

### 旋转输液管动力稳定性理论分析

张 博, 史天姿, 张贻林, 孙东生, 袁从敏, 丁 虎, 陈立群

### Theoretical Analysis on Dynamic Stability of Rotating Pipes Conveying Fluid

ZHANG Bo, SHI Tianzi, ZHANG Yilin, SUN Dongsheng, YUAN Congmin, DING Hu, and CHEN Liqun

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420135>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 悬索桥竖向自由振动的传递矩阵解

A Transfer Matrix Algorithm for Vertical Free Vibration of Suspension Bridges

应用数学和力学. 2019, 40(9): 991–999

#### 弹性约束边界条件下矩形蜂窝夹芯板的自由振动分析

Free Vibration Analysis of Rectangular Honeycomb-Cored Plates Under Elastically Constrained Boundary Conditions

应用数学和力学. 2019, 40(6): 583–594

#### 任意弹性边界的多段梁自由振动研究

Free Vibration of MultiSegment Beams With Arbitrary Boundary Conditions

应用数学和力学. 2020, 41(9): 985–993

#### 双功能梯度纳米梁系统振动分析的辛方法

A Symplectic Approach for Free Vibration of Functionally Graded Double-Nanobeam Systems Embedded in Viscoelastic Medium

应用数学和力学. 2018, 39(10): 1159–1171

#### 考虑表面效应的压电纳米梁的振动研究

Vibration of Piezoelectric Nanobeams With Surface Effects

应用数学和力学. 2020, 41(8): 853–865

#### 超临界输流管道3 : 1内共振下参激振动响应

Parametric Vibration Responses of Supercritical Fluid-Conveying Pipes in 3 : 1 Internal Resonance

应用数学和力学. 2018, 39(11): 1227–1235



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

## 旋转输液管动力稳定性理论分析\*

张博<sup>1,2</sup>, 史天姿<sup>1</sup>, 张贻林<sup>3</sup>, 孙东生<sup>1</sup>,  
袁从敏<sup>1</sup>, 丁虎<sup>2</sup>, 陈立群<sup>2</sup>

(1. 长安大学理学院, 西安 710064;  
2. 上海大学上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;  
3. 台山核电合营有限公司, 广东 台山 529228)

(本刊编委陈立群来稿)

**摘要:** 基于 Lagrange 原理和假设模态法建立了旋转输液管的动力学模型. 通过降阶升维的方法求解系统的特征值问题, 并分析了旋转输液管自由振动特性. 得到了不同端部集中质量和转速下, 系统特征值随流速升高的演变轨迹. 揭示了临界流速随系统参数的变化规律. 研究发现, 内部流体的流动对旋转输液管动力学特性存在显著影响. 在某些参数组合下, 系统低阶模态能够形成不同形式的内共振关系. 预示了旋转输液管模型蕴含丰富的动力学现象.

**关键词:** 旋转; 输液管; 自由振动; 假设模态法; Lagrange 方程

**中图分类号:** O32      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.420135

## Theoretical Analysis on Dynamic Stability of Rotating Pipes Conveying Fluid

ZHANG Bo<sup>1,2</sup>, SHI Tianzi<sup>1</sup>, ZHANG Yilin<sup>3</sup>, SUN Dongsheng<sup>1</sup>,  
YUAN Congmin<sup>1</sup>, DING Hu<sup>2</sup>, CHEN Liqun<sup>2</sup>

(1. School of Sciences, Chang'an University, Xi'an 710064, P.R.China;  
2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China;  
3. Taishan Nuclear Power Joint Venture Co., Ltd., Taishan, Guangdong 529228, P.R.China)

(Contributed by CHEN Liqun, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The dynamic model was built for rotating pipes conveying fluid based on the Lagrange principle and the assumed mode method. The eigenvalue problem of the system was solved via the method of "reducing the order and increasing the dimension". The free vibration characteristics of the rotating pipe conveying fluid were analyzed. The variations of the eigenvalue trajectories with the fluid velocity were illustrated under different tip masses and rotating speeds. The effects of system parameters on the critical fluid velocity were revealed. It is found that, the flowing fluid has significant effects on the dynamic characteristics of the rotating pipe. Different internal resonances between the 1st several modes of the system

\* 收稿日期: 2021-06-17; 修订日期: 2021-07-03

**基金项目:** 国家自然科学基金 (11702033; 11872159); 中央高校基本科研业务费 (300102120166); 上海市教委创新项目 (2017-01-07-00-09-E00019); 陕西省省级大学生创新创业训练计划 (S202010710245; S202010710246); 陕西省自然科学基金 (2022JQ-019; 2020JQ-345; 2021JQ-216)

**作者简介:** 张博 (1989—), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师 (E-mail: [zhang\\_bo@chd.edu.cn](mailto:zhang_bo@chd.edu.cn));

陈立群 (1963—), 男, 教授, 博士, 博士生导师 (通讯作者. E-mail: [lqchen@shu.edu.cn](mailto:lqchen@shu.edu.cn)).

**引用格式:** 张博, 史天姿, 张贻林, 孙东生, 袁从敏, 丁虎, 陈立群. 旋转输液管动力稳定性理论分析[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(2): 166-175.

could exist under certain parameter conditions. The work reveals rich dynamic phenomena of the rotating pipe conveying fluid.

**Key words:** rotation; pipe conveying fluid; free vibration; assumed mode method; Lagrange equation

## 引 言

重型燃气轮机是迄今为止效率最高、能量密度最大的热-功转换类发电设备<sup>[1]</sup>, 被誉为工业皇冠上的明珠, 是多学科交叉的典范。而旋转叶片是重型燃气轮机的关键组成部分。随着科学技术的迭代更新, 对燃气轮机热效率的要求越来越高, 涡轮叶片的工作温度不断升高, 涡轮进口温度达到了 1 977 K, 未来可能更高<sup>[2]</sup>, 为了避免叶片不被过早烧毁, 工程师在涡轮叶片内部布置了复杂的冷却通道系统<sup>[3]</sup>。为了合理设计含有冷却通道的涡轮叶片, 针对这类结构建立精确的动力学模型, 准确掌握其振动特性显得尤为必要。

现有文献中通常将涡轮叶片简化为形式各异的旋转梁<sup>[4-5]</sup>、旋转板<sup>[6]</sup>或者旋转壳<sup>[7-8]</sup>, 用来分析其线性或非线性的动力学行为。郑彤和章定国等<sup>[9]</sup>将叶片简化为柔性薄板, 建立了一次近似耦合动力学方程。Zhang 等<sup>[10]</sup>考虑叶片预变形效应, 研究了旋转预扭梁在 2 : 1<sup>[11]</sup>或 3 : 1<sup>[12]</sup>内共振情况下的非线性动力学响应。Oh 和 Yoo<sup>[13]</sup>建立了旋转叶片热弹耦合动力学模型, 揭示了叶片服役热环境以及内部冷却液温度对叶片振动特性的影响, 但并未涉及到内部流体对叶片振动的影响。

以上有关旋转叶片的研究, 都没有考虑内部流体对叶片动力学特性的影响。但是, 涡轮叶片的振动问题严重影响着工程系统的安全运行, 亟需揭示其内部冷却液对其振动特性的影响。而早在 20 世纪 60 年代, Benjamin<sup>[14]</sup>基于开放系统的 Hamilton 原理建立了输液管道的动力学模型, 报道了管内流体对管道振动稳定性影响。Gregory 与 Paidoussis<sup>[15]</sup>在 Benjamin 的基础上研究发现, 当流速超过某临界值时, 管道将从流体源源不断获得能量并发生颤振失稳。王乙坤等<sup>[16]</sup>研究了脉动内流作用下管道的参数共振行为, 揭示了输液管丰富的动力学现象。近期, 易浩然等<sup>[17]</sup>考虑集中质量的影响, 建立了悬臂输液管动力学模型, 从理论和实验两方面探讨了输液管振动特性的演变规律。文献 [18-19] 报道了管道内部流动的流体将诱发结构发生内共振, 不同模态之间存在能量交换关系。此外, 国内学者如黄玉盈等<sup>[20]</sup>、金基铎等<sup>[21]</sup>、徐鉴等<sup>[22-23]</sup>和王琳等<sup>[24]</sup>在输液管动力学行为领域也做了大量有益的工作。

在旋转输液管领域, 国际上已有一些相关的研究报告。根据管道旋转轴线方向与管道轴线的相对位置关系, 大致分为两类: 一类是管道旋转轴线方向与管道轴线重合; 另一类是二者方向相垂直。前者相当于自旋的输液管, 相关研究比较充分, 经常用于油气开采中的深井钻头<sup>[25-28]</sup>。第二类类似于旋转叶片模型, 相关研究较少。Panussis 和 Dimarogonas<sup>[29]</sup>采用 Galerkin 和 Hamilton 原理, 率先研究了水平旋转输液管面内与面外耦合振动。Yoon 和 Son<sup>[30]</sup>研究了变转速过程中, 具有端部质量的旋转输液管在轴向和横向上的动力学响应。Wang 和 Zhong<sup>[31]</sup>建立了旋转输液管的动力学模型, 研究了蜻蜓翅膀血液循环对其飞行能力影响, 发现在特定血流条件下, 蜻蜓翅膀会失去稳定性。

通过文献调研不难发现, 结构内部流体流动会显著影响结构的动力学行为, 但考虑内部流体流动的旋转叶片模型相关研究还较少。为了准确掌握具有内部冷却通道的涡轮叶片的动力学特性, 揭示内部流体对旋转叶片动力学特性的影响, 本文利用 Lagrange 原理, 研究了基于 Euler-Bernoulli 梁理论的悬臂式旋转输液管的自由振动特性, 讨论了流体流速、端部质量、转速等系统参数对旋转输液管自由振动特性的影响规律。

## 1 模型描述与假设

本文建立的动力学模型如图 1 所示, 长为  $L$  且具有端部质量  $T_m$  的旋转空心叶片, 绕轮毂中心以恒定角速度  $\Omega$  转动, 轮毂半径为  $r$ , 这里假定叶片为内外径分别为  $R_{in}$  和  $R_{out}$  的空心圆截面管道, 管道单位长度质量为  $m$ , 管道内部流体相对于管道的流速为  $U$ , 其单位长度质量为  $M$ 。建立两套坐标系来描述结构的运动与变形: ① 固结于轮毂中心的全局直角坐标系  $OXYZ$ ; ② 固结于旋转管道根部截面中心,  $x$  轴与管道中轴线重合并连同管道一起旋转的随转坐标系  $oxyz$ , 管道在  $x, y$  方向上的变形分别用  $w_1$  和  $w_2$  表示。为了简化分析, 引入如下假设: 1) 忽略管道剪切变形和转动惯量的影响, 采用 Bernoulli-Euler 梁理论描述其位移场; 2) 忽略管道在  $z$  方

向的变形,即振动发生在一个平面  $xoy$  内;3)管道内流体为定常不可压缩的无黏流体;4)管道是均匀、各向同性的线弹性材料.

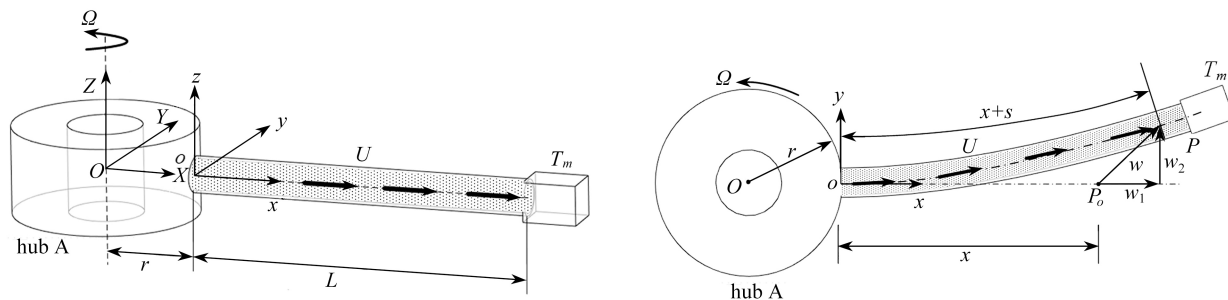


图1 旋转输液管动力学模型

Fig. 1 The sketch for a rotating pipe conveying fluid

## 2 运动学方程

假设全局坐标系下,  $X, Y, Z$  方向上的单位向量分别为  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , 则管道上任意点  $P$  的速度矢量为

$$\mathbf{v}_P = (\dot{w}_1 - \Omega w_2)\mathbf{i} + (r\Omega + \dot{w}_2 + \Omega x + \Omega w_1)\mathbf{j}. \tag{1}$$

根据速度合成定理, 管道内流体流速矢量为

$$\mathbf{v}_f = \left[ \dot{w}_1 - \Omega w_2 + U \left( 1 - \frac{w_{2,x}^2}{2} \right) \right] \mathbf{i} + (r\Omega + \dot{w}_2 + \Omega x + \Omega w_1 + U w_{2,x}) \mathbf{j}. \tag{2}$$

则管道和内部流体的动能分别为

$$T_P = \frac{1}{2} m \int_0^L \mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_P dx + \frac{1}{2} T_m (v_P^2|_{x=L}), \tag{3}$$

$$T_f = \frac{1}{2} M \int_0^L \mathbf{v}_f \cdot \mathbf{v}_f dx. \tag{4}$$

管道的变形能可写为

$$V_P = \frac{1}{2} \int_0^L (EA_P w_{1,x}^2 + EI w_{2,xx}^2) dx, \tag{5}$$

其中  $E$  代表管道的弹性模量,  $A_P$  和  $I$  分别代表截面的面积和惯性矩. 管道因旋转运动而产生的轴向收缩势能<sup>[32]</sup> 为

$$V_{as} = \frac{\Omega^2}{4} \int_0^L w_{2,x}^2 [m(L^2 - x^2) + 2mr(L - x) + 2T_m(r + L)] dx. \tag{6}$$

此外, 管内流体切向跟随力所做的功为

$$W = \frac{1}{2} MU^2 \int_0^L w_{2,x}^2 dx - MU(U w_{2,x} + \dot{w}_2) w_2|_{x=L}. \tag{7}$$

采用假设模态法离散管道两个变形分量:

$$w_1(x, t) = \sum_{i=1}^{N_1} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t), \quad w_2(x, t) = \sum_{i=1}^{N_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t), \tag{8}$$

其中  $q_{1i}, q_{2i}$  为管道广义位移,  $N_1, N_2$  为选取的模态函数个数,  $\phi_{1i}, \phi_{2i}$  分别为轴向和横向两个方向上选取的试函数. 需要说明的是, 端部质量的存在会影响悬臂管的力边界条件, 本文采用假设模态法, 只需满足位移边界条件即可, 故选取悬臂梁轴向和横向振动的模态函数作为试函数, 其具体表达形式如下:

$$\begin{cases} \phi_{1i}(x) = \sin \frac{(2i-1)\pi x}{2L}, & i = 1, 2, \dots, N_1, \\ \phi_{2i}(x) = \cos(\beta_i x) - \text{ch}(\beta_i x) + \xi_i (\sin(\beta_i x) - \text{sh}(\beta_i x)), & i = 1, 2, \dots, N_2, \end{cases} \tag{9}$$

其中  $\xi_i = -\frac{\cos(\beta_i L) + \text{ch}(\beta_i L)}{\sin(\beta_i L) + \text{sh}(\beta_i L)}$ , 参数  $\beta_i$  为频率方程  $\cos(\beta_i L) \text{ch}(\beta_i L) = -1$  的根.

系统的 Lagrange 函数为

$$L_a = T_P + T_f - V_P - V_{as} + W. \quad (10)$$

将式 (3)~(7) 代入式 (10), 采用式 (8) 将连续体离散, 结合 Lagrange 原理即可得到矩阵形式的动力学方程:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{22} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{22} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^{12} \\ \mathbf{G}^{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \mathbf{K}^{12} \\ \mathbf{K}^{21} & \mathbf{K}^{22} \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \\ \mathbf{P}^2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

写成紧凑形式为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}, \quad (12)$$

其中  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{K}$  和  $\mathbf{P}$  分别为质量矩阵、阻尼矩阵、陀螺矩阵、刚度矩阵和载荷列阵. 非零元素表达如下:

$$M_{ij}^{11} = (M+m) \int_0^L \phi_{1i}(x)\phi_{1j}(x)dx + T_m\phi_{1i}(L)\phi_{1j}(L), \quad (13)$$

$$M_{ij}^{22} = (M+m) \int_0^L \phi_{2i}(x)\phi_{2j}(x)dx + T_m\phi_{2i}(L)\phi_{2j}(L), \quad (14)$$

$$C_{ij}^{22} = MU \int_0^L \phi'_{2i}(x)\phi_{2j}(x)dx, \quad (15)$$

$$G_{ij}^{12} = -2\Omega(M+m) \int_0^L \phi_{1i}(x)\phi_{2j}(x)dx - 2\Omega T_m\phi_{1i}(L)\phi_{2j}(L), \quad (16)$$

$$G_{ij}^{21} = -G_{ji}^{12}, \quad (17)$$

$$K_{ij}^{11} = EA_P \int_0^L \phi'_{1i}(x)\phi'_{1j}(x)dx - \Omega^2 T_m\phi_{1i}(L)\phi_{1j}(L) - \Omega^2(M+m) \int_0^L \phi_{1i}(x)\phi_{1j}(x)dx, \quad (18)$$

$$K_{ij}^{12} = -MU\Omega \int_0^L \phi_{1i}(x)\phi'_{2j}(x)dx, \quad (19)$$

$$K_{ij}^{21} = K_{ji}^{12}, \quad (20)$$

$$K_{ij}^{22} = EI \int_0^L \phi''_{2i}(x)\phi''_{2j}(x)dx + \frac{1}{2}\Omega^2 \int_0^L \phi'_{2i}(x)\phi'_{2j}(x)[(L-x)(L+2r+x)m + 2T_m(r+L)]dx - MU^2 \int_0^L \phi'_{2i}(x)\phi'_{2j}(x)dx - (m+M)\Omega^2 \int_0^L \phi_{2i}(x)\phi_{2j}(x)dx - \Omega^2 T_m\phi_{2i}(L)\phi_{2j}(L) + 2MU^2\phi_{2i}(L)\phi'_{2j}(L), \quad (21)$$

$$P_i^1 = (m+M)\Omega^2 \int_0^L (r+x)\phi_{1i}(x)dx + T_m\Omega^2(r+L)\phi_{1i}(L), \quad (22)$$

$$P_i^2 = MU\Omega \int_0^L [(r+x)\phi'_{2i}(x) - \phi_{2i}(x)]dx. \quad (23)$$

由式 (15) 和 (16) 可见, 流体流速对非对称矩阵  $\mathbf{C}$  有影响, 这里反对称的陀螺矩阵  $\mathbf{G}$  是由旋转运动产生的. 为了求解式 (11) 的特征值, 引入如下向量和矩阵:

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} + \mathbf{G} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

则式 (11) 与下式等效:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (25)$$

为了求解式 (25) 对应的特征值问题, 令

$$\mathbf{y} = \Phi_i e^{\lambda_i t} = \Phi_i e^{i\omega_i t}, \quad (26)$$

其中  $\omega_i = -i\lambda_i$ , 则复数  $\omega_i$  的实部代表固有频率, 虚部代表阻尼. 当出现负阻尼时系统将发生颤振失稳.

### 3 结果与讨论

本文的数值算例为一个空心圆截面(内外半径分别为  $R_{out}$ ,  $R_{in}$ )的旋转叶片, 叶片和内部流体的体积密度分别为  $\rho_p$  和  $\rho_f$ , 则单位长度管道和流体的质量分别为  $m = \pi\rho_p(R_{out}^2 - R_{in}^2)$ ,  $M = \pi\rho_f R_{in}^2$ . 后面的数值算例中, 若无特殊说明, 取具体的参数设置见表 1.

为了使结果具有普遍性, 按照文献引入无量纲参数:

$$U^* = UL\sqrt{\frac{M}{EI}}, \Omega^* = \Omega\sqrt{\frac{mL^4}{EI}}, \omega_i^* = \omega_i\sqrt{\frac{mL^4}{EI}}, T_m^* = \frac{T_m}{(M+m)L}. \quad (27)$$



表1 系统参数设置  
Table 1 System parameter values

| $L/m$ | $E/\text{Pa}$      | $r/m$ | $R_{\text{out}}/m$ | $R_{\text{in}}/m$ | $\rho_p/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$ | $\rho_f/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$ |
|-------|--------------------|-------|--------------------|-------------------|--|--|
| 1     | $4.957\times 10^7$ | 0.5   | 0.025              | 0.02              | 2 766                                  | 1 000                                  |

首先,研究本文模型假设模态法的收敛性.图2对比了选取不同试探函数数目下系统的 Argand 图,其中各阶模态所对应的曲线上标记了无量纲流速数值.发现对于  $N_1=N_2=5$ ,当流速较小时,流体给系统各阶模态引起了阻尼效应,当流速增加到 2.40 时,第一阶模态轨迹穿越横轴,预示着管道将发生颤振失稳.当流速增加到 9.90 时,第三阶模态轨迹穿越横轴.在该算例中,第二阶模态始终未发生失稳,与文献 [24] 中报道的两端固支输液管第二阶模态先失稳不同.对比发现,不同试探函数个数下,得到的系统 Argand 图大致类似,只有临界流速存在数值差别.当试探函数个数取 10 时,临界流速收敛.因此后面的数值算例中取  $N_1=N_2=10$ .

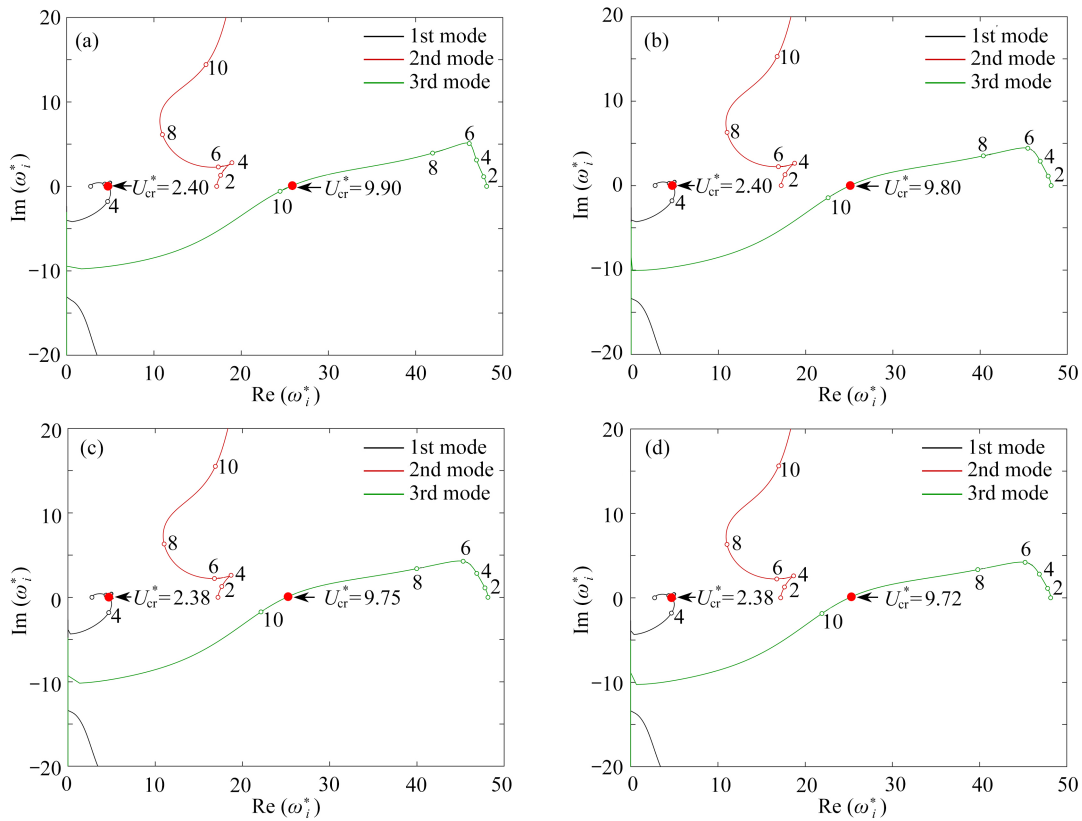


图2 不同试探函数个数下前三阶特征根轨迹曲线 ( $T_m^*=0, \Omega^*=0$ ): (a)  $N_1=N_2=5$ ; (b)  $N_1=N_2=8$ ; (c)  $N_1=N_2=10$ ; (d)  $N_1=N_2=12$

Fig. 2 The trajectories of the 1st 3 eigenvalues for different trail function numbers ( $T_m^*=0, \Omega^*=0$ ): (a)  $N_1=N_2=5$ ; (b)  $N_1=N_2=8$ ; (c)  $N_1=N_2=10$ ; (d)  $N_1=N_2=12$

为了验证模型的正确性,特将本文计算结果与文献 [33] 报道的结果做一对比,具体如表2所示.由表格数据可见本文模型具有较高的计算精度.

表2 系统第一阶无量纲固有频率本文计算值与文献对比 ( $\rho_f=0$ )

Table 2 Comparison of the 1st natural frequencies obtained from the present study and the reference ( $\rho_f=0$ )

|                       | $\Omega^*=2$ |         |         | $\Omega^*=10$ |         |         |
|-----------------------|--------------|---------|---------|---------------|---------|---------|
|                       | $r/L=0$      | $r/L=1$ | $r/L=5$ | $r/L=0$       | $r/L=1$ | $r/L=5$ |
| this paper $\omega^*$ | 3.619        | 4.397   | 6.642   | 4.951         | 12.996  | 27.152  |
| ref. [33] $\omega^*$  | 3.62         | 4.40    | 6.64    | 4.97          | 13.1    | 27.3    |
| error $\delta/\%$     | 0.028        | 0.068   | 0.030   | 0.382         | 0.794   | 0.542   |

图 3 给出了三组不同转速下系统前三阶特征根轨迹曲线, 发现随着转速增大, 旋转输液管系统特征根轨迹向横轴正方向移动. 实际上, 旋转离心效应对结构存在刚化效应. 当转速足够大 ( $\Omega^*=8$ ), 流速存在一个区间 ( $7.90 < U^* < 8.25$ ), 系统第二阶模态依次经历先稳定、再失稳、再次稳定的过程, 特征值轨迹跟横轴极为靠近. 当转速提高, 这一区域被放大.

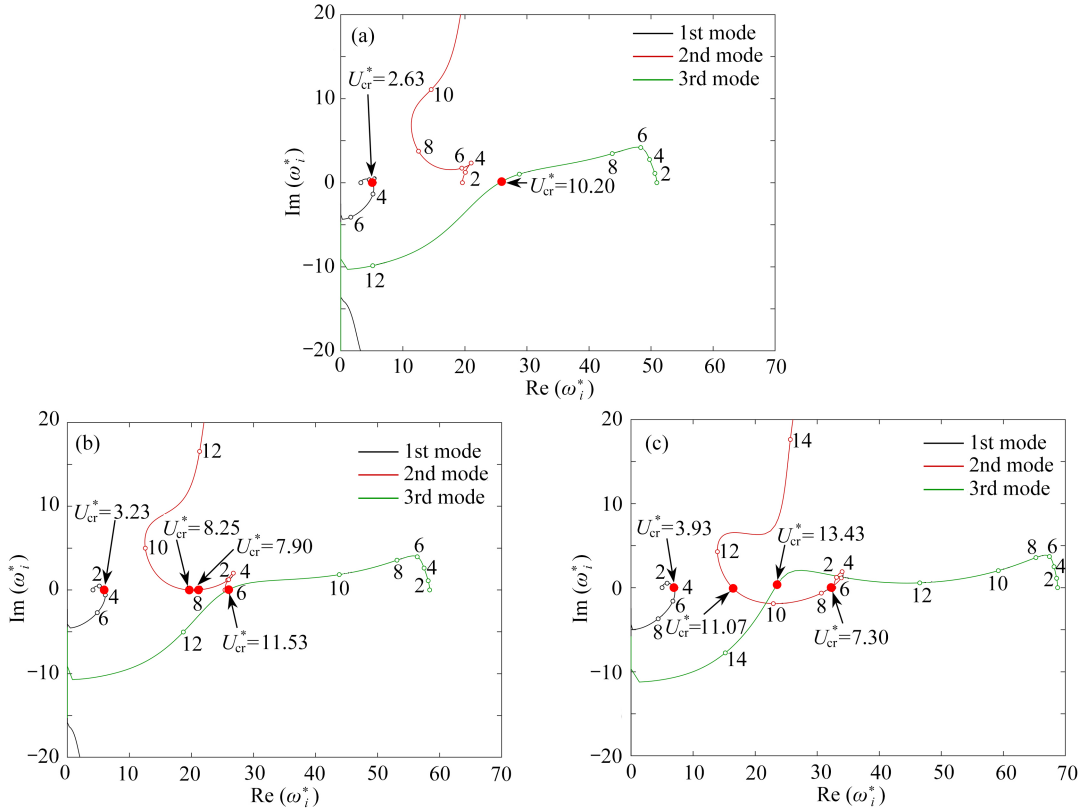
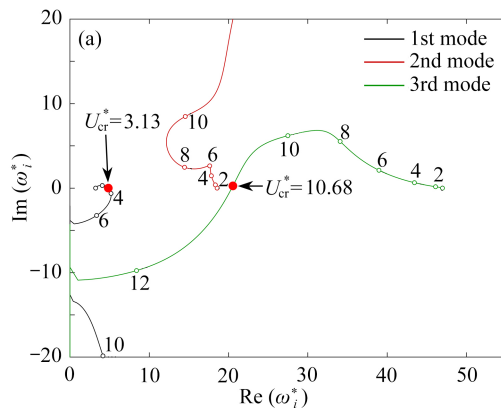


图 3 转速对特征根轨迹的影响 ( $T_m^* = 0$ ): (a)  $\Omega^* = 4$ ; (b)  $\Omega^* = 8$ ; (c)  $\Omega^* = 12$

Fig. 3 Effects of the rotating speed on the eigenvalue trajectories ( $T_m^* = 0$ ): (a)  $\Omega^* = 4$ ; (b)  $\Omega^* = 8$ ; (c)  $\Omega^* = 12$

图 4 和图 5 分析了端部集中质量对系统动力学特性的影响. 当端部集中质量足够大, 系统第三阶模态在很高流速下也是稳定的, 但第二阶模态开始出现颤振失稳 (图 4(b)、4(c)). 临界流速随集中质量增大而增大. 由图 5 可见, 旋转输液管的第一阶临界流速随转速增大而提高, 且其变化率随端部质量增大而增大. 实际上, 由于旋转运动在输液管内部产生拉应力对结构存在“应力刚化”效应, 使得结构的刚度变大, 稳定性提高, 内部流体流动使得结构颤振失稳更困难. 而端部质量的出现进一步强化了“应力刚化”效应, 因此曲线斜率随端部质量增大而增大.



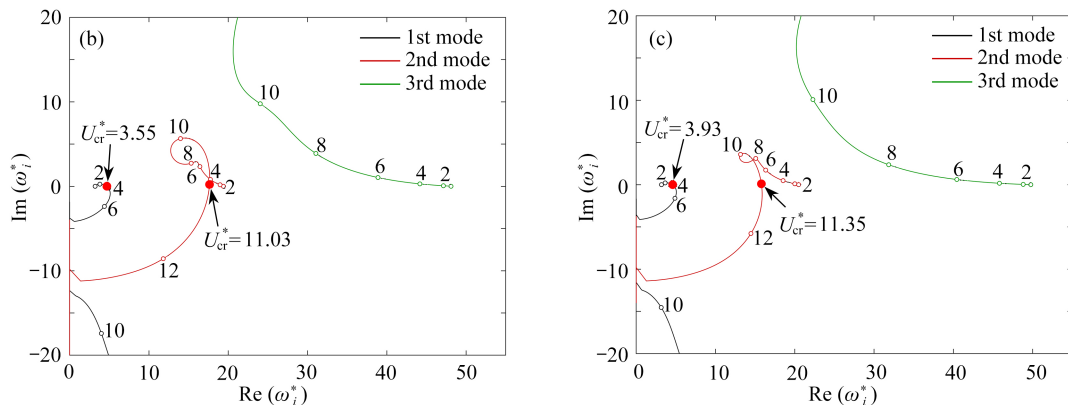


图4 端部集中质量对特征根轨迹的影响 ( $\Omega^* = 4$ ): (a)  $T_m^* = 0.2$ ; (b)  $T_m^* = 0.4$ ; (c)  $T_m^* = 0.6$

Fig. 4 Effects of the tip mass on the eigenvalue trajectories ( $\Omega^* = 4$ ): (a)  $T_m^* = 0.2$ ; (b)  $T_m^* = 0.4$ ; (c)  $T_m^* = 0.6$

为了揭示运动方程(11)中矩阵  $C$  和  $G$  对系统动力特性的影响规律,在图6中绘制了四种情形下(包括同时考虑  $C, G$  矩阵,仅考虑  $C$  矩阵,仅考虑  $G$  矩阵和忽略  $C, G$  矩阵),系统第1阶固有频率随流速的变化情况.通过对比不难发现,陀螺矩阵  $G$  对系统固有频率影响很小.事实上,对于该算例旋转输液管,其轴向尺寸是横向尺寸的40倍,属于细长梁,因此旋转运动引起的轴向及横向运动间的耦合效应很微弱.此外对于该算例,当无量纲流速  $U^* < 4$  时,对称矩阵  $C$  对系统动力学特性影响不大.当无量纲流速  $U^*$  超过4时,考虑矩阵  $C$  影响的曲线跟忽略矩阵  $C$  影响的曲线发生明显分离.前者持续下降,且当流速约为7.12时降为0,特征值变为纯虚数.而忽略矩阵  $C$  影响,当流速  $U^* > 7$  时,系统第1阶固有频率迅速升高.由此证明了流体运动对旋转管道的动力学特性有显著影响.

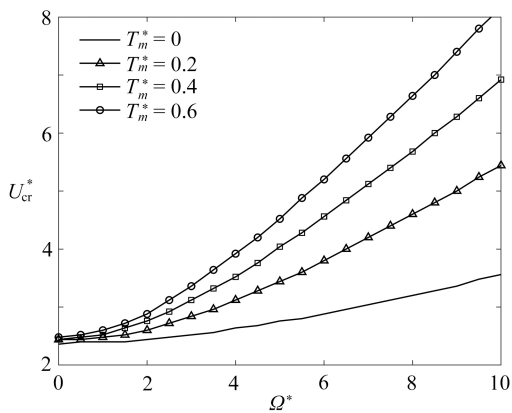


图5 不同端部集中质量下临界流速随转速的变化规律 ( $\Omega^* = 4$ )

Fig. 5 Variations of the critical fluid velocity with the rotating speed for different tip masses ( $\Omega^* = 4$ )

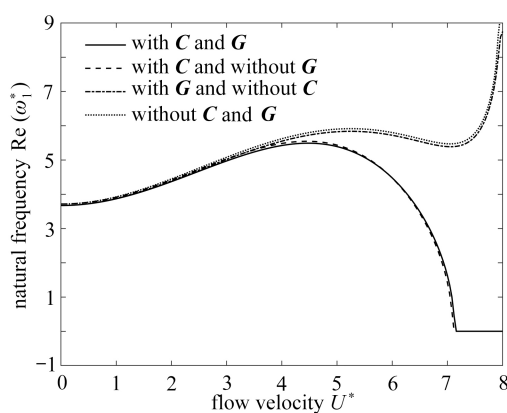


图6 矩阵  $C$  和  $G$  对系统第一阶固有频率的影响 ( $\Omega^* = 4, T_m^* = 0.2$ )

Fig. 6 The effects of matrices  $C$  and  $G$  on the system 1st natural frequency ( $\Omega^* = 4, T_m^* = 0.2$ )

图7绘制了系统前三阶无量纲固有频率随流速的变化曲线,同时为了探析旋转输液管模型发生内共振的可能性,图中画出了  $2\omega_1^*, 3\omega_1^*, 2\omega_2^*$  随流速的变化曲线.图中出现了一些曲线间的交点,例如,当流速  $U^* = 3.72$  时,  $3\omega_1^*$  和  $\omega_2^*$  相交,即  $3\omega_1^* = \omega_2^*$ ,预示系统存在3:1内共振;当流速  $U^* = 11.17$  时,  $2\omega_1^*$  和  $\omega_2^*$  相交,即  $2\omega_1^* = \omega_2^*$ ,预示系统存在2:1内共振.在该算例流速范围内(0~20)  $\omega_1^*$  和  $\omega_2^*$  未相交.此外系统第三阶固有频率轨迹同前两阶模态也存在多个交点,特别地,当流速  $U^* = 10.22$  时,曲线  $3\omega_1^*, \omega_2^*$  和  $\omega_3^*$  交汇于同一点.预示该条件下系统前三阶模态存在复杂的能量交换机制.



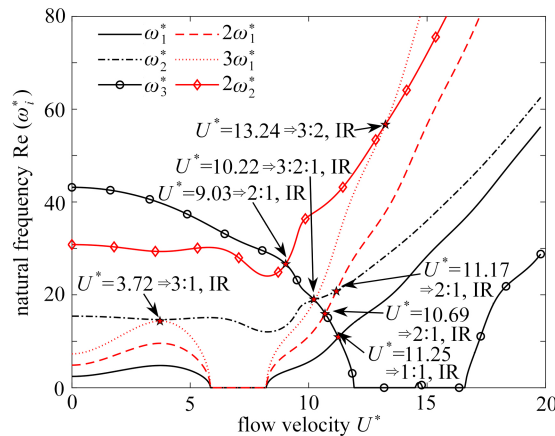


图 7 旋转输液管前三阶固有频率随流体流速的变化规律 ( $\Omega^* = 2, T_m^* = 0.2$ )

Fig. 7 The variations of the 1st 3 natural frequencies of the rotating pipe ( $\Omega^* = 2, T_m^* = 0.2$ )

## 4 结 论

本文采用 Lagrange 原理建立了内部包含流体通道的旋转梁的动力学模型, 应用假设模态法得到了经过离散的矩阵形式表达的系统运动方程, 并确定了研究方法具有收敛性. 研究发现, 当流体速度超过一定数值时, 旋转输液管将发生颤振失稳. 本文还揭示了转速、端部质量对旋转管道系统临界流速的影响. 此外, 还发现在一些特定的参数组合下, 可能会诱发系统低阶模态之间不同形式的内共振.

### 参考文献 (References):

- [1] 蒋洪德, 任静, 李雪英, 等. 重型燃气轮机现状与发展趋势[J]. 中国电机工程学报, 2014, **34**(29): 5096-5102. (JIANG Hongde, REN Jing, LI Xueying, et al. Status and development trend of the heavy duty gas turbine[J]. *Proceedings of the CSEE*, 2014, **34**(29): 5096-5102.(in Chinese))
- [2] 王超, 苟学科, 段英, 等. 航空发动机涡轮叶片温度测量综述[J]. 红外与毫米波学报, 2018, **37**(4): 501-512. (WANG Chao, GOU Xueke, DUAN Ying, et al. A review of aero-engine turbine blade temperature measurement[J]. *Journal of Infrared and Millimeter Waves*, 2018, **37**(4): 501-512.(in Chinese))
- [3] 李广超, 于全朋, 张魏, 等. 吹风比对涡轮叶片尾缘气膜冷却效率影响[J]. 热力发电, 2018, **47**(10): 58-65. (LI Guangchao, YU Quanpeng, ZHANG Wei, et al. Effect of blowing ratio on film cooling efficiency of trailing edge on turbine blade[J]. *Thermal Power Generation*, 2018, **47**(10): 58-65.(in Chinese))
- [4] OH Y, YOO H H. Vibration analysis of a rotating pre-twisted blade considering the coupling effects of stretching, bending, and torsion[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, **431**: 20-39.
- [5] HODGES D Y, RUTKOWSKI M Y. Free-vibration analysis of rotating beams by a variable-order finite-element method[J]. *AIAA Journal*, 1981, **19**(11): 1459-1466.
- [6] 张伟, 冯志青, 曹东兴. 航空发动机叶片非线性动力学分析[J]. 动力学与控制学报, 2012, **10**(3): 213-221. (ZHANG Wei, FENG Zhiqing, CAO Dongxing. Analysis on nonlinear dynamics of the aero-engine blade[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, **10**(3): 213-221.(in Chinese))
- [7] ZHANG W, NIU Y, BEHDINAN K. Vibration characteristics of rotating pretwisted composite tapered blade with graphene coating layers[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2020, **98**: 105644.
- [8] YAO M H, NIU Y, HAO Y X. Nonlinear dynamic responses of rotating pretwisted cylindrical shells[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, **95**(1): 151-174.
- [9] 郑彤, 章定国, 廖连芳, 等. 航空发动机叶片刚柔耦合动力学分析[J]. 机械工程学报, 2014, **50**(23): 42-49. (ZHENG Tong, ZHANG Dingguo, LIAO Lianfang, et al. Rigid-flexible coupling dynamic analysis of aero-engine blades[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2014, **50**(23): 42-49.(in Chinese))
- [10] ZHANG B, LI Y M. Nonlinear vibration of rotating pre-deformed blade with thermal gradient[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, **86**(1): 459-478.

- [11] ZHANG B, ZHANG Y L, YANG X D, et al. Saturation and stability in internal resonance of a rotating blade under thermal gradient[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, **440**(3): 34-50.
- [12] ZHANG B, DING H, CHEN L Q. Three to one internal resonances of a pre-deformed rotating beam with quadratic and cubic nonlinearities[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2020, **126**: 103552.
- [13] OH Y, YOO H H. Thermo-elastodynamic coupled model to obtain natural frequency and stretch characteristics of a rotating blade with a cooling passage[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, **165**: 105194.
- [14] BENJAMIN T. Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid, I : theory[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1961, **261**: 457-486.
- [15] GREGORY R W P, PAIDOUSSIS M P. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid, I : theory [J]. *Proceedings of the Royal Society of London(Series A): Mathematical and Physical Sciences*, 1966, **293**(1435): 512-527.
- [16] 王乙坤, 王琳. 分布式运动约束下悬臂输液管的参数共振研究[J]. *力学学报*, 2019, **51**(2): 558-568. (WANG Yikun, WANG Lin. Parametric resonance of a cantilevered pipe conveying fluid subjected to distributed motion constraints[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, **51**(2): 558-568.(in Chinese))
- [17] 易浩然, 周坤, 代胡亮, 等. 含集中质量悬臂输流管的稳定性与模态演化特性研究[J]. *力学学报*, 2020, **52**(6): 1800-1810. (YI Haoran, ZHOU Kun, DAI Huliang, et al. Stability and mode evolution characteristics of a cantilevered fluid-conveying pipe attached with the lumped mass[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2020, **52**(6): 1800-1810.(in Chinese))
- [18] 毛晓晔, 丁虎, 陈立群. 3 : 1内共振下超临界输液管受迫振动响应[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(4): 345-351. (MAO Xiaoye, DING Hu, CHEN Liqun. Forced vibration responses of supercritical fluid-conveying pipes in 3 : 1 internal resonance[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 345-351.(in Chinese))
- [19] 黄慧春, 张艳雷, 陈立群. 受迫振动的超临界输液管galerkin数值模拟[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(10): 1100-1106. (HUANG Huichun, ZHANG Yanlei, CHEN Liqun. A Galerkin numerical method for the pipe conveying supercritical fluid under forced vibration[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(10): 1100-1106.(in Chinese))
- [20] 黄玉盈, 钱勤, 徐鉴, 等. 输液管的非线性振动、分叉与混沌: 现状与展望[J]. *力学进展*, 1998, **28**(1): 30-42. (HUANG Yuying, QIAN Qing, XU Jian, et al. Advances and trends of nonlinear dynamics of pipes conveying fluid[J]. *Advances in Mechanics*, 1998, **28**(1): 30-42.(in Chinese))
- [21] 金基铎, 杨晓东, 邹光胜. 两端支承输流管道的稳定性和临界流速分析[J]. *机械工程学报*, 2006, **42**(11): 131-136. (JIN Jiduo, YANG Xiaodong, ZOU Guangsheng. Stability and critical flow velocity of supported pipes conveying fluid[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, **42**(11): 131-136.(in Chinese))
- [22] 徐鉴, 杨前彪. 流体诱发水平悬臂输液管的内共振和模式转换 ( I ) [J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(7): 819-824. (XU Jian, YANG Qianbiao. Flow-induced internal resonances and mode exchange in horizontal cantilevered pipe conveying fluid( I ) [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**(7): 819-824.(in Chinese))
- [23] 徐鉴, 杨前彪. 流体诱发水平悬臂输液管的内共振和模式转换 ( II ) [J]. *应用数学和力学*, 2006, **27**(7): 825-832. (XU Jian, YANG Qianbiao. Flow-induced internal resonances and mode exchange in horizontal cantilevered pipe conveying fluid( II ) [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**(7): 825-832.(in Chinese))
- [24] 王琳, 匡友弟, 黄玉盈, 等. 输液管振动与稳定性研究的新进展: 从宏观尺度到微纳米尺度[J]. *固体力学学报*, 2010, **31**(5): 481-495. (WANG Lin, KUANG Youdi, HUANG Yuying, et al. Recent development on vibration and stability of pipes conveying fluid: from macro-scale to micro-and nano-scales[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2010, **31**(5): 481-495.(in Chinese))
- [25] LIAN F, YANG X D, ZHANG W, et al. Nonlinear free vibration of spinning viscoelastic pipes conveying fluid[J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2018, **10**(7). DOI: 10.1142/S175882511850076X.
- [26] BAHADINI R, SAIDI A R. Stability analysis of thin-walled spinning reinforced pipes conveying fluid in thermal environment[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2018, **72**: 298-309.
- [27] PEI Y C, SUN Y H, WANG J X. Dynamics of rotating conveying mud drill string subjected to torque and longitudinal thrust[J]. *Meccanica*, 2013, **48**(9): 2189-2201.
- [28] MA G H, SHEN X Q. Eigensolution of a bta deep-hole drilling shaft system[J]. *Journal of Mechanical Science*

- and Technology*, 2018, **32**(4): 1499-1504.
- [29] PANUSSIS D A, DIMAROGONAS A D. Linear in-plane and out-of-plane lateral vibrations of a horizontally rotating fluid-tube cantilever[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2000, **14**(1): 1-24.
- [30] YOON H I, SON I S. Dynamic response of rotating flexible cantilever pipe conveying fluid with tip mass[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2007, **49**(7): 878-887.
- [31] WANG L H, ZHONG Z. Dynamics of the dragonfly wings raised by blood circulation[J]. *Acta Mechanica*, 2014, **225**(4/5): 1471-1485.
- [32] CHIU Y J, CHEN D Z. The coupled vibration in a rotating multi-disk rotor system[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2011, **53**(1): 1-10.
- [33] YOO H H, SHIN S H. Vibration analysis of rotating cantilever beams[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, **212**(5): 807-828.