

具有滑动边界条件 Stokes 问题的 自适应 Uzawa 块松弛算法*

张茂林, 冉 静, 张守贵

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要: 对一类具有非线性滑动边界条件的 Stokes 问题, 得到了求其数值解的自适应 Uzawa 块松弛算法 (SUBRM). 通过该问题导出的变分问题, 引入辅助变量将原问题转化为一个基于增广 Lagrange 函数表示的鞍点问题, 并采用 Uzawa 块松弛算法 (UBRM) 求解. 为了提高算法性能, 提出利用迭代函数自动选取合适罚参数的自适应法则. 该算法的优点是每次迭代只需计算一个线性问题, 同时显式计算辅助变量. 对算法的收敛性进行了理论分析, 最后用数值结果验证了该算法的可行性和有效性.

关键词: Stokes 问题; 滑动边界; Uzawa 块松弛算法; 自适应法则; 增广 Lagrange 函数
中图分类号: O221.6 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.410170

A Self-Adaptive Uzawa Block Relaxation Method for Stokes Problems With Slip Boundary Conditions

ZHANG Maolin, RAN Jing, ZHANG Shougui

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University,
Chongqing 401331, P.R.China)

Abstract: A self-adaptive Uzawa block relaxation method was designed for Stokes problems under nonlinear slip boundary conditions. For the variational formulation of the problem, an auxiliary unknown was introduced to transform the problem into a saddle-point one based on an augmented Lagrangian function, which can be solved with the Uzawa block relaxation method. To improve the performance of the method, a self-adaptive rule was proposed with the proper penalty parameter chosen automatically. The main advantage of this method is that each iterative step consists of a linear problem while the auxiliary unknown can be computed explicitly. The convergence of the algorithm was analyzed. The numerical results show the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: Stokes problem; slip boundary; Uzawa block relaxation method; self-adaptive rule; augmented Lagrangian function

* 收稿日期: 2020-06-11; 修订日期: 2020-07-25

基金项目: 国家自然科学基金 (11971085); 重庆市自然科学基金 (cstc2020jcyj-msxmX0066); 重庆市高校创新研究群体项目 (CXQT19018); 重庆市研究生教育优质课程项目 (201949)

作者简介: 张茂林 (1995—), 女, 硕士生 (E-mail: 674003207@qq.com);
张守贵 (1973—), 男, 教授, 博士, 硕士生导师 (通讯作者. E-mail: shgzhnag@cqu.edu.cn).

引用格式: 张茂林, 冉静, 张守贵. 具有滑动边界条件 Stokes 问题的自适应 Uzawa 块松弛算法 [J]. 应用数学和力学, 2021, 42(2): 188-198.

引 言

众所周知,Stokes 问题在流体力学中具有广泛的应用.考虑摩擦型非线性滑动边界条件下 Stokes 方程控制的不可压缩流模型,其二维情形如下:

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u}(x) + \nabla p(x) = \mathbf{f}(x), & x \in \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}(x) = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是有界的 Lipschitz 区域, $\mathbf{u}(x)$ 是流速的待求向量函数, $\mathbf{f}(x)$ 是外力的已知向量函数, $p(x)$ 是压力的标量函数, ν 是黏滞系数且大于零^[1-2]. 本文考虑如下非线性滑动边界条件:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x) = \mathbf{0}, & x \in \Gamma, \\ u_n(x) = 0, \quad -\sigma_\tau(u) \in g \partial |u_\tau|, & x \in S, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\Gamma \cap S = \emptyset$, $\overline{\Gamma \cup S} = \partial\Omega$; g 是标量函数, 表示摩擦性能; $u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ 是流速的法向分量, $u_\tau = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}$ 是流速的切向分量, \mathbf{n} 和 $\boldsymbol{\tau}$ 分别表示在边界 S 上的单位外法向向量和单位切向向量; $\sigma_n(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ 是 Cauchy 压力张量的法向分量, 满足 $\sigma_i = \sigma_i(\mathbf{u}, p) = (\nu e_{ij}(\mathbf{u}) - p \delta_{ij}) n_j$, 其中 $e_{ij}(\mathbf{u}) = \partial u_i / \partial x^j + \partial u_j / \partial x^i$, $i, j = 1, 2$, 当 $i = j$ 时, $\delta_{ij} = 1$, 当 $i \neq j$ 时, $\delta_{ij} = 0$.

滑动边界条件是指在边界 S 上, 若切向压力小于给定的临界值 g , 则流体在边界上不发生滑动; 若切向压力超过临界值 g , 则流体在边界上发生滑动. 针对 Stokes 问题, 前人做了大量的研究工作, 主要集中于其解的一些性质, 如存在性、唯一性、正则性和连续依赖性等^[3-4]. 而对于非线性边界条件问题的算法研究相对较少^[5-8], 且主要采用 Uzawa 方法处理非线性^[9].

本文对求解具有滑动边界条件 Stokes 问题的 Uzawa 块松弛算法进行改进^[10-13], 进一步对罚参数的选取给出具体可行的办法: 首先把问题转换为等价的变分问题^[5], 再引入一个辅助变量, 导出原问题的增广 Lagrange 函数, 得到用其表示的鞍点问题. 利用增广 Lagrange 乘子法, 结合 Uzawa 块松弛算法求解该鞍点问题. 由于事先难以通过估计确定合适的罚参数, 为了避免其对收敛速度的影响, 给出了自动调整罚参数的自适应法则^[14], 此算法已成功应用于单侧障碍问题和 Signorini 问题^[15-17]. 最后对给出的算法进行收敛性分析, 并用数值算例验证算法的有效性.

1 增广 Lagrange 乘子法

为了方便后面叙述, 先定义函数空间:

$$V = \{ \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2, \mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{0}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_S = \mathbf{0} \},$$

$$\dot{V} = \{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2, \mathbf{v}|_\Gamma = \mathbf{0} \},$$

$$M = L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega), \int_\Omega q dx = 0 \right\},$$

$$\Lambda = \{ \mu \in L^2(S), |\mu(x)| \leq 1, \text{ a.e. on } S \};$$

和双线性形式:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}), \quad b(\mathbf{u}, p) = (p, \operatorname{div} \mathbf{u}),$$

其中 (\cdot, \cdot) 表示向量函数和纯量函数分别在空间 $(L^2(\Omega))^2$ 和 $L^2(\Omega)$ 中的内积. 双线性形式 $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 满足正定性: 存在 $\alpha > 0$, 对 $\forall \mathbf{u} \in V$ 有

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_V^2;$$

双线性形式 $b(\mathbf{u}, p)$ 满足上下确界条件: 存在 $\beta > 0$, 对 $\forall p \in M$ 有

$$\beta \|p\| \leq \sup_{\mathbf{u} \in V} \frac{b(\mathbf{u}, p)}{\|\nabla \mathbf{u}\|},$$

其中 $\|\cdot\|_V$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示在空间 V 和 $L^2(\Omega)$ 中的范数.

根据文献[5]可知, 问题(1)和(2)的弱形式等价于以下变分不等式^[7,11]: 存在 $(\mathbf{u}, p) \in V \times M$, 使得

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) - b(\mathbf{v} - \mathbf{u}, p) + j(v_\tau) - j(u_\tau) \geq \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, ds, & \forall \mathbf{v} \in V, \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, & \forall q \in M, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $j(\eta) = \int_S g |\eta| \, ds, \forall \eta \in H^{(1/2)}(S)$; $b(\mathbf{u}, p) = (p, \operatorname{div} \mathbf{u})$, 且变分不等式问题(3)等价于以下引理所述的变分等式问题(4).

引理 1 假设 $(\mathbf{u}, p) \in V \times M$ 是问题(3)的解, 则当且仅当存在 $\lambda \in \Lambda$ 使得下式成立:

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p) + \int_S \lambda g v_\tau \, ds = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \, ds, & \forall \mathbf{v} \in V, \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, & \forall q \in M, \\ \lambda u_\tau = |u_\tau|, & \text{a.e. on } S. \end{cases} \quad (4)$$

由文献[6]可知, 上述变分问题的第三式等价于

$$\lambda = P_{\Lambda}(\lambda + \rho u_\tau), \quad \forall \rho > 0. \quad (5)$$

为了求解问题(4), 在边界 S 上引入辅助变量 ϕ , 使得 $u_\tau = \phi$, 定义问题(4)的 Lagrange 函数 $L: V \times M \times L^2(S) \times \Lambda \rightarrow \mathbf{R}$,

$$L(\mathbf{v}, q, \psi, \mu) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, q) - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \, ds + \int_S g \mu (v_\tau - \psi) \, ds, \quad (6)$$

及其增广 Lagrange 函数:

$$L_{\rho}(\mathbf{v}, q, \psi, \mu) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, q) - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \, ds + \int_S g \mu (v_\tau - \psi) \, ds + \frac{\rho}{2} \|v_\tau - \psi\|_{L^2(S)}^2, \quad (7)$$

其中 ρ 是罚参数, 且 $\rho > 0$; $\mathbf{v} \in V, q \in M, \psi \in L^2(S), \mu \in \Lambda$ 是 Lagrange 乘子. 考虑鞍点问题: 寻找 $(\mathbf{u}, p, \phi, \lambda) \in V \times M \times L^2(S) \times \Lambda$, 使得

$$L_{\rho}(\mathbf{u}, p, \phi, \mu) \leq L_{\rho}(\mathbf{u}, p, \phi, \lambda) \leq L_{\rho}(\mathbf{v}, q, \psi, \lambda), \quad \forall (\mathbf{v}, q, \psi, \mu) \in V \times M \times L^2(S) \times \Lambda. \quad (8)$$

由文献[3,5], 可得如下结果.

引理 2 若 $\{\mathbf{u}, p, \lambda\}$ 是问题(4)的解, 则 $\{\mathbf{u}, p, \phi, \lambda\}$ 是鞍点问题(8)在 $V \times M \times L^2(S) \times \Lambda$ 上唯一的解, 且 $u_\tau = \phi$.

根据引理 2, 要得到问题(4)的解, 只需求解鞍点问题(8). 由文献[10-12]知, 可利用 Uzawa 块松弛算法求解该鞍点问题, 算法过程如下.

算法 1 Uzawa 块松弛算法(UBRM)

第 1 步 任给初始函数 $\{\mathbf{u}^{(0)}, \lambda^{(0)}\} \in V \times L^2(S), \rho > 0$, 置 $n = 0$.

第 2 步 计算 $\phi^{(n+1)} \in L^2(S)$, 使得

$$L_{\rho}(\mathbf{u}^{(n)}, p^{(n)}, \phi^{(n+1)}, \lambda^{(n)}) \leq L_{\rho}(\mathbf{u}^{(n)}, p^{(n)}, \psi, \lambda^{(n)}), \quad \forall \psi \in L^2(S). \quad (9)$$

第 3 步 寻找 $(\mathbf{u}^{(n+1)}, p^{(n+1)}) \in V \times M$, 使得

$$L_{\rho}(\mathbf{u}^{(n+1)}, p^{(n+1)}, \phi^{(n+1)}, \lambda^{(n)}) \leq L_{\rho}(\mathbf{v}, q, \phi^{(n+1)}, \lambda^{(n)}), \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V \times M. \quad (10)$$

第 4 步 更新 Lagrange 乘子:

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} - \rho g(\mathbf{u}^{(n+1)} - \phi^{(n+1)}). \quad (11)$$

第 5 步 给定某种判定条件, 如果满足该条件则停止迭代得到数值解 $(\mathbf{u}^{(n+1)}, p^{(n+1)})$; 否则, 置 $n = n + 1$, 返回第 2 步.

2 自适应 Uzawa 块松弛算法及收敛性分析

由于 Uzawa 块松弛算法的收敛速度显著依赖罚参数, 并且事先很难确定合适的参数^[10-12]. 为了解决这个问题, 本文将 Uzawa 块松弛算法与自适应法则相结合^[14-17], 在算法 1 的基础上得到自适应 Uzawa 块松弛算法, 其计算过程如下^[11-12].

算法 2 自适应 Uzawa 块松弛算法(SUBRM)

第 1 步 任给初始函数 $\{\mathbf{u}^{(0)}, \lambda^{(0)}\} \in V \times L^2(S)$, $\rho > 0$, 置 $\rho_n = \rho$, $n = 0$.

第 2 步 计算辅助变量 $\phi^{(n+1)}$:

$$\phi^{(n+1)} = u_\tau^{(n)} + \frac{1}{\rho_n g} (\lambda^{(n)} - P_\Lambda(\lambda^{(n)} + \rho_n g u_\tau^{(n)})), \quad (12)$$

其中 $P_\Lambda(\mu) = \sup(-1, \inf(1, \mu))$, $\forall \mu \in L^2(S)$.

第 3 步 求解 $(\mathbf{u}^{(n+1)}, p^{(n+1)}) \in V \times M$ 满足变分问题:

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}^{(n+1)}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p^{(n+1)}) = \int_S g(\rho_n(\phi^{(n+1)} - u_\tau^{(n+1)}) - \lambda^{(n)}) v_\tau ds + \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} ds, \\ b(\mathbf{u}^{(n+1)}, q) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

其中 $\forall \mathbf{v} \in V, \forall q \in M$.

第 4 步 更新 Lagrange 乘子:

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} + \rho_n g (u_\tau^{(n+1)} - \phi^{(n+1)}). \quad (14)$$

第 5 步 选择罚参数 ρ_{n+1} , 使得

$$\frac{1}{(1 + s_n)\rho_n} < \rho_{n+1} \leq (1 + s_n)\rho_n, \quad (15)$$

其中序列 $s_n \geq 0$ 且 $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n < +\infty$.

关于算法 2 中第 5 步罚参数的选取将在数值算例部分详细说明. 根据算法 2, 可得如下收敛性结果.

定理 1 算法 2 产生的序列 $\{\mathbf{u}^{(n)}, \phi^{(n)}, p^{(n)}, \lambda^{(n)}\}$ 收敛于 $\{\mathbf{u}, \phi, p, \lambda\} \in V \times L^2(S) \times M \times L^2(S)$, 其中 $\{\mathbf{u}, p, \lambda\}$ 是问题(4)的解, 且 $u_\tau = \phi$.

证明 令 $\delta \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}$, $\delta p^{(n)} = p^{(n)} - p$, $\delta \lambda^{(n)} = \lambda^{(n)} - \lambda$, 由算法 2 的第 3 步, 对 $\forall \mathbf{v} \in V$ 有

$$a(\mathbf{u}^{(n+1)}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p^{(n+1)}) + \rho_n \int_S g u_\tau^{(n+1)} v_\tau ds = \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} ds + \int_S g(\rho_n \phi^{(n+1)} - \lambda^{(n)}) v_\tau ds. \quad (16)$$

再由问题(4)有

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p) + \int_S g \lambda v_\tau ds = \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} ds. \quad (17)$$

将式(16)和(17)相减可得

$$a(\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p^{(n+1)} - p) = \int_S g(\rho_n(\phi^{(n+1)} - u_\tau^{(n+1)}) - \lambda^{(n)} + \lambda) v_\tau ds, \quad (18)$$

因为 $\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)} = \rho_n g(u_\tau^{(n+1)} - \phi^{(n+1)})$, 所以

$$a(\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p^{(n+1)} - p) = - \int_S g(\lambda^{(n+1)} - \lambda) v_\tau ds. \quad (19)$$

在上式中令 $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}$, 则有

$$a(\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}) - b(\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}, p^{(n+1)} - p) = - \int_S g(\lambda^{(n+1)} - \lambda)(u_\tau^{(n+1)} - u_\tau) ds. \quad (20)$$

分别由式(4)的第二式和式(13)的第二式有 $b(\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}, p^{(n+1)} - p) = 0$, 于是可得

$$a(\mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}, \mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{u}) = - \int_S g(\lambda^{(n+1)} - \lambda)(u_\tau^{(n+1)} - u_\tau) ds,$$

即

$$a(\delta \mathbf{u}^{(n+1)}, \delta \mathbf{u}^{(n+1)}) = - \int_S g \delta \lambda^{(n+1)} \delta u_\tau^{(n+1)} ds.$$

再根据双线性形式性质可知

$$a(\delta \mathbf{u}^{(n+1)}, \delta \mathbf{u}^{(n+1)}) = - \int_S g \delta \lambda^{(n+1)} \delta u_\tau^{(n+1)} ds \geq \alpha \|\delta \mathbf{u}^{(n+1)}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \geq 0. \quad (21)$$

对 $\forall \mu \in \Lambda$, 如果 $u_\tau \neq 0$, 因为

$$\int_S u_\tau (\lambda - \mu) ds = \int_S u_\tau \left(\frac{|u_\tau|}{u_\tau} - \mu \right) ds - \int_S u_\tau \left(\frac{|u_\tau|}{u_\tau} - \lambda \right) ds,$$

根据式(4)的第三式有 $\int_S u_\tau \left(\frac{|u_\tau|}{u_\tau} - \mu \right) ds \geq 0$ 和 $\int_S u_\tau \left(\frac{|u_\tau|}{u_\tau} - \lambda \right) ds = 0$, 所以

$$\int_S u_\tau (\lambda - \mu) ds \geq 0, \quad \forall \mu \in \Lambda.$$

在上式中令 $\mu = P_\Lambda(\lambda^{(n)} + \rho_n g u_\tau^{(n)})$ 得

$$-\rho_n \int_S g u_\tau (P_\Lambda(\lambda^{(n)} + \rho_n g u_\tau^{(n)}) - \lambda) ds \geq 0. \quad (22)$$

由 $\lambda \in \Lambda$ 和投影 P_Λ 的性质可得

$$\int_S (\lambda^{(n)} + \rho_n g u_\tau^{(n)} - P_\Lambda(\lambda^{(n)} + \rho_n g u_\tau^{(n)})) (P_\Lambda(\lambda^{(n)} + \rho_n g u_\tau^{(n)}) - \lambda) ds \geq 0. \quad (23)$$

将式(22)、(23)相加得到

$$\int_S (\rho_n g (u_\tau^{(n)} - u_\tau) + \lambda^{(n)} - P_\Lambda(\lambda^{(n)} + \rho_n g u_\tau^{(n)})) (P_\Lambda(\lambda^{(n)} + \rho_n g u_\tau^{(n)}) - \lambda) ds \geq 0. \quad (24)$$

再由式(12)有

$$P_\Lambda(\lambda^{(n)} + \rho_n g u_\tau^{(n)}) = \rho_n g (u_\tau^{(n)} - \phi^{(n+1)}) + \lambda^{(n)}.$$

将上式代入式(24)得

$$\int_S (\rho_n g (u_\tau^{(n)} - u_\tau) + \rho_n g (\phi^{(n+1)} - u_\tau^{(n)})) (\rho_n g (u_\tau^{(n)} - \phi^{(n+1)}) + \lambda^{(n)} - \lambda) ds \geq 0.$$

整理得

$$\begin{aligned} & 2\rho_n \int_S g (\lambda^{(n)} - \lambda - \rho_n g (u_\tau^{(n)} - u_\tau)) (u_\tau^{(n)} - \phi^{(n+1)}) ds \leq \\ & 2\rho_n \int_S g (u_\tau^{(n)} - u_\tau) (\lambda^{(n)} - \lambda) ds - 2(\rho_n g)^2 \|u_\tau^{(n)} - \phi^{(n+1)}\|_{L^2(S)}^2. \end{aligned} \quad (25)$$

按照算法2中的式(14)有

$$\lambda^{(n+1)} - \lambda - \rho_n g (u_\tau^{(n+1)} - u_\tau) = \lambda^{(n)} - \lambda - \rho_n g (u_\tau^{(n)} - u_\tau) + \rho_n g (u_\tau^{(n)} - \phi^{(n+1)}).$$

从而有

$$\begin{aligned} & \|\lambda^{(n+1)} - \lambda - \rho_n g (u_\tau^{(n+1)} - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2 = \\ & \|\lambda^{(n)} - \lambda - \rho_n g (u_\tau^{(n)} - u_\tau) + \rho_n g (u_\tau^{(n)} - \phi^{(n+1)})\|_{L^2(S)}^2 = \\ & \|\lambda^{(n)} - \lambda - \rho_n g (u_\tau^{(n)} - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2 + \|\rho_n g (u_\tau^{(n)} - \phi^{(n+1)})\|_{L^2(S)}^2 + \\ & 2\rho_n \int_S g (\lambda^{(n)} - \lambda - \rho_n g (u_\tau^{(n)} - u_\tau)) (u_\tau^{(n)} - \phi^{(n+1)}) ds, \end{aligned}$$

由上式及式(25)可得

$$\begin{aligned} & \|\lambda^{(n+1)} - \lambda - \rho_n g (u_\tau^{(n+1)} - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2 - 2\rho_n \int_S g (u_\tau^{(n)} - u_\tau) (\lambda^{(n)} - \lambda) ds \leq \\ & \|\lambda^{(n)} - \lambda - \rho_n g (u_\tau^{(n)} - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2 - \|\rho_n g (u_\tau^{(n)} - \phi^{(n+1)})\|_{L^2(S)}^2. \end{aligned} \quad (26)$$

由算法2知 $s_n \geq 0, 0 < \rho_{n+1} < (1 + s_n)\rho_n$, 并由式(21)可得

$$\begin{aligned} & \|\lambda^{(n+1)} - \lambda - \rho_{n+1} g (u_\tau^{(n+1)} - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2 = \\ & \|\lambda^{(n+1)} - \lambda\|_{L^2(S)}^2 + \|\rho_{n+1} g (u_\tau^{(n+1)} - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2 - \\ & 2\rho_{n+1} \int_S g (\lambda^{(n+1)} - \lambda) (u_\tau^{(n+1)} - u_\tau) ds \leq \\ & (1 + s_n)^2 \|\lambda^{(n+1)} - \lambda\|_{L^2(S)}^2 + (1 + s_n)^2 \|\rho_n g (u_\tau^{(n+1)} - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2 - \\ & 2(1 + s_n)^2 \rho_n \int_S g (\lambda^{(n+1)} - \lambda) (u_\tau^{(n+1)} - u_\tau) ds = \\ & (1 + s_n)^2 \|\lambda^{(n+1)} - \lambda - \rho_n g (u_\tau^{(n+1)} - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2. \end{aligned} \quad (27)$$

将式(26)代入式(27)得

$$\begin{aligned} & \|\lambda^{(n+1)} - \lambda - \rho_{n+1} g (u_\tau^{(n+1)} - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2 \leq \\ & (1 + s_n)^2 \|\lambda^{(n)} - \lambda - \rho_n g (u_\tau^{(n)} - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2 + \end{aligned}$$

$$2\rho_n \int_S g \delta u_\tau^{(n)} \delta \lambda^{(n)} ds - \|\rho_n g(u_\tau^{(n)} - \phi^{(n+1)})\|_{L^2(S)}^2, \tag{28}$$

从而由式(21)有

$$\|\lambda^{(n+1)} - \lambda - \rho_{n+1} g(u_\tau^{(n+1)} - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2 \leq (1 + s_n)^2 \|\lambda^{(n)} - \lambda - \rho_n g(u_\tau^{(n)} - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2. \tag{29}$$

令 $\varepsilon_n = 2s_n + s_n^2$, 由 $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n < +\infty$, 可得

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \leq +\infty, \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + \varepsilon_n) < +\infty.$$

令

$$C_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n, C_p = \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + \varepsilon_n),$$

根据式(29)可得

$$\begin{aligned} \|\delta \lambda^{(n+1)} - \rho_{n+1} g \delta u_\tau^{(n+1)}\|_{L^2(S)}^2 &\leq \prod_{i=0}^n (1 + \varepsilon_i) \|\delta \lambda^{(0)} - \rho_0 g \delta u_\tau^{(0)}\|_{L^2(S)}^2 \leq \\ &C_p \|\delta \lambda^{(0)} - \rho_0 g \delta u_\tau^{(0)}\|_{L^2(S)}^2. \end{aligned} \tag{30}$$

上式表明: 存在一个常数 C , 使得

$$\|\delta \lambda^{(n+1)} - \rho_{n+1} g \delta u_\tau^{(n+1)}\|_{L^2(S)}^2 \leq C, \quad \forall n \geq 0, \tag{31}$$

再由式(21)可知 $\{u^{(n)}\}$ 和 $\{\lambda^{(n)}\}$ 有界. 根据式(28)有

$$\begin{aligned} (\rho_n g)^2 \|u_\tau^{(n)} - \phi^{(n+1)}\|_{L^2(S)}^2 - 2\rho_n \int_S g \delta u_\tau^{(n)} \delta \lambda^{(n)} ds &\leq \\ \|\delta \lambda^{(n)} - \rho_n g \delta u_\tau^{(n)}\|_{L^2(S)}^2 - \|\delta \lambda^{(n+1)} - \rho_{n+1} g \delta u_\tau^{(n+1)}\|_{L^2(S)}^2 + \\ \varepsilon_n \|\delta \lambda^{(n)} - \rho_n g \delta u_\tau^{(n)}\|_{L^2(S)}^2. \end{aligned} \tag{32}$$

对上式两边求和可得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho_n g)^2 \|u_\tau^{(n)} - \phi^{(n+1)}\|_{L^2(S)}^2 - \sum_{n=0}^{+\infty} 2\rho_n \int_S g \delta u_\tau^{(n)} \delta \lambda^{(n)} ds &\leq \\ \|\delta \lambda^{(0)} - \rho_0 g \delta u_\tau^{(0)}\|_{L^2(S)}^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \|\delta \lambda^{(n)} - \rho_n g \delta u_\tau^{(n)}\|_{L^2(S)}^2. \end{aligned} \tag{33}$$

根据双线性性质(21)和式(31)、(33)有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho_L g)^2 \|u_\tau^{(n)} - \phi^{(n+1)}\|_{L^2(S)}^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} 2\alpha \rho_L \|\delta u^{(n)}\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \\ \|\delta \lambda^{(0)} - \rho_0 g \delta u_\tau^{(0)}\|_{L^2(S)}^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \|\delta \lambda^{(n)} - \rho_n g \delta u_\tau^{(n)}\|_{L^2(S)}^2 &\leq \\ C + C \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \leq (1 + C_0) C, \end{aligned} \tag{34}$$

其中 $\rho_L := \inf (\rho_n)_{n=0}^{+\infty} > 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta u^{(n)} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (u_\tau^{(n)} - \phi^{(n+1)}) = 0,$$

即 $u^{(n)}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中收敛于 u , 进而有 $\phi^{(n)}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 ϕ ($\phi = u_\tau$).

下证序列 $\{p^{(n)}\}$ 收敛于 p . 在式(19)中取 $v \in \dot{V}$, 所以有

$$b(v, p - p^{(n+1)}) = a(u - u^{(n+1)}, v). \tag{35}$$

根据上下确界条件有

$$\beta \|p^{(n+1)} - p\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{v \in \dot{V}} \frac{b(v, p^{(n+1)} - p)}{\|v\|_{H^1(\Omega)^2}} = \frac{a(u^{(n+1)} - u, v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)^2}}. \tag{36}$$

因为 $u^{(n)}$ 收敛于 u , 因此有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p^{(n)} = p.$$

最后, 证明 $\{\lambda^{(n)}\}$ 是收敛的. 由于序列 $\{\lambda^{(n)}\}$ 有界, 则必有收敛子列. 设 $\{\lambda^{(n_i)}\}$ 为其收敛子列, 令

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \lambda^{(n_i)} = \lambda^* .$$

根据式(12)可得

$$\phi^{(n_i+1)} - u_\tau^{(n_i)} = \frac{1}{\rho_n} (\lambda^{(n_i)} - P_A(\lambda^{(n_i)} + \rho_n g u_\tau^{(n_i)})) . \quad (37)$$

因为 $\phi^{(n)}$ 收敛于 $\phi(\phi = u_\tau)$, 所以对式(37)两边同时取极限可得

$$\lambda^* = P_A(\lambda^* + \rho_n g u_\tau) . \quad (38)$$

由引理1可知式(38)等价于问题(4)中的第三式, 由解的存在唯一性可得 $\lambda^* = \lambda$, 所以 $\{\lambda^{(n_i)}\}$ 收敛于 λ . 假设存在一个 $\bar{\lambda} \neq \lambda$, 使得 $\lim_{n_i \rightarrow \infty} \lambda^{(n_i)} = \bar{\lambda}$, 可得 $\|\bar{\lambda} - \lambda\| > 0$, 由于 λ 和 \mathbf{u} 分别是 $\{\lambda^{(n)}\}, \{\mathbf{u}^{(n)}\}$ 的一个收敛点, 则存在 $n_0 \geq 0$ 使得

$$\|\lambda^{(n_0)} - \lambda + \rho_n g(u_\tau^{(n_0)} - u_\tau)\|_{L^2(S)} \leq \frac{1}{2\sqrt{C_p}} \|\bar{\lambda} - \lambda\|_{L^2(S)} , \quad (39)$$

由式(21)、(30)和(39)可知, 对 $\forall n_i \geq n_0$, 有

$$\begin{aligned} \|\lambda^{(n_i)} - \lambda\|_{L^2(S)} &\leq \|\lambda^{(n_i)} - \lambda + \rho_{n_i} g(u_\tau^{(n_i)} - u_\tau)\|_{L^2(S)} \leq \\ &\sqrt{C_p} \|\lambda^{(n_0)} - \lambda + \rho_{n_0} g(u_\tau^{(n_0)} - u_\tau)\|_{L^2(S)} \leq \frac{1}{2} \|\bar{\lambda} - \lambda\|_{L^2(S)} . \end{aligned} \quad (40)$$

即对 $\forall n_i \geq n_0$ 有

$$\|\lambda^{(n_i)} - \bar{\lambda}\|_{L^2(S)} \geq \|\bar{\lambda} - \lambda\|_{L^2(S)} - \|\lambda^{(n_i)} - \lambda\|_{L^2(S)} \geq \frac{1}{2} \|\bar{\lambda} - \lambda\|_{L^2(S)} ,$$

与假设矛盾, 所以 $\bar{\lambda} = \lambda$, 即 $\{\lambda^{(n)}\}$ 收敛于 λ .

3 数值算例

本文利用自适应 Uzawa 块松弛迭代算法求解具有滑动边界条件的 Stokes 问题, 迭代过程中通过迭代函数自动调整罚参数, 用变参数 ρ_n 代替固定参数 $\rho^{[14-17]}$, 从而达到提高算法效率的目的. 下面具体考虑算法2中选取罚参数 ρ_n 的自适应法则. 根据算法的收敛性证明, 由式(27)知下式成立:

$$\|\lambda^{(n+1)} - \lambda - \rho_n g(u_\tau^{(n+1)} - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2 \leq \|\lambda^{(n)} - \lambda - \rho_n g(u_\tau^n - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2 .$$

为了利用平衡加快收敛, 我们希望

$$\|\lambda^{(n)} - \lambda\|_{L^2(S)}^2 \approx \|\rho_n g(u_\tau^{(n)} - u_\tau)\|_{L^2(S)}^2 .$$

在上式中分别用 $\lambda^{(n+1)}, u_\tau^{(n+1)}$ 替代 λ, u_τ 可得

$$\|\lambda^{(n)} - \lambda^{(n+1)}\|_{L^2(S)}^2 \approx \|\rho_n g(u_\tau^{(n)} - u_\tau^{(n+1)})\|_{L^2(S)}^2 .$$

从而可采用如下法则选择变参数 ρ_n : 给定一个正常数 $\tau > 0$, 若

$$\|\rho_n g(u_\tau^{(n+1)} - u_\tau^{(n)})\|_{L^2(S)} > (1 + \tau) \|\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}\|_{L^2(S)} ,$$

则在下次迭代时 ρ_n 变小; 若

$$\|\rho_n g(u_\tau^{(n+1)} - u_\tau^{(n)})\|_{L^2(S)} < \frac{1}{1 + \tau} \|\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}\|_{L^2(S)} ,$$

则在下次迭代时 ρ_n 变大. 综上, 令

$$w_n = \frac{\|\rho_n g(u_\tau^{(n+1)} - u_\tau^{(n)})\|_{L^2(S)}}{\|\lambda^{(n+1)} - \lambda^{(n)}\|_{L^2(S)}} ,$$

可得如下选取罚参数的自适应法则:

$$\rho_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{1 + s_n} \rho_n , & w_n > 1 + \tau , \\ (1 + s_n) \rho_n , & w_n < \frac{1}{1 + \tau} , \\ \rho_n , & \text{others} . \end{cases}$$

序列 $\{s_n\}$ 按照如下方式得到:

$$s_n = \begin{cases} \tau, & c_n < c_{n+1}, c_{n+1} \leq c_{\max}, \\ \frac{1}{(c_{n+1} - c_{\max})^2} \rho_n, & c_n < c_{n+1}, c_{n+1} > c_{\max}, \\ 0, & \text{others,} \end{cases}$$

其中 c_{\max} 是一个正常数, c_n 表示 ρ_n 改变的次数, 即

$$c_0 = 0, c_{n+1} = \begin{cases} c_n, & \frac{1}{1 + \tau} \leq w_n \leq 1 + \tau, \\ c_n + 1, & \text{others.} \end{cases}$$

显然序列 $\{s_n\}$ 满足 $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n < +\infty$. 在数值算例中, 我们取 $\tau = 2$ 和 $c_{\max} = 100$.

为了验证算法的有效性, 我们给出一个数值算例^[6]. 设 Ω 是单位正方形区域, 边界 $\partial\Omega$ 由 Γ 和 S 两部分组成, 其中 $\Gamma = \{(0, x_2) \mid 0 < x_2 < 1\} \cup \{(x_1, 0) \mid 0 \leq x_1 \leq 1\} \cup \{(1, x_2) \mid 0 < x_2 < 1\}$, $S = \{(x_1, 1) \mid 0 \leq x_1 \leq 1\}$. 给出在黏性边界条件 $\mathbf{u} \mid_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$ 下 Stokes 问题的解:

$$\begin{cases} u_1(x_1, x_2) = 10x_1^2(1 - x_1)^2x_2(1 - x_2)(1 - 2x_2), \\ u_2(x_1, x_2) = -10x_1(1 - x_1)(1 - 2x_1)x_2^2(1 - 2x_2)^2, \\ p(x_1, x_2) = 20x_1(1 - x_1)(1 - 2x_1)x_2(1 - x_2)(1 - 2x_2) + \\ \quad 2(6x_1^5 - 15x_1^4 + 10x_1^3)(2x_2 - 1) - 1. \end{cases} \quad (41)$$

设黏性系数 $\nu = 1$, 其中外力 \mathbf{f} 为

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 120(2x_1 - 1)x_2^2(1 - x_2)^2 + 80x_1(1 - x_1)(1 - 2x_1)(6x_2^2 - 6x_2 + 1) + \\ \quad 8(6x_1^5 - 15x_1^4 + 10x_1^3). \end{cases}$$

通过直接计算, 可得

$$\max_{\Gamma_1} |\sigma_\tau| = \max_{0 \leq x_1 \leq 1} |20x_1^2(1 - x_1)^2| = 1.25.$$

显然当摩擦因数 $g > 1.25$ 时, 不发生滑动现象, 根据式(41) 可得精确解; $g \leq 1.25$ 时, 则发生滑动现象, 式(41) 得到的解就不再是一个精确解, 因此我们就需要更精细的网格的近似解作为参考^[6]. 取罚参数 $\rho = 1$ 和步长 $h = 1/20$, 并用算法 2 求解, $g = 0.8$ 和 $g = 2$ 流速 \mathbf{u} 的数值解分别如图 1、图 2 所示.

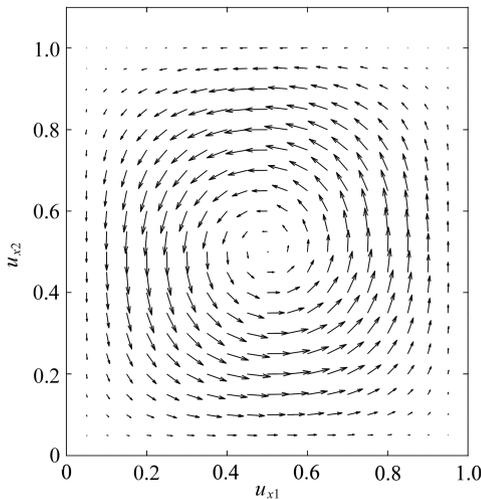


图 1 $g = 0.8$ 时的速度数值解

Fig. 1 The numerical solution of velocity for $g = 0.8$

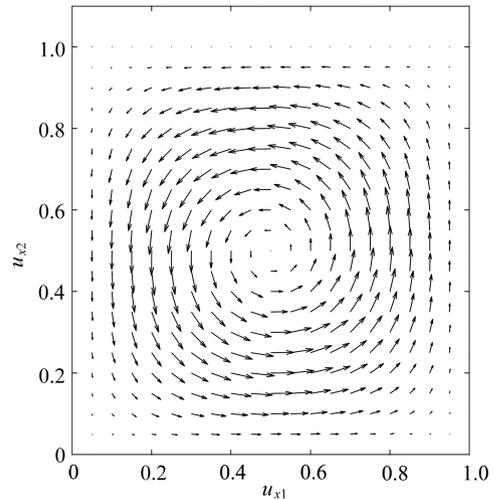


图 2 $g = 2$ 时的速度数值解

Fig. 2 The numerical solution of velocity for $g = 2$

从图中可以清晰地观察到, 当 $g = 0.8$ 时发生滑动现象; 当 $g = 2$ 时不会发生滑动现象. 这与理论分析和

精确解结果是一致的。

在此考查罚参数的自适应法则效果,取不同的初始罚参数 ρ 和步长 h ,分别采用 Uzawa 块松弛算法和自适应 Uzawa 块松弛算法对 $g = 0.8$ 和 $g = 2$ 的问题进行数值计算,所对应的迭代次数和 CPU 运行时间见表 1~4,其中“500+”表示迭代次数超过 500.表中数值结果表明,自适应 Uzawa 块松弛算法收敛速度及运行速度明显优于 Uzawa 块松弛算法,并且对所有的罚参数具有较好的稳定性。

表 1 $g = 0.8$ 时两种算法的迭代次数

Table 1 The number of iterations for each method with $g = 0.8$

ρ	n_{UBRM}				n_{SUBRM}			
	$h = \frac{1}{10}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{30}$	$h = \frac{1}{40}$	$h = \frac{1}{10}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{30}$	$h = \frac{1}{40}$
10^{-2}	500+	500+	500+	500+	34	43	45	47
10^{-1}	500+	500+	500+	500+	31	40	42	43
1	111	174	163	167	26	35	38	40
10	61	69	61	59	31	38	41	43
10^2	89	95	96	97	34	45	45	47
10^3	500+	500+	500+	500+	40	46	49	51
10^4	500+	500+	500+	500+	44	50	52	54
10^5	500+	500+	500+	500+	47	53	56	58

表 2 $g = 0.8$ 时两种算法的 CPU 运行时间

Table 2 The CPU time for each method with $g = 0.8$

ρ	$t_{\text{UBRM}} / \text{s}$				$t_{\text{SUBRM}} / \text{s}$			
	$h = \frac{1}{10}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{30}$	$h = \frac{1}{40}$	$h = \frac{1}{10}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{30}$	$h = \frac{1}{40}$
10^{-2}	>31.097	>118.515	>119.38	>584.378	2.01	11.026	28.519	55.209
10^{-1}	>27.452	>117.683	>123.462	>595.792	2.002	9.901	25.861	50.668
1	6.22	41.603	98.553	193.098	1.634	8.662	24.434	46.631
10	3.507	16.763	36.715	69.25	2.171	9.309	25.671	49.42
10^2	5.542	23.996	61.305	112.16	2.416	11.624	27.611	55.704
10^3	>27.845	>118.358	>121.235	>573.482	2.378	11.21	30.491	58.64
10^4	>30.902	>135.307	>120.341	>607.53	2.871	12.45	30.052	62.792
10^5	>31.388	>123.494	>119.899	>579.134	3.011	13.143	33.366	68.783

表 3 $g = 2$ 时两种算法的迭代次数

Table 3 The number of iterations for each method with $g = 2$

ρ	n_{UBRM}				n_{SUBRM}			
	$h = \frac{1}{10}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{30}$	$h = \frac{1}{40}$	$h = \frac{1}{10}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{30}$	$h = \frac{1}{40}$
10^{-2}	500+	500+	500+	500+	52	55	56	57
10^{-1}	500+	500+	500+	500+	49	51	53	53
1	500+	500+	500+	500+	45	48	49	50
10	500+	500+	500+	500+	43	45	46	46
10^2	141	500+	500+	500+	48	50	51	52
10^3	181	292	286	369	51	53	54	55
10^4	500+	500+	500+	500+	55	57	58	58
10^5	500+	500+	500+	500+	59	61	61	62

表 4 $g = 2$ 时两种算法的 CPU 运行时间
Table 4 The CPU time for each method with $g = 2$

ρ	$t_{\text{UBRM}} / \text{s}$				$t_{\text{SUBRM}} / \text{s}$			
	$h = \frac{1}{10}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{30}$	$h = \frac{1}{40}$	$h = \frac{1}{10}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{30}$	$h = \frac{1}{40}$
10^{-2}	>24.937	>105.332	>275.161	>503.184	2.711	12.067	30.32	58.841
10^{-1}	>24.747	>105.719	>275.939	>502.372	2.612	11.368	28.549	57.238
1	>25.304	>105.05	>275.403	>504.571	2.377	10.597	26.709	52.134
10	>25.223	>105.269	>267.194	>506.198	2.256	10.288	24.893	48.184
10^2	7.203	>106.51	>270.95	>506.609	2.525	10.887	27.839	61.552
10^3	9.063	63.449	152.343	369.783	2.646	11.604	29.15	64.981
10^4	>24.906	>110.552	>267.787	>534.091	2.859	12.42	31.236	69.143
10^5	>25.025	>107.299	>265.87	>540.688	3.104	13.209	33.315	73.063

4 结 论

本文提出了求解滑动边界条件下 Stokes 问题的自适应 Uzawa 块松弛算法.该算法不仅计算简单,并且给出的自适应法则可以利用迭代函数自动选择合适的罚参数,有效解决了 Uzawa 块松弛算法的迭代次数高度依赖于罚参数 ρ 的不足的问题,从而显著提高了算法性能.数值结果表明了该算法的优越性.

参考文献 (References):

- [1] 黄鹏展, 何银年, 冯新龙. 解 Stokes 特征值问题的一种两水平稳定化有限元方法[J]. 应用数学和力学, 2012, **33**(5): 588-597. (HUANG Pengzhan, HE Yinnian, FENG Xinlong. A two-level stabilized finite element method for the Stokes eigenvalue problem[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **33**(5): 588-597. (in Chinese))
- [2] SHI D Y, PEI L F. Superconvergence of nonconforming finite element penalty scheme for Stokes problem using L^2 projection method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2013, **34**(7): 861-874.
- [3] FUJITA H. A mathematical analysis of motions of viscous incompressible fluid under leak or slip boundary conditions[J]. *RIMS Kôkyûroku*, 1994, **888**(1): 199-216.
- [4] SAITO N. On the Stokes equation with the leak and slip boundary conditions of friction type: regularity of solutions[J]. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 2004, **40**(2): 345-383.
- [5] LI Y, LI K T. Uzawa iteration method for Stokes type variational inequality of the second kind[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series)*, 2011, **27**(2): 303-316.
- [6] KASHIWABARA T. On a finite element approximation of the Stokes problem under leak or slip boundary conditions of friction type[J]. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 2013, **30**(1): 227-261.
- [7] JING F F, LI J, YAN W J. Discontinuous Galerkin methods for a stationary Navier-Stokes problem with a nonlinear slip boundary condition of friction type[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2017, **73**(2): 113-119.
- [8] 周康瑞, 尚月强. 带非线性滑移边界条件的 Stokes 方程的一种并行有限元算法[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, **45**(5): 32-38. (ZHOU Kangrui, SHANG Yueqiang. A parallel finite element algorithm for Stokes equations with nonlinear slip boundary conditions[J]. *Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)*, 2020, **45**(5): 32-38. (in Chinese))
- [9] 饶玲. 单调迭代结合虚拟区域法求解非线性障碍问题[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(4): 485-492. (RAO Ling. Monotone iterations combined with fictitious domain methods for numerical solution of nonlinear obstacle problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(4): 485-492. (in Chinese))
- [10] GLOWINSKI R. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- [11] KOKO J. Uzawa block relaxation method for the unilateral contact problem[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, **235**(8): 2343-2356.

- [12] DJOKO J K, KOKO J. Numerical methods for the Stokes and Navier-Stokes equations driven by threshold slip boundary conditions[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, **305**(15): 936-958.
- [13] 王光辉, 王烈衡. 基于对偶混合变分形式的 Uzawa 型算法[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(7): 682-688. (WANG Guanghui, WANG Lieheng. Uzawa type algorithm based on dual mixed variational formulation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, **23**(7): 682-688. (in Chinese))
- [14] HE B S. Self-adaptive operator splitting methods for monotone variational inequalities[J]. *Numerische Mathematik*, 2013, **94**(4): 715-737.
- [15] 郭楠馨, 张守贵. 自由边界问题的自适应 Uzawa 块松弛算法[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(6): 682-693. (GUO Nanxin, ZHANG Shougui. A self-adaptive Uzawa block relaxation algorithm for free boundary problems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(6): 682-693. (in Chinese))
- [16] ZHANG S G. Projection and self-adaptive projection methods for the Signorini problem the BEM[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, **74**(6): 1262-1273.
- [17] ZHANG S G, LI X L. A self-adaptive projection method for contact problems with the BEM[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, **55**: 145-159.