应用数学和力学
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

含非线性阻尼的2D g-Navier-Stokes方程解的一致渐近性

王小霞

Uniform Asymptoticity of the Solution to the 2D g-Navier-Stokes Equation With Nonlinear Damping

WANG Xiaoxia

在线阅读 View online: https://doi.org/10.21656/1000-0887.410398 http://www.applmathmech.cn

含非线性阻尼的 2D *g*-Navier-Stokes 方程解的一致渐近性*

王小霞

（延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000）

摘要： 研究了有界区域上含非线性阻尼的 2D *g*-Navier-Stokes 方程解的一致渐近性, 通过证明过程族的一致吸收集存在和一致条件 (C) 成立, 得到了含非线性阻尼的 2D *g*-Navier-Stokes 方程一致吸引子存在.

关　键　词： *g*-Navier-Stokes 方程； 一致条件 (C)； 一致渐近性

中图分类号： O175; O35　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.410398

Uniform Asymptoticity of the Solution to the 2D *g*-Navier-Stokes Equation With Nonlinear Damping

WANG Xiaoxia

（*College of Mathematics and Computer Science*, *Yan'an University*, *Yan'an*, *Shaanxi* 716000, *P.R.China*）

Abstract: The uniform asymptoticity of the 2D *g*-Navier-Stokes equation with nonlinear damping in a bounded domain was studied. The existence of the uniform absorption set of the process family and the satisfaction of the uniform condition (C) were proved, and the uniform attractors of the 2D *g*-Navier-Stokes equation with nonlinear damping were obtained.

Key words: *g*-Navier-Stokes equation; uniform condition (C); uniform asymptoticity

引　　言

长期以来, 对动力系统渐近行为的研究是现代数学物理最重要的问题之一, 特别是对耗散动力系统来说, 解决这一问题的方式之一就是分析其吸引子的存在性和结构. Navier-Stokes 方程是一类描述流体运动的典型的非线性方程, 在科学和工程领域有着非常广泛的应用. 而 2D *g*-Navier-Stokes 方程的研究最初也源于 3D 薄区域上的 Navier-Stokes 方程. 在过去的十多年里, 2D *g*-Navier-Stokes 方程被国内外众多学者广泛研究, 其吸引子的存在性也陆续得到证明. 2001 年, 韩国学者 Roh 和 Bae 在文献 [1-3] 中对 2D *g*-Navier-Stokes 方程进行了详细分析, 证明了该方程弱解的存在性和解的全局吸引子存在性. 文献 [4] 讨论了 2D *g*-Navier-Stokes 方程解的全局吸引子存在性并对其维数进行了估计; 文献 [5] 讨论了全空间上含线性阻尼的 2D *g*-Navier-Stokes 方

* **收稿日期：** 2020-12-31; **修订日期：** 2021-10-10

基金项目： 国家自然科学基金 (11971378); 陕西省自然科学基金 (2018JM1042); 陕西省大学生创新创业训练计划 (S202110719115)

作者简介： 王小霞(1978—), 女, 副教授, 硕士, 硕士生导师(E-mail: yd-wxx@163.com).

引用格式： 王小霞. 含非线性阻尼的 2D *g*-Navier-Stokes 方程解的一致渐近性[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(4): 416-423.

程解的全局吸引子存在性; 文献 [6] 讨论了多连通区域上 2D g-Navier-Stokes 方程解的全局吸引子存在性; 文献 [7-11] 对 2D g-Navier-Stokes 方程的拉回吸引子进行了研究. 由此可见, 目前对 2D g-Navier-Stokes 方程解的全局渐近性和拉回渐近性研究成果较多, 而对其解的一致渐近性研究尚不多见. 本文在上述文献的基础上, 在 2D g-Navier-Stokes 方程中引入非线性阻尼项$c|u|^{\beta-1}u$, 在有界区域$\Omega\subset R^2$和 Dirichlet 边界条件下对该方程进行研究. 相对于线性阻尼而言, 对于非线性阻尼的情形研究难度更大, 因此本文的研究工作具有一定的创新性和理论价值.

随着对 2D g-Navier-Stokes 方程研究成果的日益丰富, 近年来, 国内外部分学者已经开始关注 2D 随机 Navier-Stokes 方程和随机 g-Navier-Stokes 方程的随机吸引子的问题研究[12-15]. 因此, 本文对 2D g-Navier-Stokes 方程解的一致渐近行为进行研究, 证明了 2D g-Navier-Stokes 方程在含有非线性阻尼情形下的解的一致吸引子存在性, 进一步丰富了 2D g-Navier-Stokes 方程解的一致渐近性理论, 也便于在此基础上在后续研究中探讨随机情形下 2D g-Navier-Stokes 方程解的一致渐近性.

在本文中, 有界区域$\Omega\subset R^2$上含有非线性阻尼的 2D g-Navier-Stokes 方程一般形式如下:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\upsilon\Delta u+(u\cdot\nabla)u+c|u|^{\beta-1}u+\nabla p=f(x,t), & \text{in } \Omega\times(0,+\infty),\\ \nabla\cdot(gu)=0, & \text{in } \Omega\times(0,+\infty),\\ u(x,t)=0, & \text{in } \partial\Omega,\\ u|_{t=\tau}=u_\tau, & x\in\Omega,\ t\in\mathbf{R},\end{cases}\tag{1}$$

这里$u(x,t)\in R^2$, $p(x,t)\in\mathbf{R}$分别代表速度与压力, $\upsilon>0$, $f=f(x,t)$是外力项, $c|u|^{\beta-1}u$是非线性阻尼项, $\beta\geqslant 1$和$c>0$是常数, $0<m_0\leqslant g=g(x_1,x_2)\leqslant M$, 这里$g=g(x_1,x_2)$是某实值光滑函数.

1　预备知识

由 Poincaré不等式知, 在有界区域Ω上, 存在$\mu_1>0$, 使得

$$\int_\Omega\varphi^2 g\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\mu_1}\int_\Omega|\nabla\varphi|^2 g\mathrm{d}x.\tag{2}$$

设空间$L^2(g)=(L^2(\Omega))^2$, 其内积为$(u,v)=\int_\Omega u\cdot vg\mathrm{d}x$,范数为$|\cdot|=(\cdot,\cdot)^{1/2}$, 这里$u,v\in L^2(g)$, 设$H_0^1(g)=(H_0^1(\Omega))^2$, 其内积和范数分别为$((u,v))=\int_\Omega\sum_{j=1}^2\nabla u_j\nabla v_j g\mathrm{d}x$和$\|\cdot\|=((\cdot,\cdot))^{1/2}$, 这里$u=(u_1,u_2)$, $v=(v_1,v_2)\in H_0^1(g)$. 设$D(\Omega)$为在Ω中有紧支集的C^∞函数空间, $W=\{v\in(D(\Omega))^2:\nabla\cdot gv=0在\Omega上\}$, W在$L^2(g)$中的闭包为H_g, W在$H_0^1(g)$中的闭包为V_g, H_g具有$L^2(g)$的内积和范数, V_g具有$H_0^1(g)$的内积和范数. 定义 g-Laplace 算子, 可将式 (1) 写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\upsilon\Delta_g u+\upsilon\frac{\nabla g}{g}\cdot\nabla u+c|u|^{\beta-1}u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=f.\tag{3}$$

定义 g-正交投射$P_g:L^2(g)\to H_g$和 g-Stokes 算子$A_g u=-P_g\left(\frac{1}{g}(\nabla\cdot(g\nabla u))\right)$, 将$P_g$作用于方程 (3), 可得以下弱形式: 设$f\in V_g, u_0\in H_g$, 有$u\in L^\infty\left(0,T;H_g\right)\cap L^2\left(0,T;V_g\right), T>0$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u,v)+\upsilon((u,v))+c\left(|u|^{\beta-1}u,v\right)+b_g(u,u,v)+\upsilon(Ru,v)=(f,v),\tag{4}$$

$$u(0)=u_0,\qquad\forall u\in V_g,\forall t\geqslant 0,\tag{5}$$

这里$b_g:V_g\times V_g\times V_g\to\mathbf{R}$, 且

$$b_g(u,v,w)=\sum_{i,j=1}^2\int u_i\frac{\partial v_j}{\partial x}w_j g\mathrm{d}x,\ Ru=P_g\left[\frac{1}{g}(\nabla g\cdot\nabla)u\right],\qquad\forall u\in V_g.$$

则式 (4) 和 (5) 等价于下面的方程:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\upsilon A_g u+c|u|^{\beta-1}u+B(u)+\upsilon Ru=f,\tag{6}$$

$$u(0)=u_0,\tag{7}$$

这里$A_g:V_g\to V_g'$是 g-Stokes 算子, 且$\langle A_g u,v\rangle=((u,v))$, $\forall u,v\in V_g$; $B(u)=B(u,u)=P_g(u,\nabla)u$ 是双线性算子, 且

$B: V_g \times V_g \to V_g'$, $(B(u,v),w) = b_g(u,v,w)$, $\forall u,v,w \in V_g$. B和R满足下面不等式:

$$\|Bu\|_{V_g'} \leqslant c|u|_2^2\|u\|,\ \|Ru\|_{V_g'} \leqslant \frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\|u\|, \qquad \forall u \in V_g.$$

命题 1[3] 对线性算子A_g, 下面结论成立:

① 算子A_g是正、自伴紧可逆算子, 其定义域$D(A_g) = V_g \cap H^2(\Omega)$;

② 算子A_g存在可数特征根$\lambda_i (i = 1,2,\cdots)$且满足$0 < \lambda_g \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots$, 这里$\lambda_g = 4\pi^2 m_0/M_0$, λ_1是A_g的最小特征根. 此外存在相应的一组特征函数$\{e_1, e_2, e_3, \cdots\}$构成$H_g$的一个正交基.

由式 (2) 可得

$$|u|_2^2 \leqslant \frac{1}{\mu_1}\|u\|^2,\ \|u\|^2 \leqslant \frac{1}{\mu_2}\left|A_g u\right|_2^2, \qquad \forall u \in V_g. \tag{8}$$

令$G(u) = P_g F(u)$, $F(u) = c|u|^{\beta-1}u$, 则式 (6) 和 (7) 等价于

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \nu A_g u + B(u) + G(u) + \nu R u = f, \tag{9}$$

$$u(0) = u_0. \tag{10}$$

记$L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},X)$表示在 Bochner 意义下由所有局部 2 次可积函数$g(s) \in X$, $s \in \mathbf{R}$构成的函数空间. 特别若X是自反、可分离的, 则将$L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},X)$表示为$L^{2,\mathrm{w}}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},X)$. 设$f(s) \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},X)$, 若$\|f\|_{L^2_\mathrm{b}} = \|f\|_{L^2_\mathrm{b}(\mathbf{R},X)} = \left(\sup_{t\in\mathbf{R}}\int_t^{t+1}|f(s)|_X^2\mathrm{d}s\right)^{1/2} < \infty$, 则称$f(s)$为平移有界的, 用$L^2_\mathrm{b}(\mathbf{R},X)$表示$L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},X)$中全体平移有界函数构成的函数空间. 借助经典的 Galerkin 方法, 可得下面结论成立, 证明过程与文献 [16-18] 类似.

定理 1 设$f(s) \in L^2_\mathrm{b}(\mathbf{R},V_g')$, $u_\tau \in H_g$, 且$\beta \geqslant 1$, 则式 (9)、(10) 存在唯一的弱解$u(t)$, 满足

$$u \in C(\mathbf{R}_\tau, H_g) \cap L^2(\mathbf{R}_\tau, H_g) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_\tau, V_g).$$

若

$$7/2 \leqslant \beta \leqslant 5,\ f(s) \in L^2_\mathrm{b}(\mathbf{R}, H_g),\ u_\tau \in V_g,$$

则式 (9)、(10) 存在一个强解$u(t)$, 满足

$$u \in C(\mathbf{R}_\tau, V_g) \cap L^\infty(\mathbf{R}_\tau, V_g) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_\tau, D(A_g)),$$

这里A_g是 g-Stokes 算子, $D(A_g)$是A_g的定义域.

定义 1[19] 设E为 Banach 空间, $\{U(t,\tau)\} = \{U(t,\tau) | t \geqslant \tau, \tau \in \mathbf{R}\}$是$E$上的一个双参数族算子, $U(t,\tau): E \to E$, $t \geqslant \tau, \tau \in \mathbf{R}$. 设$\Sigma$是一个参数集, 如果对每个$\sigma \in \Sigma$, $\{U_\sigma(t,\tau)\}$都是一个过程, 即$\{U_\sigma(t,\tau)\}$满足①$U_\sigma(t,s) \circ U_\sigma(s,\tau) = U_\sigma(t,\tau), \forall t \geqslant \tau, \tau \in \mathbf{R}$; ②$U_\sigma(\tau,\tau) = I_\mathrm{d}$, $\tau \in \mathbf{R}$. 其中I_d为恒等算子, Σ为符号空间, $\sigma \in \Sigma$为符号, 则称$\{U_\sigma(t,\tau)\}(\sigma \in \Sigma)$是 Banach 空间$E$中的过程族.

定义 2[20] 设任意的$\tau \in \mathbf{R}$和每个$B \in B(E)$, 都存在$t_0 = t_0(\tau,\beta) > \tau$, 使得$\bigcup_{\sigma\in\Sigma} U_\sigma(t,\tau)\beta \subseteq B_0$, $\forall t > t_0$, 这里$B(E)$表示空间E中全体有界集. 则称$B_0 \in E$为过程族$\{U_\delta(t,\tau)\}(\delta \in \Sigma)$的有界一致吸收集.

定义 3[16] 若每个固定的$\tau \in \mathbf{R}$和每个$B \in B(E)$, 都有 $\lim_{t\to\infty}(\sup_{\sigma\in\Sigma}\mathrm{dist}(U_\sigma(t,\tau)B, Y)) = 0$, 则集合$Y \subset E$称为过程族$\{U_\sigma(t,\tau)\}(\sigma \in \Sigma)$的一致吸引集.

定义 4[16] 如果一个闭的一致吸引集$A_\Sigma \subset E$包含在过程族$\{U_\sigma(t,\tau)\}(\sigma \in \Sigma)$的任意一个闭的一致吸引集中, 则$A_\Sigma$称为过程族$\{U_\sigma(t,\tau)\}(\sigma \in \Sigma)$的一致吸引子.

定义 5[21] 如果对任意固定的$\tau \in \mathbf{R}$, $B \in B(E)$和$\sigma \in \mathbf{R}$, 存在$t_0 = t_0(\tau, B, \varepsilon)$及 E 的有限维子空间E_m, 使得$P\left(\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcup_{t\geqslant t_0} U_\sigma(t,\tau)B\right)$有界且$\left\|(I-P)\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcup_{\tau\geqslant t_0} U_0(t,\tau)x\right\|_E \leqslant \varepsilon, \forall x \in B$. 其中$\dim E_m = m$, 且$P_m: E \to E_m$是有界投影, 则称过程族$\{U_\sigma(t,\tau)\}(\sigma \in \Sigma)$满足一致条件 (C).

设$\{T(h) | h \geqslant 0\}$是作用在符号空间上的一族算子, 满足

① $T(h)\Sigma = \Sigma$, $\qquad \forall h \in \mathbf{R}_+$;

② $U_\sigma(t+h, \tau+h) = U_{T(h)\sigma}(t,\tau)$, $\qquad \forall \sigma \in \Sigma,\ t \geqslant \tau, \tau \in \mathbf{R},\ h \geqslant 0$.

引理 1[21]　设Σ为完备度量空间, 且$\{T(t)\}$是Σ上的一个连续不变半群, 如果过程族$\{U_\sigma(t,\tau)\}(\sigma\in\Sigma)$存在有界一致吸收集$B$, 且满足一致条件 (C), 则$\{U_\sigma(t,\tau)\}(\sigma\in\Sigma)$在 E 中有紧的一致吸引子A_Σ, 且满足$A_\Sigma=\omega_{0,\Sigma}(B_0)=\omega_{\tau,\Sigma}(B_0),\forall t\in\mathbf{R}$. 这里$\omega_{\tau,\Sigma}(B_0)=\bigcap_{t\geqslant\tau}\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcup_{s\geqslant t}U_\sigma(s,\tau)B_0$表示$B_0$的一致$\omega$-极限集.

定义 6[17]　设X为 Banach 空间, 若对任意的$\varepsilon>0$, 存在$\eta>0$, 使得$\sup_{t\in\mathbf{R}}\int_t^{t+\eta}\|\varphi(s)\|_X^2\mathrm{d}x<\varepsilon$, 则称$\varphi\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},X)$是正规的, 记$L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},X)$中所有的正规函数构成的集合为$L^2_{\mathrm{n}}(\mathbf{R},X)$.

引理 2[17]　如果$\varphi_0\in L^2_{\mathrm{n}}(\mathbf{R},X)$, 则对任意的$\varepsilon>0$和$\tau\in\mathbf{R}$, $\lim_{t\to+\infty}\sup_{t\geqslant\tau}\int_\tau^t \mathrm{e}^{-r(t-s)}\|\varphi(s)\|_x^2\mathrm{d}s=0$成立, 其中$r>0$为常数. 这里$\varphi\in H(\varphi_0)=\overline{\{\varphi_0(t+h)|h\in\mathbf{R}\}}$. $H(\varphi_0)$是$\{\varphi_0(t+h)|h\in\mathbf{R}\}$在$L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},X)$中的闭包.

2　含非线性阻尼的 2D g-Navier-Stokes 方程解的一致渐近性

设有固定外力$f_0\in L^2_{\mathrm{n}}(\mathbf{R},H_g)$, 令$f_0(s)=f_0(\cdot,s)$在$L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},H_g)$中满足正规条件, 则由平移族$\{f_0(s+h),h\in\mathbf{R}\}$所组成的函数集合一定满足正规条件. 令$H_{\mathrm{w}}(f_0)=\overline{\{f_0(x,s+h)|h\in\mathbf{R}\}}\in L^{2,\mathrm{w}}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},H_g)$, 由文献 [17] 的命题 3.1 可知$H_{\mathrm{w}}(f_0)$是弱紧的, 且由于$f_0$在$L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},H_g)$上是正规的, 可知在$L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R},H_g)$上一定是平移有界的. 即$\|f\|_{L^2_{\mathrm{b}}}=\|f\|_{L^2_{\mathrm{b}}(\mathbf{R},X)}=\left(\sup_{t\in\mathbf{R}}\int_t^{t+1}|f(s)|_X^2\mathrm{d}s\right)^{1/2}\leqslant\|f_0\|^2_{L^2_{\mathrm{b}}}<+\infty,\forall f\in H_{\mathrm{w}}(f_0)$.

定理 2　若对任意的$u_\tau\in H_g$和$B\in B(H_g)$, 都有$t_0=t_0(\tau,B)\geqslant\tau$, 使得$\bigcup\limits_{f\in H_{\mathrm{w}}(f_0)}U_f(t,\tau)B\subset B_0$, $\forall t\geqslant t_0$. 这里$B(H_g)$表示H_g中的所有有界集, 则集合$B_0\subset H_g$是过程族$\{U_f(t,\tau)\}(f\in H_{\mathrm{w}}(f_0))$的有界一致吸收集.

证明　用u与式(3)中第一式做内积, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|_2^2+2\upsilon(Au,u)+2(c|u|^{\beta-1}u,u)+2(Bu,u)+2\upsilon(Ru,u)=2\langle f,u\rangle,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|_2^2+2\upsilon(Au,u)+2(c|u|^{\beta-1}u,u)+2(Bu,u)=2\langle f,u\rangle-2\upsilon(Ru,u),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|_2^2+2\upsilon\|u(t)\|^2+2c|u|_{\beta+1}^{\beta+1}=2\langle f,u\rangle-2\upsilon\left(\left(\frac{1}{g}\nabla g\cdot\nabla u\right),u\right),$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|_2^2+2\upsilon\|u(t)\|^2+2c|u|_{\beta+1}^{\beta+1}-2\upsilon\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\|u\|^2\leqslant\upsilon\lambda_1|u|_2^2+\frac{1}{\upsilon\lambda_1}|f|_2^2\leqslant\upsilon\|u(t)\|^2+\frac{1}{\upsilon\lambda_1}|f|_2^2,$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|_2^2+\upsilon\left(1-\frac{2|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)\|u\|^2+2c|u|_{\beta+1}^{\beta+1}\leqslant\frac{1}{\upsilon\lambda_1}|f|_2^2,$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|_2^2+\upsilon\lambda_1\left(1-\frac{2|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}\right)|u(t)|_2^2\leqslant\frac{1}{\upsilon\lambda_1}|f|_2^2.$$

令$\alpha=1-\dfrac{2|\nabla g|_\infty}{m_0\lambda_1^{1/2}}$, 则$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u(t)|_2^2+\upsilon\lambda_1\alpha|u(t)|_2^2\leqslant\dfrac{1}{\upsilon\lambda_1}|f|_2^2$, 应用 Gronwall 不等式及$f\in H_{\mathrm{w}}(f_0)$可得

$$|u(t)|_2^2\leqslant|u_\tau|_2^2\mathrm{e}^{-\upsilon\lambda_1\alpha(t-\tau)}+\frac{1}{\upsilon\lambda_1}\int_\tau^t\mathrm{e}^{-\upsilon\lambda_1\alpha(t-s)}|f(s)|_2^2\mathrm{d}s\leqslant|u_\tau|_2^2\mathrm{e}^{-\upsilon\lambda_1\alpha(t-\tau)}+\frac{1}{\upsilon\lambda_1}\left(1+\frac{1}{\upsilon\lambda_1\alpha}\right)\|f_0\|^2_{L^2_{\mathrm{b}}}.$$

当$|u_\tau|_2^2\mathrm{e}^{-\upsilon\lambda_1\alpha(t-\tau)}\leqslant\dfrac{1}{\upsilon\lambda_1}\left(1+\dfrac{1}{\upsilon\lambda_1\alpha}\right)\|f_0\|^2_{L^2_{\mathrm{b}}}$时, 即$\mathrm{e}^{\upsilon\lambda_1\alpha(t-\tau)}\geqslant\dfrac{\upsilon^2\lambda_1^2|u_\tau|^2}{(1+\upsilon\lambda_1\alpha)\|f\|^2_{L^2_{\mathrm{b}}}}$, 两边取对数得

$$\upsilon\lambda_1\alpha(t-\tau)\geqslant\ln\frac{\upsilon^2\lambda_1^2|u_\tau|_2^2}{(1+\upsilon\lambda_1\alpha)\|f\|^2_{L^2_{\mathrm{b}}}},$$

即存在$t_0\geqslant\tau+\dfrac{1}{\upsilon\lambda_1\alpha}\ln\dfrac{\upsilon^2\lambda_1^2|u_\tau|_2^2}{(1+\upsilon\lambda_1\alpha)\|f\|^2_{L^2_{\mathrm{b}}}}$, 使得当$t\geqslant t_0$时, 有

$$|u(t)|_2^2\leqslant\frac{2}{\upsilon\lambda_1}\left(1+\frac{1}{\upsilon\lambda_1\alpha}\right)\|f_0\|_{L_{\mathrm{b}}^2}^2=\rho_0^2.$$

即$\forall B\in B(H_g)$, 存在$t_0=t_0(\tau,B)\geqslant\tau$, 有$\bigcup\limits_{f\in H_{\mathrm{w}}(f_0)}U_f(t,\tau)B\subset B_0$. 由定义 2 可知, $B_0\subset H_{\mathrm{g}}$是式 (3) 解的过程族$\{U_f(t,\tau)\}$ $(f\in H_{\mathrm{w}}(f_0))$的有界一致吸收集.

定理 3 设$f\in L_{\mathrm{b}}^2(\mathbf{R},H_g)$, $u_2\in H_g$, 则式 (3) 的解所对应的过程族$\{U_f(t,\tau)\}(f\in H_{\mathrm{w}}(f_0))$在$V_g$中存在有界一致吸收集$B_1$.

证明 用A_g与式 (3) 两边做内积可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\upsilon|A_gu|_2^2+c\int_\Omega|u|^{\beta-1}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{c(\beta-1)}{4}\int_\Omega|u|^{\beta-3}\left|\nabla|u|^2\right|^2\mathrm{d}x+\upsilon(Ru,A_gu)=(f,Au),$$

即

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\upsilon|A_gu|_2^2+c\int_\Omega|u|^{\beta-1}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{c(\beta-1)}{4}\int_\Omega|u|^{\beta-3}\left|\nabla|u|^2\right|^2\mathrm{d}x=(f,Au)-\upsilon(Ru,A_gu),$$

这里

$$\upsilon|(Ru,A_gu)|\leqslant\upsilon|Ru|\cdot|A_gu|_2\leqslant\upsilon\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0}\|u\|\cdot|A_gu|_2\leqslant\upsilon\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0}\frac{1}{\sqrt{\mu_2}}|A_gu|_2^2.$$

则$\forall u\in D(A_gu)$有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+2\upsilon|A_gu|_2^2+2c\int_\Omega|u|^{\beta-1}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{c(\beta-1)}{2}\int|u|^{\beta-3}\left|\nabla|u|^2\right|^2\mathrm{d}x\leqslant\upsilon|A_gu|_2^2+\frac{1}{\upsilon}|f(t)|_2^2+2\upsilon\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0}\frac{1}{\sqrt{\mu_2}}|A_gu|_2^2,$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+2\upsilon|A_gu|_2^2+2c\int_\Omega|u|^{\beta-1}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{c(\beta-1)}{2}\int|u|^{\beta-3}\left|\nabla|u|^2\right|^2\mathrm{d}x-2\upsilon\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0}\frac{1}{\sqrt{\mu_2}}|A_gu|_2^2\leqslant\upsilon|A_gu|_2^2+\frac{1}{\upsilon}|f(t)|_2^2.$$

而

$$2c\int_\Omega|u|^{\beta-1}|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{c(\beta-1)}{2}\int|u|^{\beta-3}\left|\nabla|u|^2\right|^2\mathrm{d}x\geqslant0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\upsilon\left(1-\frac{2|\nabla g|_\infty}{m_0\sqrt{\mu_2}}\right)|A_gu|_2^2\leqslant\frac{1}{\upsilon}|f(t)|_2^2.$$

由式 (8) 有 $\|u\|^2\leqslant\frac{1}{\mu_2}|A_gu|_2^2,\forall u\in V_g$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|^2+\upsilon\mu_2\gamma\|u\|^2\leqslant\frac{1}{\upsilon}|f(t)|_2^2$, 这里$\gamma=1-\frac{2|\nabla g|_\infty}{m_0\sqrt{\mu_2}}$.

运用 Gronwall 引理及$f\in H_{\mathrm{w}}(f_0)$得

$$\|u(t)\|^2\leqslant\|u(\tau)\|^2\mathrm{e}^{-\upsilon\mu_2\gamma(t-\tau)}+\frac{1}{\upsilon}\left(1+\frac{1}{\upsilon\mu_2\gamma}\right)\|f_0\|_{L_{\mathrm{b}}^2}^2.$$

令

$$\|u_2\|^2\mathrm{e}^{-\upsilon\mu_2\gamma(t-\tau)}\leqslant\frac{1}{\upsilon}\left(1+\frac{1}{\upsilon\mu_2\gamma}\right)\|f_0\|_{L_{\mathrm{b}}^2}^2=\frac{1+\upsilon\mu_2\gamma}{\upsilon^2\mu_2\gamma}\|f_0\|_{L_{\mathrm{b}}^2}^2,$$

即

$$\mathrm{e}^{\upsilon\mu_2\gamma(t-\tau)}\geqslant\frac{\upsilon^2\mu_2\gamma}{(1+\upsilon\mu_2\gamma)\|f_0\|_{L_{\mathrm{b}}^2}^2}\|u_\tau\|^2,$$

则

$$t\geqslant\tau+\frac{1}{\upsilon\mu_2\gamma}\ln\frac{\upsilon^2\mu_2\gamma\|u_\tau\|^2}{(1+\upsilon\mu_2\gamma)\|f_0\|_{L_{\mathrm{b}}^2}^2}.$$

则存在

$$t_1=\max\left\{\tau+\frac{1}{\upsilon\lambda_2\gamma}\ln\frac{\upsilon^2\lambda_2\gamma\|u_\tau\|^2}{(1+\upsilon\lambda_2\gamma)\|f_0\|_{L_{\mathrm{b}}}^2}\right\},$$

当$t\geqslant t_1$时, 有$\|u(t)\|^2\leqslant\dfrac{2}{\upsilon}\left(1+\dfrac{1}{\upsilon\mu_2\gamma}\right)\|f_0\|^2_{L^2_b}=\rho_1^2$. 即对任意的$B\in B(V_g)$, 存在$t_1=t_1(\tau,B)\geqslant\tau$使得

$$B_1=\{u\in V_g\,\big|\,\|u(t)\|^2\leqslant\rho_1^2\}.$$

下面证明方程(3)的解对应的过程族$\{U_f(t,\tau)\}$ $(f\in H_{\mathrm{w}}(f_0))$存在紧的一致吸引子.

定理 4 若$f_0(x,s)\in L^2_{\mathrm{n}}(\mathbf{R},V_g)$, $|\nabla g|_\infty<m_0$. 则方程(3)的解对应的过程族$\{U_f(t,\tau)\}(f\in H_{\mathrm{w}}(f_0))$存在紧的一致吸引子$A_{H_{\mathrm{w}}}(f_0)=W_{0,H_{\mathrm{w}}(f_0)}(B_1)=W_{\tau,H_{\mathrm{w}}(f_0)}(B_1)$. 这里$B_1$是空间$V_g$中的有界一致吸收集.

证明 由引理 1 可知, 欲证方程(3)的解对应的过程族$\{U_f(t,\tau)\}(f\in H_{\mathrm{w}}(f_0))$存在紧的一致吸引子, 只需证明过程族$\{U_\sigma(t,\tau)\}(\sigma\in\Sigma)$存在有界一致吸收集$B$, 且满足一致条件 (C) 即可, 由定理 3 可知, 方程 (3) 的解所对应的过程族$\{U_f(t,\tau)\}(f\in H_{\mathrm{w}}(f_0))$在$V_g$中存在有界一致吸收集$B_1$, 所以下面仅说明过程族$\{U_f(t,\tau)\}(f\in H_{\mathrm{w}}(f_0))$在$V_g$中满足一致条件 (C).

因为A_g^{-1}是H_g中的紧连续算子, 由经典谱理论可得, 存在序列$\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ 使得

$$0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_j\leqslant\cdots,\qquad j\to\infty,\ \lambda_j\to+\infty.$$

空间$D(A_g)$中的一族元素$\{w_j\}_{j=1}^\infty$ 在H_g中标准正交, 且$A_{w_j}=\lambda_jw_j,\forall j\in N$. 设$V_m=\mathrm{span}\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$是$V_g$的$m$维子空间, $V_m^\perp$是V_m在V_g中的正交补, 令$P_m:V_g\to V_m$是正交投影, 对任意$u\in D(A_g)$, $u=u_1+u_2$, $u_1\in V_m$, $u_2\in V_m^\perp$, 在V_g中用A_gu_2与式(9)做内积, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_2\|^2+\upsilon|A_gu_2|_2^2+(B(u),A_gu_2)+(G(u),A_gu_2)+(\upsilon Ru,A_gu_2)=(f,A_gu_2).\tag{11}$$

由文献 [19] 可知$u,v\in D(A_g)$, 有

$$|B(u,v)|\leqslant\begin{cases}c_1|u|_2^{1/2}\|u\|^{1/2}\|v\|^{1/2}|A_gv|_2^{1/2},\\ c_1|u|_2^{1/2}|A_gu|_2^{1/2}\|v\|,\end{cases}$$

$$|\phi|_{L^\infty(\Omega)^2}\leqslant c_2\|\phi\|\left(1+\lg\frac{|A_g\phi|_2^2}{\lambda_1\|\phi\|^2}\right)^{1/2},\qquad\forall\phi\in D(A_g),$$

故有

$$|B(u,v)|\leqslant|(u,\nabla)v|\leqslant\begin{cases}|u|_{L^\infty(\Omega)}|\nabla v|_2,\\ |u|_2|\nabla v|_{L^\infty(\Omega)},\end{cases}$$

可得

$$|B(u,v)|\leqslant\begin{cases}c_3\|u\|\|v\|\left(1+\lg\dfrac{|A_gu|_2^2}{\lambda_1\|u\|^2}\right)^{1/2},\\ c_3|u|_2^2|A_gu|_2^2\left(1+\lg\dfrac{|A_g^{3/2}v|_2^2}{\lambda_1|A_gv|_2^2}\right),\end{cases}$$

$$|(B(u),A_gu_2)|\leqslant|(B(u_1,u_1+u_2),A_gu_2)|+|(B(u_2,u_1+u_2),A_gu_2)|\leqslant\frac{\upsilon}{4}|A_gu_2|_2^2+\frac{c_4}{\upsilon}\rho_1^4L+\frac{c_5}{\upsilon^3}\rho_0^2\rho_1^4,\qquad t\geqslant t_0+1,$$

这里$c_i(i=1,2,3,4,5)$均为常数,

$$|A_gu_1|_2^2\leqslant\lambda_m\|u_1\|^2,\ L=1+\lg\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_1},\ \|F(u)\|^2=c^2|u|^{2\beta-2}\|u\|^2\leqslant c^2\rho_0^{2\beta-2}\rho_1^2=r_0^2.$$

对式 (11) 相关项估计如下:

$$(G(u),A_gu_2)\leqslant\frac{2}{\upsilon}\|F(u)\|^2+\frac{\upsilon}{8}|A_gu_2|_2^2\leqslant\frac{2r_0^2}{\upsilon}+\frac{\upsilon}{8}|A_gu_2|_2^2,\tag{12}$$

$$(f,A_gu_2)\leqslant\frac{2}{\upsilon}|f|_2^2+\frac{\upsilon}{8}|A_gu_2|_2^2,\tag{13}$$

$$\upsilon(Ru,A_gu_2)=\upsilon\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0}\|u\||A_gu_2|\leqslant\frac{\upsilon|\nabla g|_\infty}{m_0}\left(\frac{|A_gu_2|_2^2}{2}+2\|u\|^2\right)\leqslant\frac{\upsilon|\nabla g|_\infty}{m_0}\left(\frac{|A_gu_2|_2^2}{2}+2\rho_1^2\right).\tag{14}$$

将式 (12)~(14) 代入式 (11) 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_2\|^2+2\upsilon\left|A_g u_2\right|_2^2+2(B(u),A_g u_2)+2(G(u),A_g u_2)+2\upsilon(Ru,A_g u_2)=2(f,A_g u_2),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_2\|^2+2\upsilon|A_g u_2|_2^2+2(B(u),A_g u_2)+2(G(u),A_g u_2)+2\upsilon(Ru,A_g u_2)=2(f,A_g u_2)\leqslant 2\left(\frac{2}{\upsilon}|f|_2^2+\frac{\upsilon}{8}|A_g u_2|_2^2\right),$$

则

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_2\|^2+2\upsilon|A_g u_2|_2^2\leqslant\frac{4}{\upsilon}|f|_2^2+\frac{\upsilon}{4}|A_g u_2|_2^2-2(B(u),A_g u_2)-2(G(u),A_g u_2)-2\upsilon(Ru,A_g u_2)\leqslant\\&\quad\frac{4}{\upsilon}|f|_2^2+\frac{\upsilon}{4}|A_g u_2|_2^2+2|(B(u),A_g u_2)|+2|(G(u),A_g u_2)|+2\upsilon|(Ru,A_g u_2)|\leqslant\\&\quad\frac{4}{\upsilon}|f|_2^2+\frac{\upsilon}{4}|A_g u_2|_2^2+\left(\frac{\upsilon}{2}|A_g u_2|_2^2+\frac{2c_4}{\upsilon}\rho^4L+\frac{2c_5}{\upsilon^3}\rho_0^2\rho_1^4\right)+\left(\frac{4r_0^2}{\upsilon}+\frac{\upsilon}{4}|A_g u_2|_2^2\right)+\frac{2\upsilon|\nabla g|_\infty}{m_0}\left(\frac{|A_g u_2|_2^2}{2}+2\rho_1^2\right).\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_2\|^2+2\upsilon|A_g u_2|_2^2\leqslant\frac{4}{\upsilon}|f|_2^2+\upsilon|A_g u_2|_2^2+\frac{\upsilon|\nabla g|_\infty}{m_0}|A_g u_2|_2^2+\frac{2c_4}{\upsilon}\rho_1^4L+\frac{2c_5}{\upsilon^3}\rho_0^2\rho_1^4+\frac{4r_0^2}{\upsilon}+\frac{4\upsilon|\nabla g|_\infty}{m_0}\rho_1^2.$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_2\|^2+\upsilon\left(1-\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0}\right)|A_g u_2|_2^2\leqslant\frac{4}{\upsilon}|f|_2^2+\frac{2c_4}{\upsilon}\rho_1^4L+\frac{2c_5}{\upsilon^3}\rho_0^2\rho_1^4+\frac{4r_0^2}{\upsilon}+\frac{4\upsilon|\nabla g|_\infty}{m_0}\rho_1^2.$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_2\|^2+\upsilon\left(1-\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0}\right)\lambda_{m+1}\|u_2\|^2\leqslant\frac{4}{\upsilon}|f|_2^2+\frac{2c_4}{\upsilon}\rho_1^4L+\frac{2c_5}{\upsilon^3}\rho_0^2\rho_1^4+\frac{4r_0^2}{\upsilon}+\frac{4\upsilon|\nabla g|_\infty}{m_0}\rho_1^2.$$

取

$$\alpha_1=1-\frac{|\nabla g|_\infty}{m_0}>0,$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_2\|^2+\upsilon\alpha_1\lambda_{m+1}\|u_2\|^2\leqslant\frac{4}{\upsilon}|f|_2^2+\frac{2c_4}{\upsilon}\rho_1^4L+\frac{2c_5}{\upsilon^3}\rho_0^2\rho_1^4+\frac{4r_0^2}{\upsilon}+\frac{4\upsilon|\nabla g|_\infty}{m_0}\rho_1^2.$$

由 Gronwall 引理:

$$\begin{aligned}&\|u_2\|^2\leqslant\|u_2(t_0+1)\|^2\mathrm{e}^{-\upsilon\alpha_1\lambda_{m+1}(t-(t_0+1))}+\int_{t_0+1}^t\mathrm{e}^{-\upsilon\alpha_1\lambda_{m+1}(t-s)}\mathrm{d}s\left(\frac{4}{\upsilon}|f|_2^2+\frac{2c_4}{\upsilon}\rho_1^4L+\frac{2c_5}{\upsilon^3}\rho_0^2\rho_1^4+\frac{4r_0^2}{\upsilon}+\frac{4\upsilon|\nabla g|_\infty}{m_0}\rho_1^2\right)=\\&\quad\|u_2(t_0+1)\|^2\mathrm{e}^{-\upsilon\alpha_1\lambda_{m+1}(t-(t_0+1))}+\left(\frac{2c_4}{\upsilon}\rho_1^4L+\frac{2c_5}{\upsilon^3}\rho_0^2\rho_1^4+\frac{4r_0^2}{\upsilon}+\frac{4\upsilon|\nabla g|_\infty}{m_0}\rho_1^2\right)\int_{t_0+1}^t\mathrm{e}^{-\upsilon\alpha_1\lambda_{m+1}(t-s)}\mathrm{d}s+\\&\quad\frac{4}{\upsilon}\int_{t_0+1}^t\mathrm{e}^{-\upsilon\alpha_1\lambda_{m+1}(t-s)}|f|_2^2\mathrm{d}s=\|u_2(t_0+1)\|^2\mathrm{e}^{-\upsilon\alpha_1\lambda_{m+1}(t-(t_0+1))}+\\&\quad\frac{1-\mathrm{e}^{-\upsilon\alpha_1\lambda_{m+1}(t-(t_0+1))}}{\upsilon\alpha_1\lambda_{m+1}}\left(\frac{2c_4}{\upsilon}\rho_1^4L+\frac{2c_5}{\upsilon^3}\rho_0^2\rho_1^4+\frac{4r_0^2}{\upsilon}+\frac{4\upsilon|\nabla g|_\infty}{m_0}\rho_1^2\right)+\\&\quad\frac{4}{\upsilon}\int_{t_0+1}^t\mathrm{e}^{-\upsilon\alpha_1\lambda_{m+1}(t-s)}|f|_2^2\mathrm{d}s=I_1+I_2+I_3.\end{aligned}$$

当$t\geqslant t_0+1+\dfrac{1}{\upsilon\alpha_1\lambda_{m+1}}\ln\dfrac{3\rho_1^2}{\varepsilon}$时, 有$I_1\leqslant\rho_1^2\mathrm{e}^{-\upsilon\alpha_1\lambda_{m+1}(t-(t_0+1))}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{3}$; 当$m$充分大时, $\lambda_{m+1}\to+\infty$,$I_2\leqslant\dfrac{\varepsilon}{3}$.

$\forall\varepsilon>0$, 由引理 2 可知

$$I_3=\frac{4}{\upsilon}\int_{t_0+1}^t\mathrm{e}^{-\upsilon\alpha_1\lambda_{m+1}(t-s)}|f|_2^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{\varepsilon}{3},\qquad\forall f\in H_{\mathrm{w}}(f_0).$$

从而$\|u_2(t_0+1)\|^2\leqslant I_1+I_2+I_3\leqslant\varepsilon,\forall t\geqslant t,f\in H_{\mathrm{w}}(f_0)$. 因此过程族$\{U_f(t,\tau)\}(f\in H_{\mathrm{w}}(f_0))$在$V_g$中满足一致条件 (C). 于是由引理 1 结合定理 2、定理 3 可知, 方程(3)的解对应的过程族$\{U_f(t,\tau)\}(f\in H_{\mathrm{w}}(f_0))$存在紧的一致吸引子

$A_{H_w}(f_0) = W_{0,H_w(f_0)}(B_1) = W_{\tau,H_w(f_0)}(B_1)$.

3 结　　论

本文研究了一类含有非线性阻尼的 2D g-Navier-Stokes 方程解的一致渐近行为, 即解的一致吸引子存在性问题. 在整个研究过程中, 通过证明解的过程族满足一致条件 (C), 得到方程解的一致渐近性成立. 由于解的过程族存在有界一致吸收集, 从而得到方程在 Dirichlet 边界条件下解的一致吸引子存在.

参考文献(References):

[1] ROH J. g-Navier-Stokes equations[D]. PhD Thesis. University of Minnesota, 2001.

[2] BAE H O, ROH J. Existence of solutions of the g-Navier-Stokes equations[J]. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2004, **8**(1): 85-102.

[3] ROH J. Dynamics of the g-Navier-Stokes equations[J]. *Journal of Differential Equations*, 2005, **211**(2): 452-484.

[4] KWAK M, KWEANA H, ROH J. The dimension of attractor of the 2D g-Navier-Stokes equations[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2006, **315**(2): 436-461.

[5] JIANG J P, HOU Y R. The global attractor of g-Navier-Stokes equations with linear dampness on R^2[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, **215**(3): 1068-1076.

[6] JIANG J P, WANG X X. Global attractor of 2D autonomous g-Navier-Stokes equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics(English Edition)*, 2013, **34**(3): 385-394.

[7] 姜金平, 侯延仁. 有界区域上2D非自治g-Navier-Stokes方程的拉回吸引子[J]. 应用数学和力学, 2010, **31**(6): 670-680. (JIANG Jinping, HOU Yanren. Pullback attractor of 2D non-autonomous g-Navier-Stokes equations on some bounded domains[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **31**(6): 670-680.(in Chinese))

[8] 姜金平, 侯延仁, 王小霞. 含线性阻尼的2D非自治g-Navier-Stokes方程的拉回吸引子[J]. 应用数学和力学, 2011, **32**(2): 144-157. (JIANG Jinping, HOU Yanren, WANG Xiaoxia. Pullback attractor of 2D nonautonomous g-Navier-Stokes equations with linear dampness[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, **32**(2): 144-157.(in Chinese))

[9] JIANG J P, HOU Y R, WANG X X. The pullback asymptotic behavior of the solutions for 2D nonautonomous g-Navier-Stokes equations[J]. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2012, **4**(2): 223-237.

[10] ANH C T, QUYET D T. Long-time behavior for 2D non-autonomous g-Navier-Stokes equations[J]. *Annales Polonici Mathematici*, 2012, **103**(3): 277-302.

[11] QUYET D T. Pullback attractors for strong solutions of 2D non-autonomous g-Navier-Stokes equations[J]. *Acta Mathematica Vietnamica*, 2015, **40**: 637-651.

[12] ANH C T, THANH N V, TUAN N V. On the stability of solutions to stochastic 2D g-Navier-Stokes equations with finite delays[J]. *Random Operators and Stochastic Equations*, 2017, **25**(4): 1-14.

[13] FENG X L, YOU B. Random attractors for the two-dimensional stochastic g-Navier-Stokes equations[J]. *Stochastics: an International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 2020, **92**(4): 613-626.

[14] BRZEZNIAK Z, CARABALLO T, LANGA J A, et al. Random attractors for stochastic 2D-Navier-Stokes equations in some unbounded domains[J]. *Journal of Differential Equations*, 2013, **255**: 3897-3919.

[15] BRZEZNIAK Z, LI Y. Asymptotic compactness and absorbing sets for 2D stochastic Navier-Stokes equations on some unbounded domains[J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2006, **358**(12): 5587-5629.

[16] SONG X L, HOU Y R. Uniform attractora for three-dimensional Navier-Stokes equations with nonlinear damping[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, **422**(1): 337-351.

[17] MA S, ZHONG C K, SONG H T. Attractors for nonautonomous 2D Navier-Stokes equations with less regular symbols[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009, **71**(9): 4215-4222.

[18] TEMAM R. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*[M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

[19] LU S S, WU H Q, ZHONG C K. Attractors for nonautonomous 2D Navier-Stokes equations with normal external forces[J]. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 2005, **13**(3): 701-719.

[20] CHESKIDOV A, LU S S. Uniform global attractors for the nonautonomous 3D Navier-Stokes equations[J]. *Advances in Mathematics*, 2014, **267**(2): 277-306.

[21] MA Q F, WANG S H, ZHONG C K. Necessary and sufficient conditions for the existence of global attractors for semigroup and applications[J]. *Indiana University Mathematics Journal*, 2002, **51**(6): 1541-1570.