

# 基于 SEIR 模型的 COVID-19 疫情防控效果评估和预测\*

陈兴志, 田宝单, 王代文,  
黄飞翔, 付凌燕, 徐浩莹

(西南科技大学 理学院, 四川 绵阳 621010)

**摘要:** 通过对 COVID-19 疫情在中国的传播情况进行分析, 建立了一个 SEIR 流行病模型, 模型中将确诊人群分成已收治和未收治两类, 先从理论上分析了模型的无病平衡点及其稳定性、基本再生数等关键问题; 再结合实际数据, 对武汉封城前和封城后两个阶段疫情的发展趋势进行数值模拟和比较分析, 讨论了模型中一些重要参数对确诊人数的影响; 最后, 针对上述理论分析和数值模拟的结果, 对之前采取的一些控制策略作了分析评估, 同时对疫情后期发展进行预测。

**关键词:** COVID-19; 基本再生数; 无病平衡点; 稳定性; 疫情评估

**中图分类号:** O175.13      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.410139

## Evaluation and Prediction of Prevention and Control Effects of the COVID-19 Epidemic Based on the SEIR Model

CHEN Xingzhi, TIAN Baodan, WANG Daiwen,  
HUANG Feixiang, FU Lingyan, XU Haoying

(School of Science, Southwest University of Science and Technology,  
Mianyang, Sichuan 621010, P.R.China)

**Abstract:** Based on the analysis of the spread of the COVID-19 epidemic in China, a SEIR epidemic model was established with the diagnosed population divided into 2 categories: the admitted population and the non-admitted population. Through theoretical analysis, the basic reproduction number, the disease-free equilibrium of the model and its stability were derived. Further, several numerical simulations and comparative analysis were conducted on the development trend of the epidemic situation in Wuhan before and after the city closure, as well as the influences of some important parameters in the model on the number of diagnosed cases. Finally, according to the results of above theoretical analysis and numerical simulations, some control strategies previously adopted were analyzed and evaluated, and predictions were made for the development of the epidemic.

**Key words:** COVID-19; basic reproduction number; disease-free equilibrium; stability; epidemic assessment

\* 收稿日期: 2020-05-14; 修订日期: 2020-12-31

**基金项目:** 国家级大学生创新创业训练项目(S202010619021); 四川省科技厅应用基础项目(2017JY0336)

**作者简介:** 陈兴志(1997—), 男(E-mail: 1451025961@qq.com);

田宝单(1981—), 男, 教授, 博士(通讯作者. E-mail: tianbaodan@swust.edu.cn).

**引用格式:** 陈兴志, 田宝单, 王代文, 黄飞翔, 付凌燕, 徐浩莹. 基于 SEIR 模型的 COVID-19 疫情防控效果评估和预测[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(2): 199-211.

## 引言

2019年12月以来,湖北省武汉市发现多起病毒性肺炎病例,临床诊断均为病毒性肺炎或肺部感染.2020年1月7日,中国确认了该病毒病原体为一种新型冠状病毒;2020年1月12日,世界卫生组织(WHO)将该新型冠状病毒命名为2019-nCoV;2020年2月11日,世界卫生组织宣布将新型冠状病毒感染的肺炎命名为COVID-19;2020年1月30日,新型冠状病毒肺炎疫情被列为“国际关注的突发公共卫生事件”<sup>[1-3]</sup>.此次疫情爆发突然,面对如此严峻的形式,中国政府迅速采取了一系列措施来控制疫情:武汉市于1月23日开始封城,全国人民自觉居家隔离,所有娱乐场所和商店均关闭,企业延期复工,各大中小学延期开学等等.

由于此次 COVID-19 疫情对中国乃至全世界人民的生产、生活带来了极其严重的影响,一大批专家学者迅速投入到对流行病传播规律及动力学行为的研究之中,例如:Dai等<sup>[4]</sup>根据重庆市和贵州省的报道数据,建立了 COVID-19 的阶段动态模型,估算了重庆和贵州 1 月 25 日至 3 月 2 日 PCIs 的平均强度.杨雨琦等<sup>[5]</sup>使用 SIR 传染病模型,研究了重庆市的疫情发展趋势,为政府疫情防控及相关政策制定提供了重要参考.耿辉等<sup>[6]</sup>建立 SEIR 模型,评价 COVID-19 疫情中相关干预措施的作用.Wu等<sup>[7]</sup>对武汉的疫情规模进行了估计,并预测了国内和全球流行病的公共卫生风险程度,同时考虑了社会和非药物预防干预措施.张云俊等<sup>[8]</sup>对比分析了常用的传染病数学和统计模型,重点研究了已经公开的有关新型冠状病毒的数学模型及其实际效果.曹盛力等<sup>[9]</sup>建立了联合考虑潜伏期传播能力和追踪隔离干预措施的 COVID-19 SEIR 传染病动力学模型,以 2020 年 1 月 23 日至 2 月 24 日湖北省的疫情数据为依据,拟合得到了新建立的修正 SEIR 模型的动力学参数.赵序茅等<sup>[10]</sup>利用大数据回溯新冠肺炎在全国扩散的趋势和传染系数,并基于 SEIR 模型及每天的确诊人数对疫情发展情况进行拟合,得出了基本再生数.

本文正是基于以上背景,针对中国武汉封城前和封城后的 COVID-19 疫情,建立了一个将现有确诊人群划分为现有已收治和现有未收治两类的 SEIR 模型,分别对封城前和封城后两种情况进行分类讨论.根据两段数据及建立的模型,研究了 COVID-19 疫情在中国的发展变化趋势,并对疫情控制情况进行评估分析,预测了疫情后期的发展情况.

## 1 数学模型

根据 COVID-19 的主要流行病学特征,我国各地目前均已开展检疫、隔离、卫生防护等多种公共卫生干预措施<sup>[4]</sup>.因此建模时我们将人群分为易感人群( $S$ )、潜伏人群( $E$ )、现有已收治确诊人群( $I_1$ )、现有未收治确诊人群( $I_2$ )、治愈或死亡移出人群( $R$ ).

本文根据官方每日发布的累计确诊病例、现有确诊病例、新增确诊病例、疑似病例、死亡病例、治愈病例等数据,对武汉封城前后两个阶段,建立了以下的 SEIR 模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \lambda_1 S(I_1 + I_2) - \lambda_2 SE - \mu S, \\ \frac{dE(t)}{dt} = \lambda_1 S(I_1 + I_2) + \lambda_2 SE - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)E - \sigma E, \\ \frac{dI_1(t)}{dt} = \varepsilon_1 E - \omega_1 I_1 - \gamma_1 I_1, \\ \frac{dI_2(t)}{dt} = \varepsilon_2 E - \omega_2 I_2 - \gamma_2 I_2, \\ \frac{dR(t)}{dt} = \gamma_1 I_1 + \gamma_2 I_2 + \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \sigma E - \mu R, \end{cases} \quad (1)$$

其中,具体参数含义及说明见后文表 1.

## 2 主要结果

### 2.1 无病平衡点与基本再生数

令系统(1)的右端为 0,得到系统的无病平衡点为

$$P_0(S^*, 0, 0, 0, 0),$$

其中  $S^* = \Lambda/\mu$ .

若记

$$X = [E \ I_1 \ I_2 \ S \ R]^T, \tag{2}$$

则系统(1)可记为

$$X' = N(x) - M(x), \tag{3}$$

其中

$$N(x) = \begin{pmatrix} \lambda_2 SE + \lambda_1 S(I_1 + I_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$M(x) = \begin{bmatrix} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma)E \\ -\varepsilon_1 E + (\omega_1 + \gamma_1)I_1 \\ -\varepsilon_2 E + (\omega_2 + \gamma_2)I_2 \\ -\Lambda + \lambda_1 S(I_1 + I_2) + \lambda_2 SE - \mu S \\ -\gamma_1 I_1 - \gamma_2 I_2 - \omega_1 I_1 - \omega_2 I_2 - \sigma E + \mu R \end{bmatrix}. \tag{5}$$

下面利用下一代矩阵方法(见文献[11])计算基本再生数.若记

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_2 S^* & \lambda_1 S^* & \lambda_1 S^* \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$V = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 & \omega_1 + \gamma_1 & 0 \\ -\varepsilon_2 & 0 & \omega_2 + \gamma_2 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

则

$$\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1}) = \max_i |\lambda_i| = \frac{\Lambda}{\mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma)} \left( \lambda_2 + \frac{\lambda_1 \varepsilon_1}{(\omega_1 + \gamma_1)} + \frac{\lambda_1 \varepsilon_2}{(\omega_2 + \gamma_2)} \right). \tag{8}$$

## 2.2 无病平衡点的稳定性

### 定理 1

- 1) 当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时,系统(1)的无病平衡点  $P_0(\Lambda/\mu, 0, 0, 0, 0)$  局部渐近稳定;
- 2) 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时,则系统(1)的无病平衡点  $P_0(\Lambda/\mu, 0, 0, 0, 0)$  不稳定.

**证明** 系统(1)在无病平衡点  $P_0(\Lambda/\mu, 0, 0, 0, 0)$  处的 Jacobi 矩阵为

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\frac{\lambda_2 \Lambda}{\mu} & -\frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu} & -\frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2 \Lambda}{\mu} - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma) & \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu} & \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & -(\omega_1 + \gamma_1) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & -(\omega_2 + \gamma_2) & 0 \\ 0 & \sigma & \gamma_1 + \omega_1 & \gamma_2 + \omega_2 & -\mu \end{pmatrix}. \tag{9}$$

令  $\det(\lambda E - J(P_0)) = 0$ ,计算出  $J(P_0)$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2 = -\mu, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  满足三次方程:

$$\begin{vmatrix} \lambda - \frac{\lambda_2 \Lambda}{\mu} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma) & -\frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu} & -\frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu} \\ -\varepsilon_1 & \lambda + (\omega_1 + \gamma_1) & 0 \\ -\varepsilon_2 & 0 & \lambda + (\omega_2 + \gamma_2) \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

即

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0, \quad (11)$$

其中

$$\begin{cases} a_1 = (\omega_1 + \gamma_1) + (\omega_2 + \gamma_2) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma) - \frac{\lambda_2 \Lambda}{\mu} = \\ (\omega_1 + \gamma_1) + (\omega_2 + \gamma_2) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma)(1 - \mathcal{R}_0) + \\ \varepsilon_1 \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu(\omega_1 + \gamma_1)} + \varepsilon_2 \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu(\omega_2 + \gamma_2)}, \\ a_2 = (\omega_2 + \gamma_2)(\omega_1 + \gamma_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma) + (\omega_1 + \gamma_1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma) - \\ \varepsilon_1 \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu} - \varepsilon_2 \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu} - \frac{\lambda_2 \Lambda}{\mu}(\omega_1 + \gamma_1 + \omega_2 + \gamma_2) = \\ (\omega_1 + \gamma_1)(\omega_2 + \gamma_2) + (\omega_1 + \gamma_1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma)(1 - \mathcal{R}_0) + \\ (\omega_2 + \gamma_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma)(1 - \mathcal{R}_0) + \varepsilon_1 \frac{\lambda_1 \Lambda(\omega_2 + \gamma_2)}{\mu(\omega_1 + \gamma_1)} + \varepsilon_2 \frac{\lambda_1 \Lambda(\omega_1 + \gamma_1)}{\mu(\omega_2 + \gamma_2)}, \\ a_3 = (\omega_1 + \gamma_1)(\omega_2 + \gamma_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma) - \varepsilon_2 \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu}(\omega_1 + \gamma_1) - \\ \varepsilon_1 \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu}(\omega_2 + \gamma_2) - \frac{\lambda_2 \Lambda}{\mu}(\omega_1 + \gamma_1)(\omega_2 + \gamma_2) = \\ (\omega_1 + \gamma_1)(\omega_2 + \gamma_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma)(1 - \mathcal{R}_0). \end{cases} \quad (12)$$

因此,当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时,有

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 = (\omega_1 + \gamma_1) + (\omega_2 + \gamma_2) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma)(1 - \mathcal{R}_0) + \\ &\varepsilon_1 \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu(\omega_1 + \gamma_1)} + \varepsilon_2 \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu(\omega_2 + \gamma_2)} > 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 = \left( (\omega_1 + \gamma_1) + (\omega_2 + \gamma_2) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma)(1 - \mathcal{R}_0) + \right. \\ &\left. \varepsilon_1 \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu(\omega_1 + \gamma_1)} + \varepsilon_2 \frac{\lambda_1 \Lambda}{\mu(\omega_2 + \gamma_2)} \right) \left( (\omega_1 + \gamma_1)(\omega_2 + \gamma_2) + \right. \\ &(\omega_1 + \gamma_1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma)(1 - \mathcal{R}_0) + (\omega_2 + \gamma_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma)(1 - \mathcal{R}_0) + \\ &\left. \varepsilon_1 \frac{\lambda_1 \Lambda(\omega_2 + \gamma_2)}{\mu(\omega_1 + \gamma_1)} + \varepsilon_2 \frac{\lambda_1 \Lambda(\omega_1 + \gamma_1)}{\mu(\omega_2 + \gamma_2)} \right) - \\ &(\omega_1 + \gamma_1)(\omega_2 + \gamma_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma)(1 - \mathcal{R}_0) > 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2 = (\omega_1 + \gamma_1)(\omega_2 + \gamma_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma)(1 - \mathcal{R}_0) \Delta_2 > 0, \quad (15)$$

因此,当系统(1)的基本再生数  $\mathcal{R}_0 < 1$  时,根据 Routh-Hurwitz 判据(见文献[12])可知,系统(1)的无病平衡点  $P_0(\Lambda/\mu, 0, 0, 0, 0)$  局部渐近稳定。

当系统(1)的基本再生数  $\mathcal{R}_0 > 1$  时,

$$a_3 = (\omega_1 + \gamma_1)(\omega_2 + \gamma_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma)(1 - \mathcal{R}_0). \quad (16)$$

根据 Vieta 定理,  $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 = -a_3 > 0$ , 从而  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  中至少有一个为正, 因而系统(1)的无病平衡点  $P_0(\Lambda/\mu, 0, 0, 0, 0)$  不稳定.

下面, 我们对无病平衡点  $P_0(\Lambda/\mu, 0, 0, 0, 0)$  的全局渐近性质进行讨论.

**定理 2** 若  $\mathcal{R}_0 < 1$  时, 则系统(1)的无病平衡点  $P_0(\Lambda/\mu, 0, 0, 0, 0)$  是全局渐近稳定的.

**证明** 构造如下的 Lyapunov 函数:

$$V(E, I_1, I_2) = \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma} \left( \lambda_2 + \frac{\lambda_1 \varepsilon_1}{\omega_1 + \gamma_1} + \frac{\lambda_1 \varepsilon_2}{\omega_2 + \gamma_2} \right) E + \frac{\lambda_1}{\omega_1 + \gamma_1} I_1 + \frac{\lambda_2}{\omega_2 + \gamma_2} I_2. \quad (17)$$

因此, 当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时, 有

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} &= \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma} (\lambda_1 \lambda_2 S(I_1 + I_2) + \lambda_2^2 SE - \lambda_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma) E) + \frac{\lambda_1^2 \varepsilon_1}{\omega_1 + \gamma_1} S(I_1 + I_2) + \\ &\quad \frac{\lambda_1 \varepsilon_1}{\omega_1 + \gamma_1} \lambda_2 SE - \frac{\lambda_1 \varepsilon_1}{\omega_1 + \gamma_1} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma) E + \frac{\lambda_1 \varepsilon_2}{\omega_2 + \gamma_2} \lambda_1 S(I_1 + I_2) + \frac{\lambda_1 \varepsilon_2}{\omega_2 + \gamma_2} \lambda_2 SE - \\ &\quad \frac{\lambda_1 \varepsilon_2}{\omega_2 + \gamma_2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma) E + \frac{\lambda_1}{\omega_1 + \gamma_1} (\varepsilon_1 E - \omega_1 I_1 - \gamma_1 I_1) + \frac{\lambda_2}{\omega_2 + \gamma_2} (\varepsilon_2 E - \omega_2 I_2 - \gamma_2 I_2) = \\ &\quad (\lambda_1 S(I_1 + I_2) + \lambda_2 SE) \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \sigma} \left( \lambda_2 + \frac{\lambda_1 \varepsilon_1}{\omega_1 + \gamma_1} + \frac{\lambda_1 \varepsilon_2}{\omega_2 + \gamma_2} \right) - \lambda_1 (I_1 + I_2) - \lambda_2 E = \\ &\quad (\lambda_2 E + \lambda_1 (I_1 + I_2)) (\mathcal{R}_0 - 1) < 0, \end{aligned} \quad (18)$$

且  $dV/dt|_{(1)} = 0$ , 当且仅当  $\mathcal{R}_0 = 1$ ; 又当  $E^* = I_1^* = I_2^* = 0$  时, 得到  $\mathcal{R}_0 = 0, S^* = \Lambda/\mu$ .

因此, 当系统(1)的基本再生数满足  $\mathcal{R}_0 < 1$  时, 根据 LaSalle 不变原理(见文献[13])和 Lyapunov 稳定性定理(见文献[14])可知, 系统(1)的无病平衡点  $P_0(\Lambda/\mu, 0, 0, 0, 0)$  全局渐近稳定.

## 3 模型应用

### 3.1 数据来源与说明

本文以武汉市总人口约 11 081 000 人为初始易感人群总数作为研究对象<sup>[15]</sup>. 通过国家卫生健康委员会网站<sup>[16]</sup>以及湖北省卫生健康委员会网站<sup>[15]</sup>公开发布的官方数据为原始数据, 收集了 2020 年 1 月 10 日以后每日的疫情数据, 包括确诊人群、疑似人群、死亡人群、治愈人群等数据.

本文考虑的潜伏期和人们被隔离的时间为 14 天<sup>[3,17]</sup>.

**注 1** 钟南山团队根据 1 099 个病例, 提出中位潜伏期为 4 天(四分位间距为 2 到 7)<sup>[18]</sup>. Backer 团队根据 88 例确诊病例的旅行史和症状表征, 估计平均潜伏期为 6.4 天, 潜伏期范围从 2.1 天到 11.1 天<sup>[19]</sup>.

鉴于 2020 年 2 月 12 日官方首次将临床诊断病例加入到确诊人群中, 造成了数据的突然增加, 我们将该日的临床诊断病例按比例加入到之前每一日的确诊人群中. 同时, 患者日益快速增加致使当地医院床位变得供不应求, 床位和医护人员紧张, 导致一些确诊患者无法得到医院的及时收治和医治, 只能自己居家隔离. 因此我们在分析过程中, 将确诊人群分为已收治和未收治两种情形进行讨论. 此外, 本文根据国家卫生健康委员会网站以及湖北省卫生健康委员会网站公开的医院床位数, 按比例将确诊人群分为已收治确诊人群和未收治确诊人群, 其中已收治确诊人群约占总数的 40%, 未收治确诊人群约占总数的 60%. 最后, 本文将数据集分为两个部分: 2020 年 1 月 10 日至 1 月 23 日作为封城前数据, 2020 年 1 月 24 日及以后作为封城后数据.

### 3.2 数值分析

本小节利用 MATLAB 软件对模型(1)进行数值模拟, 我们通过数值拟合并结合相关资料, 给出了相关参数的具体取值. 其中治愈率、死亡率从实际数据中计算得到, 自然死亡率从国家统计局网站中查阅得到, 其余参数均通过数值拟合.

经计算,封城前治愈率为  $\gamma_0 = 0.173\ 433\ 481$ ,死亡率  $\omega_0 = 0.025\ 089\ 344$ ,因此取已收治确诊人群的治愈率  $\gamma_{10} = 50\% \cdot \gamma_0$ ,死亡率  $\omega_{10} = 40\% \cdot \omega_0$ ;未收治确诊人群的治愈率  $\gamma_{20} = 20\% \cdot \gamma_0$ ,死亡率  $\omega_{20} = 70\% \cdot \omega_0$ .  
封城后治愈率为  $\gamma = 0.632\ 859\ 962$ ,死亡率  $\omega = 0.031\ 855\ 658$ ,因此我们取已收治确诊人群的治愈率  $\gamma_1 = 95\% \cdot \gamma$ ;死亡率  $\omega_1 = 45\% \cdot \omega$ ;未收治确诊人群的治愈率  $\gamma_2 = 90\% \cdot \gamma$ ,死亡率  $\omega_2 = 90\% \cdot \omega$ .具体参数数值见表 1.

表 1 模型参数说明及取值  
Table 1 Model parameter descriptions and values

parameter	meaning	value before the city closure	value after the city closure	setting basis
		$V_1$	$V_2$	
$\Lambda$	constant input rate	0.010 000 00	0.100 000 00	numerical simulation
$\lambda_1$	disease transmission rate	0.000 215 00	0.000 029 00	numerical simulation
$\lambda_2$	disease transmission rate	0.000 240 00	0.000 030 00	numerical simulation
$\varepsilon_1$	conversion rate of $I_1$	0.450 000 00	0.700 000 00	numerical simulation
$\varepsilon_2$	conversion rate of $I_2$	0.650 000 00	0.999 500 00	numerical simulation
$\sigma$	cure withdrawal rate of $I_1$	0.009 900 00	0.010 000 00	numerical simulation
$\omega_1$	mortality rate of $I_1$	0.010 035 74	0.014 335 05	calculated from actual data
$\omega_2$	mortality rate of $I_2$	0.017 562 54	0.028 670 09	calculated from actual data
$\gamma_1$	cure rate of $I_1$	0.086 716 74	0.601 216 96	calculated from actual data
$\gamma_2$	cure rate of $I_2$	0.034 686 70	0.569 573 97	calculated from actual data
$\mu$	natural mortality	0.000 019 56	0.000 019 56	ref. [20]

3.2.1 封城前模型(1)的数值模拟

根据国家卫生健康委员会和湖北省卫生健康委员会发布的疫情实际数据,选取初值为

$$S(0) = 110\ 810, E(0) = 50, R(0) = 3, I_1(0) = 20, I_2(0) = 30,$$

其中  $S(0)$  的取值与文献[15]中的取值相同,百人;  $E(0), R(0), I_1(0), I_2(0)$  的取值与国家卫生健康委员会和湖北省卫生健康委员会初次发布的疫情实际数据相同.当模型(1)的参数取如表 1 中的具体数值时,可以得到  $\mathcal{R}_0 = 1.803\ 0$ .

因此,由  $\mathcal{R}_0 > 1$  可知,COVID-19 疫情正处于自然爆发阶段,疫情将进一步蔓延传播,将会有更多的人感染上新冠肺炎.所以必须采取措施对疫情进行控制和防范.其中,封城前模型拟合数据和实际数据以及两类数据对比如图 1 所示.图 1(a) 为封城前现有已收治确诊人群数值拟合结果与实际数据对比图;图 1(b) 为封城前现有未收治确诊人群数值拟合结果与实际数据对比图.系统(1)的数值拟合结果和原始数据图像基本重合,具有相同的变化趋势,均呈现出指数变化的上升趋势.可以看出在封城之前,由于未对疾病采取控制和预防措施,疾病处于自然传播阶段,疫情扩散蔓延,导致确诊人数急剧上升.

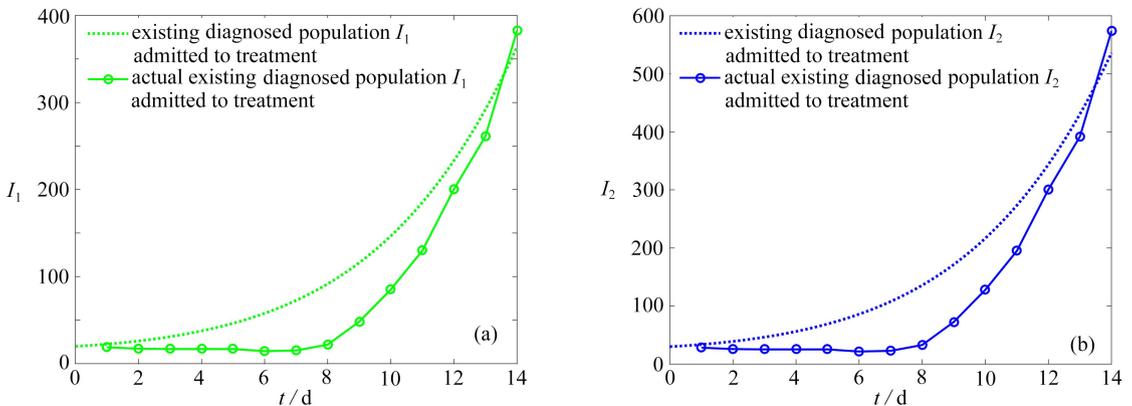


图 1 封城前确诊人群模型拟合数据与原始数据对比图

Fig. 1 Comparison between the fitted data and the original data of the diagnosed crowd model before the city closure

### 3.2.2 封城后模型(1)的数值模拟

根据国家卫生健康委员会和湖北省卫生健康委员会发布的疫情实际数据,选取初值为

$$S(0) = 110\ 810, E(0) = 1\ 965, R(0) = 79, I_1(0) = 629, I_2(0) = 944,$$

其中  $S(0), E(0), R(0), I_1(0), I_2(0)$  的取值方法与 3.2.1 小节相同.当模型(1)的参数取如表(1)中的数值是,我们可以得到  $\mathcal{R}_0 = 0.333\ 2$ .

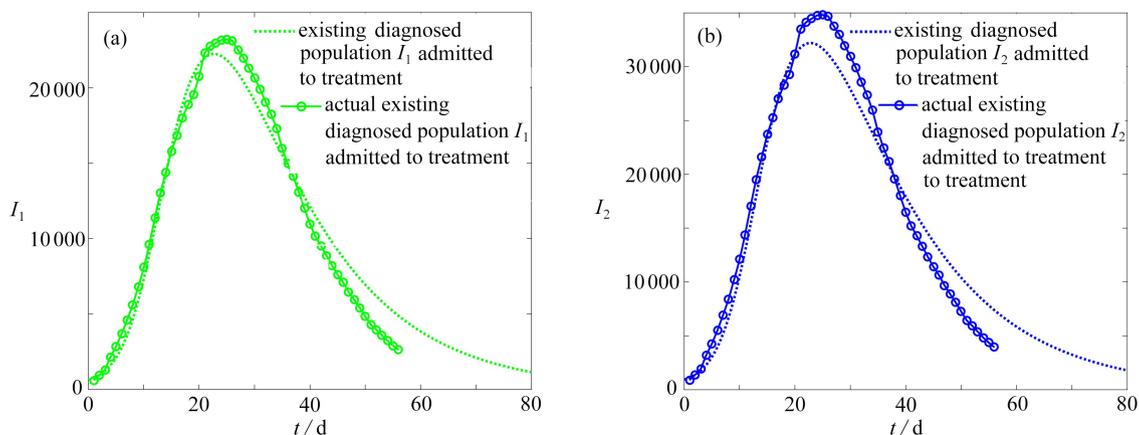


图 2 封城后确诊人群模型拟合数据与原始数据对比图

Fig. 2 Comparison between the fitted data of the diagnosed crowd model and the original data after the city closure

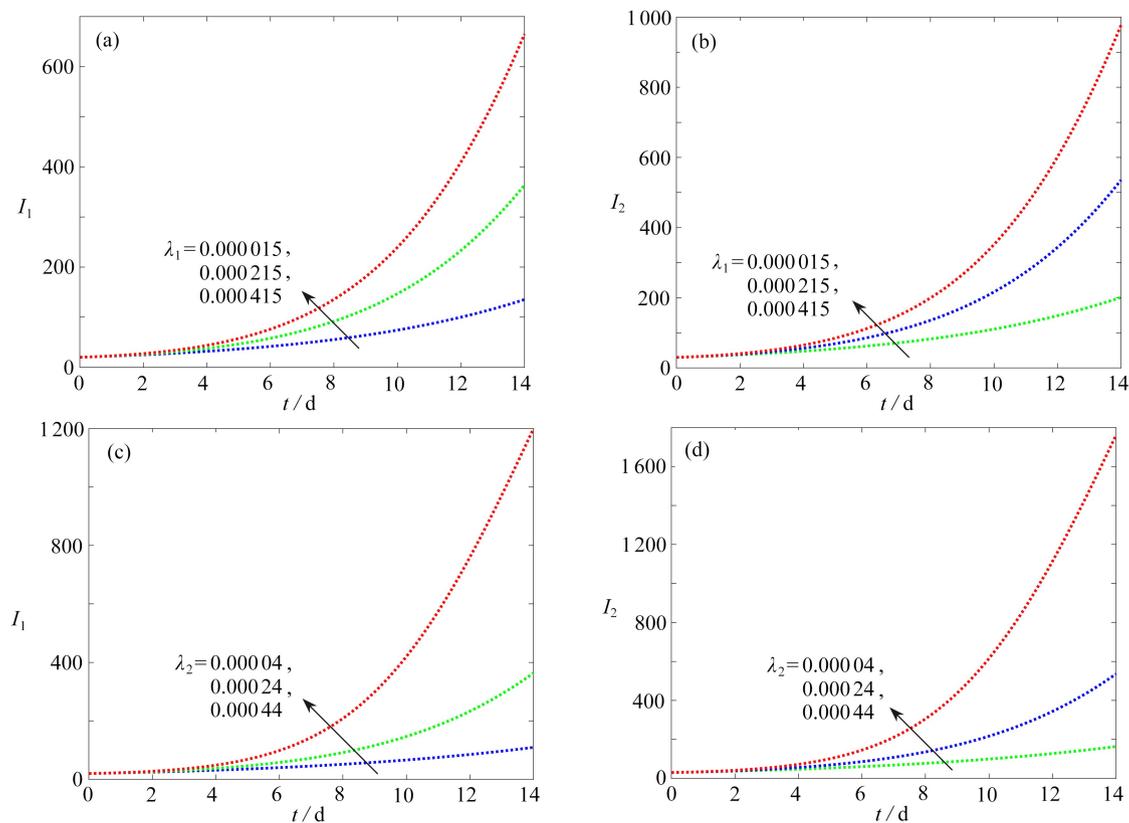


图 3 封城前参数  $\lambda_i$  对确诊人群  $I_i$  的灵敏度分析

Fig. 3 Sensitivity analysis of parameter  $\lambda_i$  to diagnosed population  $I_i$  before the city closure

因此,由  $\mathcal{R}_0 < 1$  可知,COVID-19 疫情得到了有效的控制,相对于封城前的数据而言,基本再生数  $\mathcal{R}_0$  有了较大的下降.其中,封城后确诊人群模型拟合数据和原始数据以及两类数据对比如图 2 所示.图 2(a) 为封城后现有已收治确诊人群系统(1)数值拟合结果与实际数据对比图;图 2(b) 为封城后现有未收治确诊人群系统(1)数值拟合结果与实际数据对比图.由图可知,系统(1)的数值拟合结果和原始数据结果图像趋于重

合.确诊人数在一段上升期后逐渐趋于平缓甚至下降,没有进一步上升的趋势.这说明武汉市的封城措施对疫情的防控起到了至关重要的作用,并且政府调配大量的医务人员和医疗物资对疫情进一步蔓延起到了良好的抑制作用,疫情得到了较好的控制.由于确诊患者不断地被治愈或者移除,从图像来看,确诊人群最后将呈下降趋势,虽然疫情仍然将持续存在,但是在未来的一段时间内,疫情将会逐渐减缓直至消失.

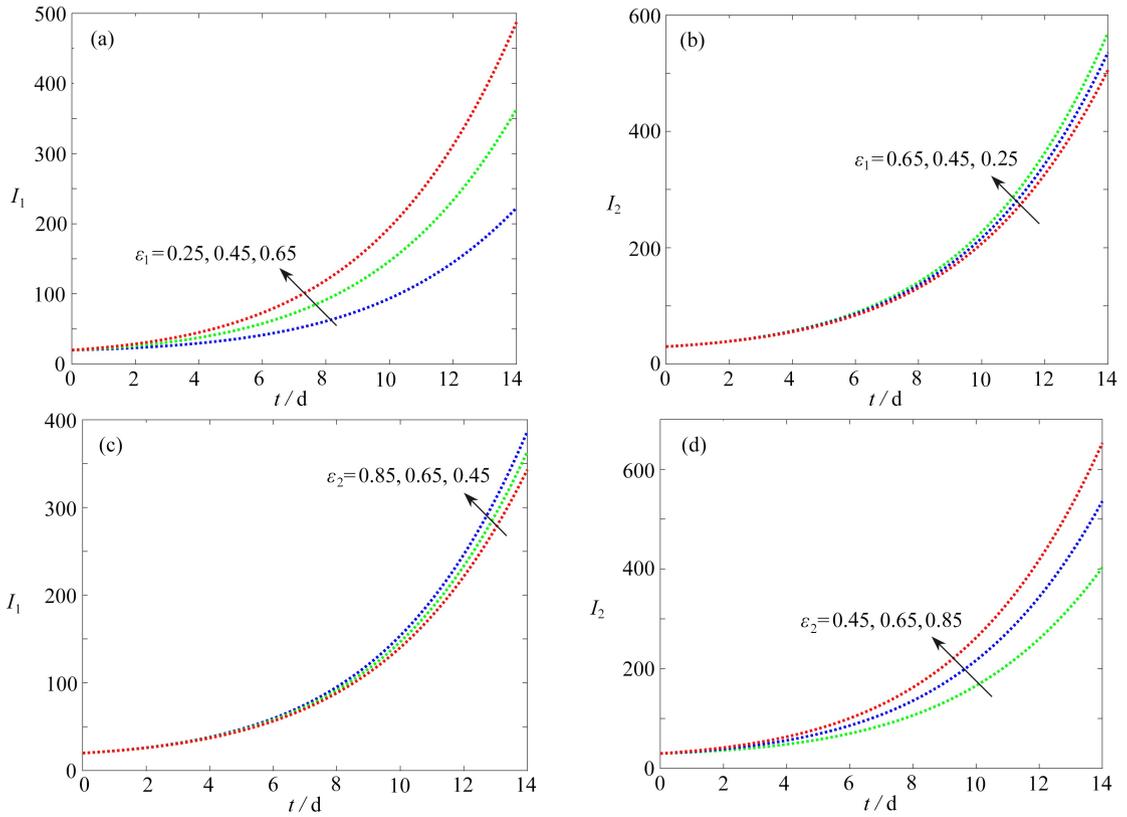


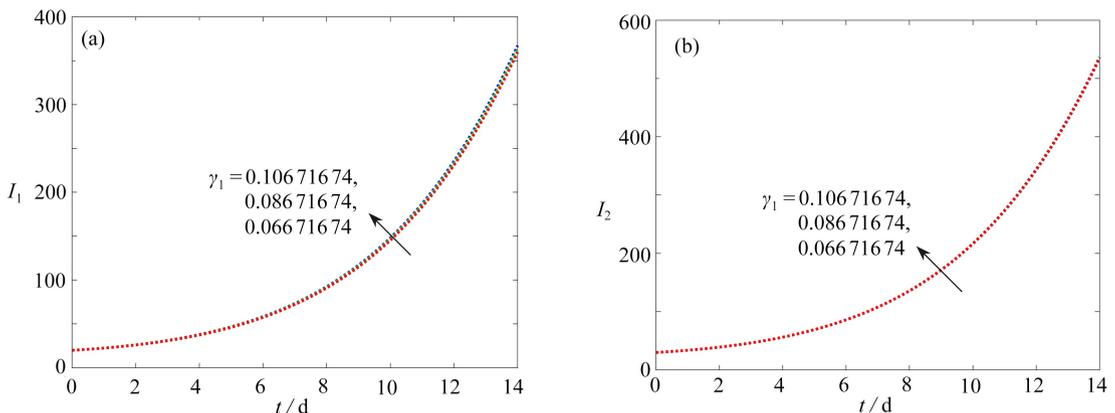
图4 封城前参数  $\varepsilon_i$  对确诊人群  $I_i$  的灵敏度分析

Fig. 4 Sensitivity analysis of parameter  $\varepsilon_i$  to diagnosed population  $I_i$  before the city closure

### 3.2.3 参数 $\lambda_1, \lambda_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2$ 的灵敏度分析

为了研究与分析系统(1)的稳定性对系统参数条件变化的敏感程度.我们将分别利用参数  $\lambda_1, \lambda_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2$  对封城前和封城后系统(1)的稳定进行灵敏度分析.其中,对封城前模型中各类参数的灵敏度分析见图3~5,对封城后模型中各类参数的灵敏度分析见图6~8.

封城前,参数  $\lambda_1$  对系统(1)已收治确诊人群  $I_1$  的影响如图3(a)所示;参数  $\lambda_1$  对系统(1)未收治确诊人群  $I_2$  的影响如图3(b)所示;参数  $\lambda_2$  对系统(1)已收治确诊人群  $I_1$  的影响如图3(c)所示;参数  $\lambda_2$  对系统(1)未收治确诊人群  $I_2$  的影响如图3(d)所示.



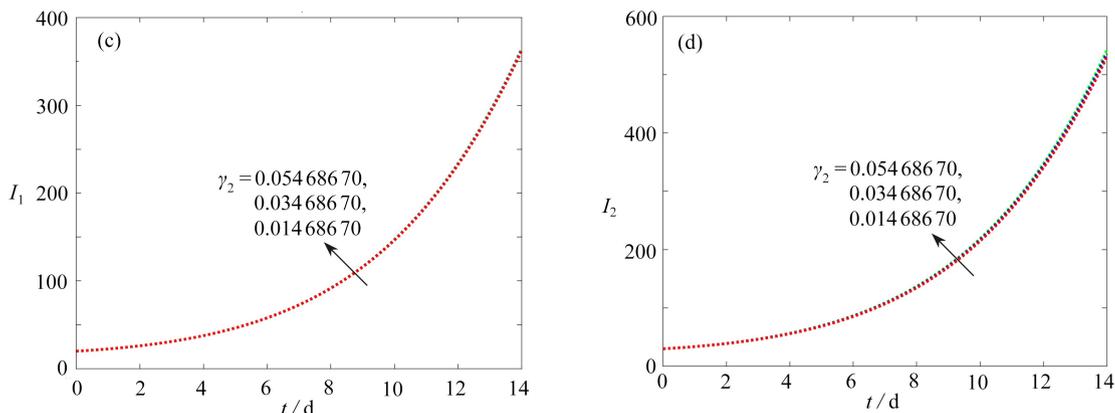


图 5 封城前参数  $\gamma_i$  对确诊人群  $I_i$  的灵敏度分析

Fig. 5 Sensitivity analysis of parameter  $\gamma_i$  to diagnosed population  $I_i$  before the city closure

封城后, 参数  $\lambda_1$  对系统(1)已收治确诊人群  $I_1$  的影响如图 6(a) 所示; 参数  $\lambda_1$  对系统(1)未收治确诊人群  $I_2$  的影响如图 6(b) 所示; 参数  $\lambda_2$  对系统(1)已收治确诊人群  $I_1$  的影响如图 6(c) 所示; 参数  $\lambda_2$  对系统(1)未收治确诊人群  $I_2$  的影响如图 6(d) 所示。

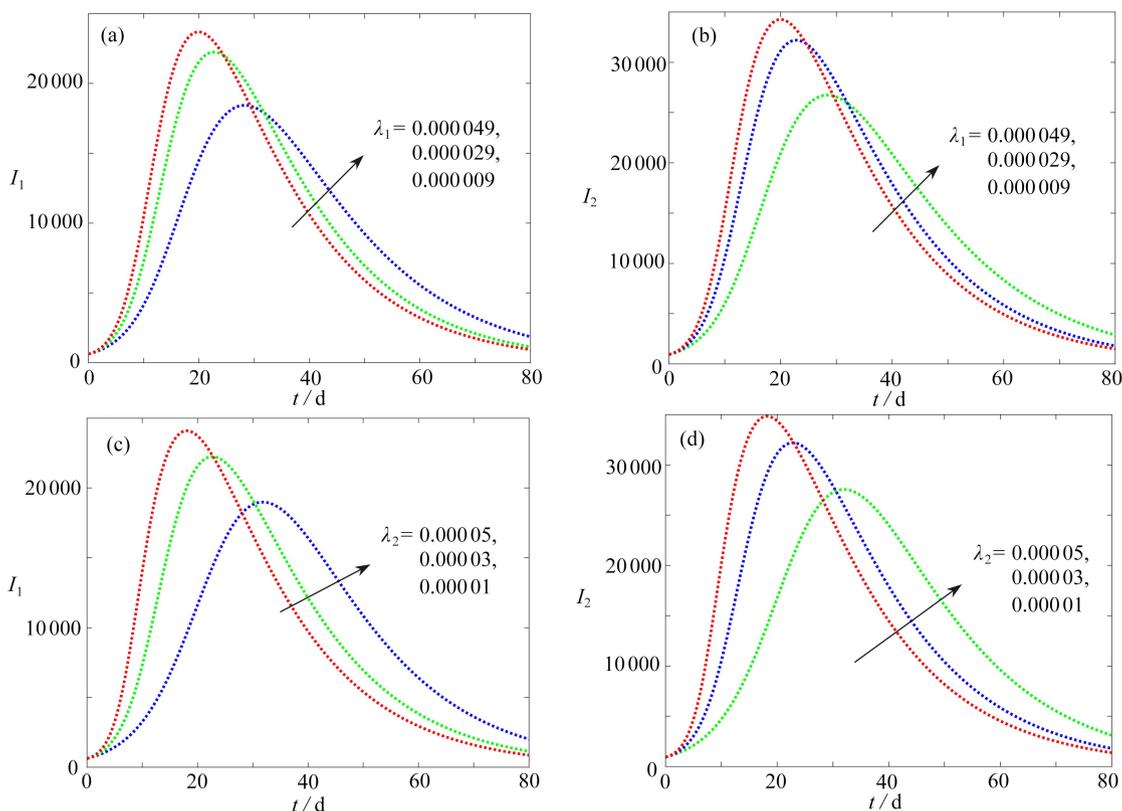


图 6 封城后参数  $\lambda_i$  对确诊人群  $I_i$  的灵敏度分析

Fig. 6 Sensitivity analysis of parameter  $\lambda_i$  to diagnosed population  $I_i$  after the city closure

从图中可以看出, 参数  $\lambda$  对封城前与封城后系统(1)的影响一致. 随着参数  $\lambda$  值的进一步增大, 确诊人群  $I$  将会进一步的增加; 随着参数  $\lambda$  值的减小, 确诊人群  $I$  将会减少.  $\lambda_1$  的变化与  $I_1$  和  $I_2$  均成正比;  $\lambda_2$  的变化与  $I_1$  和  $I_2$  也均成正比, 所以参数  $\lambda$  对系统(1)的影响较大, 说明如果不进一步减小 COVID-19 疫情的传染率和控制人与人之间的传染, 疫情将会向着更坏的方向发展, 确诊人群  $I$  将会进一步激增. 当  $\lambda_1$  的值越小, 已收治确诊人群  $I_1$  和未收治确诊人群  $I_2$  的疫情峰值的变化具有相同趋势, 其到来时间将会更慢; 但是当  $\lambda_1$  的值越大, 已收治确诊人群  $I_1$  和未收治确诊人群  $I_2$  的疫情峰值的到来时间将会加快. 同样地, 当  $\lambda_2$  的值越小, 已

收治确诊人群  $I_1$  和未收治确诊人群  $I_2$  的疫情峰值的变化同样具有相同的趋势,其来时间也将会更慢;当  $\lambda_2$  的值越大,已收治确诊人群  $I_1$  和未收治确诊人群  $I_2$  的疫情峰值的到来时间将会加快。

封城前,参数  $\varepsilon_1$  对系统(1)已收治确诊人群  $I_1$  的影响如图 4(a) 所示;参数  $\varepsilon_1$  对系统(1)未收治确诊人群  $I_2$  的影响如图 4(b) 所示;参数  $\varepsilon_2$  对系统(1)已收治确诊人群  $I_1$  的影响如图 4(c) 所示;参数  $\varepsilon_2$  对系统(1)未收治确诊人群  $I_2$  的影响如图 4(d) 所示.封城后,参数  $\varepsilon_1$  对系统(1)已收治确诊人群  $I_1$  的影响如图 7(a) 所示;参数  $\varepsilon_1$  对系统(1)未收治确诊人群  $I_2$  的影响如图 7(b) 所示;参数  $\varepsilon_2$  对系统(1)已收治确诊人群  $I_1$  的影响如图 7(c) 所示;参数  $\varepsilon_2$  对系统(1)未收治确诊人群  $I_2$  的影响如图 7(d) 所示.从图中可以看出,参数  $\varepsilon$  对封城前与封城后系统(1)的影响一致. $\varepsilon_1$  的变化与  $I_1$  成正比,与  $I_2$  成反比; $\varepsilon_2$  的变化与  $I_1$  成反比,与  $I_2$  成正比,所以参数  $\varepsilon$  对系统(1)有影响.说明如果不进一步减小 COVID-19 疫情从疑似人群转化为确诊人群的转化率,确诊人群  $I$  将会进一步激增,所以应该对疑似人群进行大范围的检验,解除疑似,减少疑似人群的数量。

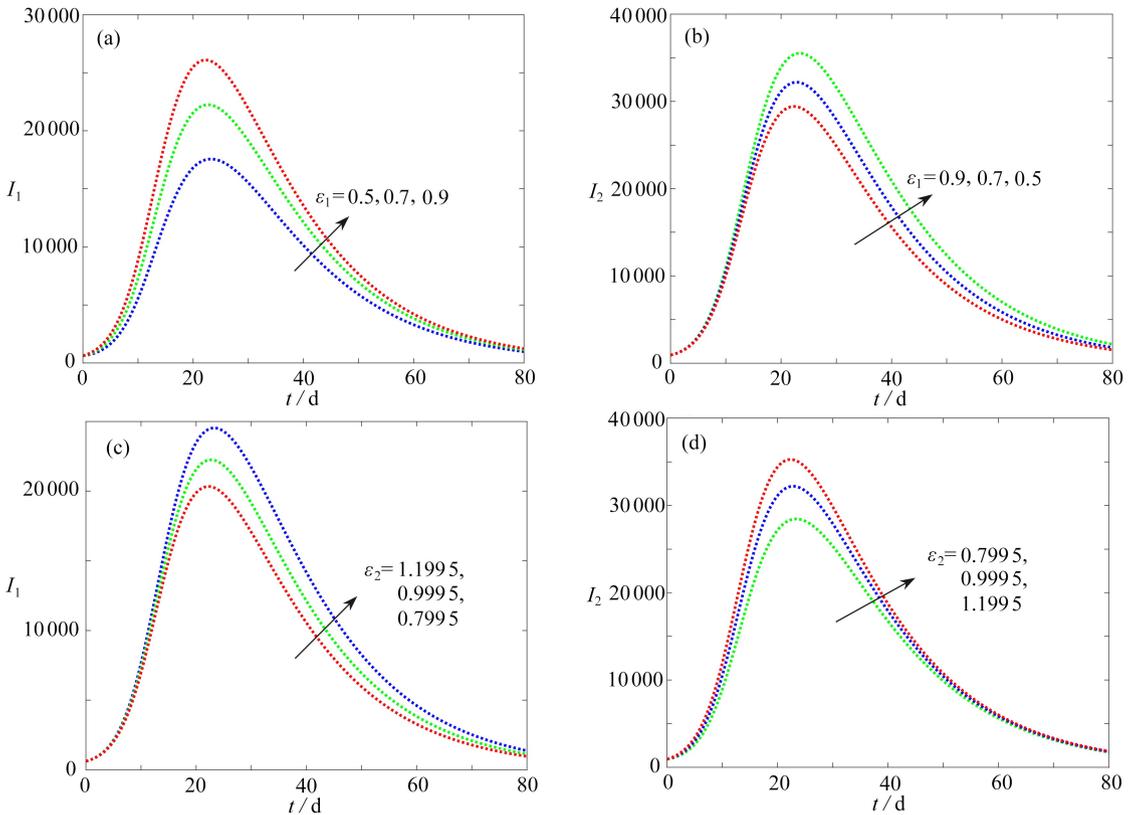


图 7 封城后参数  $\varepsilon_i$  对确诊人群  $I_i$  的灵敏度分析

Fig. 7 Sensitivity analysis of parameter  $\varepsilon_i$  to diagnosed population  $I_i$  after the city closure

封城前,参数  $\gamma_1$  对系统(1)已收治确诊人群  $I_1$  的影响如图 5(a) 所示;参数  $\gamma_1$  对系统(1)未收治确诊人群  $I_2$  的影响如图 5(b) 所示;参数  $\gamma_2$  对系统(1)已收治确诊人群  $I_1$  的影响如图 5(c) 所示;参数  $\gamma_2$  对系统(1)未收治确诊人群  $I_2$  的影响如图 5(d) 所示。

封城后,参数  $\gamma_1$  对系统(1)已收治确诊人群  $I_1$  的影响如图 8(a) 所示;参数  $\gamma_1$  对系统(1)未收治确诊人群  $I_2$  的影响如图 8(b) 所示;参数  $\gamma_2$  对系统(1)已收治确诊人群  $I_1$  的影响如图 8(c) 所示;参数  $\gamma_2$  对系统(1)未收治确诊人群  $I_2$  的影响如图 8(d) 所示.从图中可以看出,参数  $\gamma$  对封城前与封城后系统(1)的影响一致.随着参数  $\gamma$  值的进一步增大,确诊人群  $I$  将会减少;随着参数  $\gamma$  值的减小,确诊人群  $I$  将会增加. $\gamma_1$  的变化与  $I_1$  和  $I_2$  均成反比, $\gamma_2$  的变化与  $I_1$  和  $I_2$  也均成反比,所以参数  $\gamma$  对系统(1)有影响.这说明进一步增加治愈退出率  $\gamma$  对控制 COVID-19 疫情的发展有很大的作用.因此,我们应该加大投入医疗救助和医疗物资,提高确诊人群的治愈率。

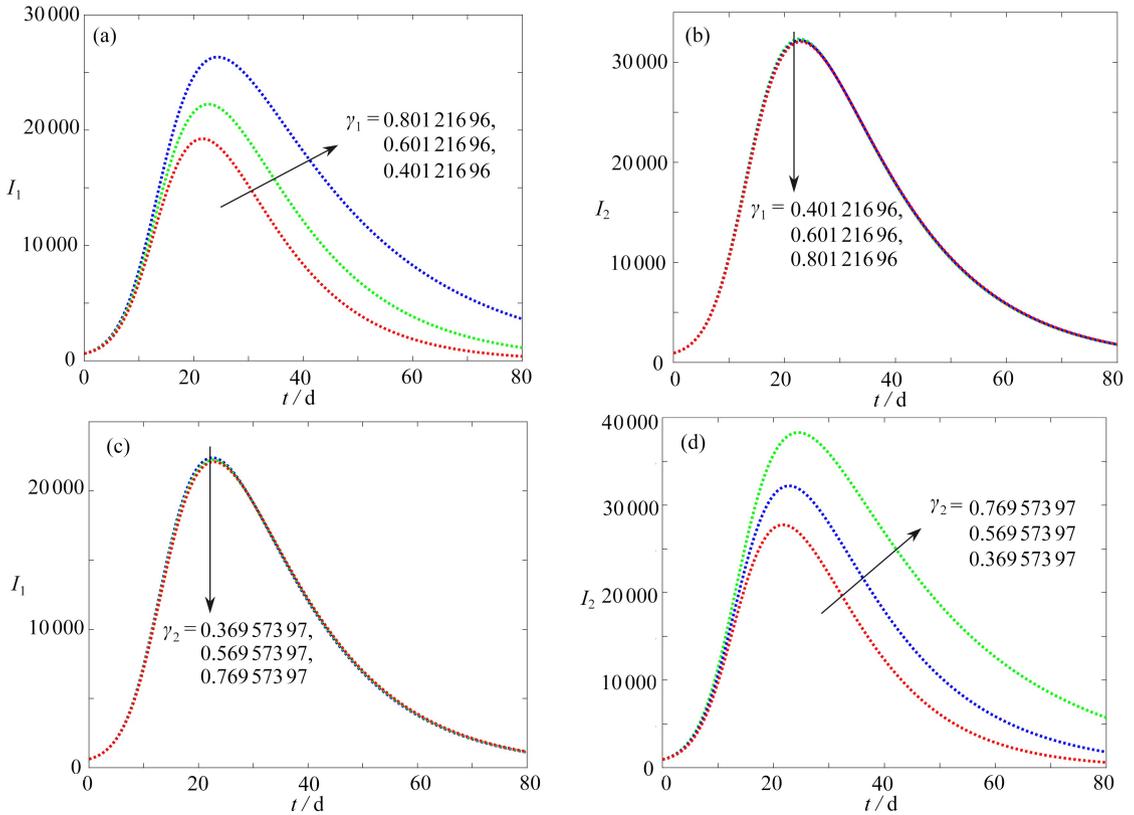


图 8 封城后参数  $\gamma_i$  对确诊人群  $I_i$  的灵敏度分析

Fig. 8 Sensitivity analysis of parameter  $\gamma_i$  to diagnosed population  $I_i$  after the city closure

## 4 结论与建议

根据前面的讨论知:在封城前,基本再生数  $\mathcal{R}_0 > 1$ , COVID-19 疫情流行病特征尚未明确,处于自然爆发和蔓延传播阶段,如果疫情得不到有效的控制,将会有更多人感染 COVID-19 病毒,情况不容乐观.在封城后,基本再生数  $\mathcal{R}_0 < 1$ ,说明武汉封城对 COVID-19 疫情的防控至关重要,并且随着中国政府对疫情的控制和干预以及大量医务人员和医疗物资的投入,COVID-19 疫情在中国得到了较好的控制,确诊人数曲线逐渐趋于平缓,并随着患者的不断治愈移除,图像呈下降的趋势.COVID-19 疫情将在未来的一段时间内持续存在,但随着时间的推移,在严格按照中国政府提出的防疫策略的控制之下,COVID-19 疫情将有所减缓并且将会消失.因此,本文所建立的一类基于 SEIR 模型的 COVID-19 传染病模型及其理论结果和数值模拟结果具有一定的应用价值,可为疫情的防治和控制提供一些理论依据和支持.在此,我们建议政府应该加强对 COVID-19 疫情的监控,预防境外输入性疫情的传播,进一步对现有确诊病例进行救治,对疫情严重的地区进行逐一排查,避免存在确诊患者引起疫情的第二轮爆发,并且应对无症状感染者加强监控,逐步恢复人民的生产生活,推进企业的复工复产.

**致谢** 本文作者衷心感谢西南科技大学理学院大学生创新基金(LX2020005)和西南科技大学龙山学术人才科研支持计划项目(17LZX670;18LZX622)对本文的资助.

### 参考文献 (References):

[1] 周娟, 李丹, 龙云铸. 新型冠状病毒(2019-nCoV)相关研究进展[J]. 中国感染控制杂志, 2020, **19**(3): 288-292. (ZHOU Juan, LI Dan, LONG Yunzhu. Advances in related research on novel coronavirus (2019-nCoV) [J]. *Chinese Journal of Infection Control*, 2020, **19**(3): 288-292. (in Chinese))

[2] 秦红亚, 刘瑞娟, 苗健龙, 等. 2019 新型冠状病毒肺炎研究进展[J]. 临床肺科杂志, 2020, **25**(3): 440-444.

- (QIN Hongya, LIU Ruijuan, MIAO Jianlong, et al. Research progress of new coronavirus pneumonia in 2019 [J]. *Journal of Clinical Pulmonary Medicine*, 2020, **25**(3): 440-444. (in Chinese))
- [3] 汤芳, 王晓芹, 栾进, 等. 新型冠状病毒肺炎的流行病学研究进展[J]. 武警医学, 2020, **31**(3): 272-276. (TANG Fang, WANG Xiaoqin, LUAN Jin, et al. Epidemiological research progress of new coronavirus pneumonia [J]. *Medical Journal of the Chinese People's Armed Police Forces*, 2020, **31**(3): 272-276. (in Chinese))
- [4] DAI C, JING Y, WANG K. Evaluation of prevention and control interventions and its impact on the epidemic of coronavirus disease 2019 in Chongqing and Guizhou provinces [J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2020, **17**(4): 2781-2791.
- [5] 杨雨琦, 孙琦, 王悦欣, 等. 重庆市新型冠状病毒肺炎(NCP)疫情分析与趋势预测[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2020, **37**(1): 135-140. (YANG Yuqi, SUN Qi, WANG Yuexin, et al. Epidemic situation analysis and trend forecast of new coronavirus pneumonia (NCP) in Chongqing [J]. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)*, 2020, **37**(1): 135-140. (in Chinese))
- [6] 耿辉, 徐安定, 王晓艳, 等. 基于SEIR模型分析相关干预措施在新型冠状病毒肺炎疫情中的作用[J]. 暨南大学学报(自然科学与医学版), 2020, **41**(2): 175-180. (GENG Hui, XU Anding, WANG Xiaoyan, et al. Analysis of the role of current prevention and control measures in the epidemic of corona virus disease 2019 based on SEIR model [J]. *Journal of Jinan University (Natural Science & Medicine Edition)*, 2020, **41**(2): 175-180. (in Chinese))
- [7] WU J T, LEUNG K, LEUNG G M. Nowcasting and forecasting the potential domestic and international spread of the 2019-nCoV outbreak originating in Wuhan, China: a modelling study [J]. *The Lancet*, 2020, **395**(10225): 689-697.
- [8] 张云俊, 张原, 尤翀, 等. 新型冠状病毒肺炎(COVID-19)传染病传播动力学模型的综述[J]. 中华医学科研管理杂志, 2020, **33**: E014. DOI: 10.3760/cma.j.cn113565-20200214-00007. (ZHANG Yunjun, ZHANG Yuan, YOU Chong, et al. Review on the study of spreading of the COVID-19 based on dynamic models [J]. *Chinese Journal of Medical Research Management*, 2020, **33**: E014. DOI: 10.3760/cma.j.cn113565-20200214-00007. (in Chinese))
- [9] 曹盛力, 冯沛华, 时朋朋. 修正SEIR传染病动力学模型应用于湖北省2019冠状病毒病(COVID-19)疫情预测和评估[J]. 浙江大学学报(医学版), 2020, **49**(2): 178-184. (CAO Shengli, FENG Peihua, SHI Pengpeng. Study on the epidemic development of COVID-19 in Hubei province by a modified SEIR model [J]. *Journal of Zhejiang University (Medical Science)*, 2020, **49**(2): 178-184. (in Chinese))
- [10] 赵序茅, 李欣海, 聂常虹. 基于大数据回溯新冠肺炎的扩散趋势及中国对疫情的控制研究[J]. 中国科学院院刊, 2020, **35**(3): 248-255. (ZHAO Xumao, LI Xinhai, NIE Changhong. Backtracking transmission of COVID-19 in China based on big data source, and effect of strict pandemic control policy [J]. *Bulletin of the Chinese Academy of Sciences*, 2020, **35**(3): 248-255. (in Chinese))
- [11] 梁桂珍. 一类潜伏期和染病期均传染的SEIQR流行病模型的稳定性[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, **45**(3): 1-9. (LIANG Guizhen. Stability of a SEIQR epidemic model with infectious incubation period and infectious period [J]. *Journal of Southwest Normal University (Natural Science Edition)*, 2020, **45**(3): 1-9. (in Chinese))
- [12] BRAUER F, NOHEL J A. *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations: an Introduction* [M]. Courier Corporation, 1989.
- [13] 谢英超, 程燕, 贺天宇. 一类具有非线性发生率的时滞传染病模型的全局稳定性[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(10): 1107-1116. (XIE Yingchao, CHENG Yan, HE Tianyu. Global stability of a class of delayed epidemic models with nonlinear incidence rates [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(10): 1107-1116. (in Chinese))
- [14] 赵英英, 胡华. 带有标准发生率与信息干预的随机时滞SIRS传染病模型的动力学行为[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(12): 1373-1388. (ZHAO Yingying, HU Hua. Dynamic behaviors of stochastically delayed SIRS epidemic models with standard incidence rates under information intervention [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(12): 1373-1388. (in Chinese))
- [15] 湖北省卫生健康委员会. 湖北省新型冠状病毒肺炎疫情影响情况 [EB/OL]. [2020-05-14]. <http://wjw.hubei.gov>.

- cn/bmdt/ztzl/fkxxgzbdgrfyyq/xxfb/202003/t20200328\_2195436.shtml. (Health Commission of Hubei Province. Epidemic situation of new coronavirus pneumonia in Hubei province[EB/OL]. [2020-05-14]. [http://wjw.hubei.gov.cn/bmdt/ztzl/fkxxgzbdgrfyyq/xxfb/202003/t20200328\\_2195436.shtml](http://wjw.hubei.gov.cn/bmdt/ztzl/fkxxgzbdgrfyyq/xxfb/202003/t20200328_2195436.shtml). (in Chinese))
- [16] 中华人民共和国国家卫生健康委员会. 截止 2020 年 3 月 27 日 24 时新型冠状病毒肺炎疫情情况 [EB/OL]. [2020-05-14]. <http://www.nhc.gov.cn/xcs/yqtb/202003/bf66696029ba420098164607240074f8.shtml>. (National Health Commission of the People's Republic of China. The new coronavirus pneumonia epidemic situation as of 24:00 on March 27, 2020[N]. [2020-05-14]. <http://www.nhc.gov.cn/xcs/yqtb/202003/bf66696029ba420098164607240074f8.shtml>. (in Chinese))
- [17] 陈凯, 苏彬, 杨易, 等. 新型冠状病毒肺炎病原学及临床特点研究进展[J]. 武警医学, 2020, **31**(3): 269-271. (CHEN Kai, SU Bin, YANG Yi, et al. Research progress on etiology and clinical characteristics of new coronavirus pneumonia[J]. *Medical Journal of the Chinese People's Armed Police Forces*, 2020, **31**(3): 269-271. (in Chinese))
- [18] GUAN W, NI Z, HU Y, et al. Clinical characteristics of coronavirus disease 2019 in China[J]. *New England Journal of Medicine*, 2020, **382**(18): 1708-1720.
- [19] BACKER J A, KLINKENBERG D, WALLINGA J. Incubation period of 2019 novel coronavirus (2019-nCoV) infections among travellers from Wuhan, China, 20-28 January 2020 [J]. *Eurosurveillance*, 2020, **25**(5): 2000062.
- [20] 中华人民共和国国家统计局. 中华人民共和国 2019 年国民经济和社会发展统计公报[M]. 北京: 中国统计出版社, 2019: 2-8.(National Bureau of Statistics of the People's Republic of China. *Statistical Communiqué on the National Economic and Social Development of the People's Republic of China in 2019*[M]. Beijing: China Statistical Press, 2019: 2-8.(in Chinese))