virtual Excitation Method for Random Vibration*[M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese))
- [17] AU S K. *Operational Modal Analysis: Modeling, Bayesian Inference Uncertainty Laws*[M]. Berlin: Springer, 2017.

Model Updating for Bolted Structures Based on the Bayesian FFT Method

ZHANG Yong¹, ZHAO Yan¹, OUYANG Huajiang²

(1. *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment; Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P.R.China;*

2. *School of Engineering, University of Liverpool, Liverpool L693BX, UK*)

Abstract: A model updating method for bolted joints based on the Bayesian fast Fourier transform (FFT) method was proposed. In this method, the bolted joint was simulated with spring and thin-layer elements, and the dynamic equations for the composite structure were established with the sub-structure technique. The asymptotic distribution of the scaled FFT of the measured data in the time domain was used to formulate the posterior probability distribution function of the bolted parameters, and its negative log function was taken as the objective to conduct the parameter updating. The maximum posterior estimation generates the optimal estimation, and the uncertainty of the parameters was quantified with the asymptotic property of the posterior probability distribution. The developed method was validated in the model updating of a composite cantilever beam under stochastic excitation, where two kinds of jointed modeling methods were given. The comparison between the measured power spectrum and the updated power spectrum demonstrates the effectiveness of the developed method.

Key words: bolted joint; model updating; Bayesian FFT method; uncertainty quantification

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China(11772084;11672052)