

考虑记忆效应及尺寸效应窄长薄板的磁-热弹性耦合动态响应

马永斌, 李东升

Magneto-Thermoelastic Coupling Dynamic Responses of Narrow Long Thin Plates Under Memory Effects and Size Effects

MA Yongbin and LI Dongsheng

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420200>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

求解周期性分段线性系统动态响应的高效数值方法

An Efficient Numerical Method for Computing Dynamic Responses of Periodic Piecewise Linear Systems

应用数学和力学. 2018, 39(7): 737-749 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390055>

芳纶纤维平纹织布在爆炸载荷下的动态响应与失效行为的数值分析

Numerical Study on Dynamic Responses and Failure Behaviours of Aramid Fabrics Subject to Blast Loads

应用数学和力学. 2021, 42(11): 1113-1125 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420025>

考虑热-水-力耦合效应的饱和多孔地基动力响应分析

Dynamic Responses of Saturated Porous Foundations Under Coupled Thermo-Hydro-Mechanical Effects

应用数学和力学. 2018, 39(6): 689-699 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380140>

基于广义弹性理论的微梁固有频率及模态的尺寸效应

Scale Effects on Natural Frequencies and Vibration Modes of Micro Cantilever Beams Based on Generalized Elasticity

应用数学和力学. 2018, 39(9): 999-1008 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380301>

直角坐标系下黏弹性层状地基动力响应分析

Dynamic Response Analysis of Viscoelastic Multilayered Foundation in the Cartesian Coordinate System

应用数学和力学. 2018, 39(5): 529-537 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380155>

磁流变弹性体的力-磁耦合模型

A Theoretical Model for MagnetoMechanical Coupling Behaviors of Magnetorheological Elastomers

应用数学和力学. 2018, 39(1): 92-103 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380021>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

考虑记忆效应及尺寸效应窄长薄板的 磁-热弹性耦合动态响应*

马永斌, 李东升

(兰州理工大学 理学院, 兰州 730050)

摘要: 引入记忆依赖微分的双相滞后热弹性理论能较完善地描述非 Fourier 导热现象, 然而迄今尚未发现该理论综合考虑微尺度效应和磁、热、弹等多场耦合效应对材料力学行为的影响. 通过考虑记忆依赖效应和非局部效应修正了双相滞后广义热弹性理论, 基于改进后的理论研究了受周期性变化热源作用时窄长薄板的磁-热弹性耦合问题. 首先建立问题的控制方程; 然后结合边界条件与初值条件, 利用 Laplace 变换和反变换技术对该问题进行求解; 最后分别考察了磁场、相位滞后、时间延迟因子、核函数、非局部效应、时间对各无量纲量的影响, 为微尺度材料的动态响应提供了有力参考依据.

关键词: 双相滞后热弹性理论; 非局部效应; 记忆依赖微分; 多场耦合; Laplace 变换; 动态响应
中图分类号: O343 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420200

Magneto-Thermoelastic Coupling Dynamic Responses of Narrow Long Thin Plates Under Memory Effects and Size Effects

MA Yongbin, LI Dongsheng

(School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, P.R.China)

Abstract: The dual-phase-lag thermoelasticity theory with the memory-dependent differential can perfectly describe the phenomenon of non-Fourier heat conduction, nevertheless, it has not been comprehensively considered: the mechanical responses of materials under the size-dependent effects and the multiphysics coupling effects such as magnetic, thermal and elastic fields. A modified dual-phase-lag thermoelasticity theory with memory-dependent effects and non-local effects was established. Based upon this theory, the magneto-thermoelastic coupling problem of narrow long thin plates subjected to cyclical heat sources was investigated. First, the governing equations for the problem were formulated. Then with the boundary conditions and initial conditions, the solution to the problem was obtained through the Laplace transform and the inverse transform techniques. Finally, the influences of the magnetic field, the phase lag, the time-delay, the kernel function, non-local effect and the time on the dimensionless quantities were investigated respectively. The work provides a powerful reference for the dynamic responses of micro-scale materials.

Key words: dual-phase-lag thermoelasticity theory; non-local effect; memory-dependent differential; multiphysics coupling; Laplace transform; dynamic response

* 收稿日期: 2021-07-13; 修订日期: 2022-07-15

基金项目: 国家自然科学基金(12062011; 11972176)

作者简介: 马永斌(1974—), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: 1373794737@qq.com).

引用格式: 马永斌, 李东升. 考虑记忆效应及尺寸效应窄长薄板的磁-热弹性耦合动态响应[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(8): 888-900.

引 言

在现代工程技术中,尽管分数阶微积分已被广泛地应用于广义热弹性领域,但目前分数阶参数并无明确的物理意义^[1-3].通过改进分数阶理论,Wang 和 Li^[4]提出了记忆依赖微分(MDD).与传统的分数阶热弹性耦合理论相比,引入记忆依赖微分修正热弹性耦合理论有众多的优势^[5-6].

虽然引入记忆依赖微分能很真实地描述材料“瞬时变化率受过去情形影响”这一现象,但经典热弹性耦合理论是基于 Fourier 定律建立的,这类理论描述温度的传播速度是无限大的^[7].表明受到热作用的瞬间,在该材料上距离作用点无限远处可观测到热作用,这与实验结果相悖^[8-9],因此热作用后极短时间内 Fourier 热传导定律不再适用^[10-11].为解决这一难题,学者们通过修正 Fourier 热传导方程提出了非 Fourier 热传导理论模型^[12-13],如 C-V 热波模型、双曲型两步模型、单相滞后模型、双相滞后模型(DPL)等.

上述对广义热弹性理论的修正均为对热方程的改进,而弹性方程仍采用经典模式,虽然可以很好地描述较大尺寸的结构,但对于微尺度结构不能满足计算精度.基于微尺度结构的理论有应变梯度理论、偶应力理论及非局部理论等^[14-16].其中,Eringen 提出的非局部理论更为成熟,应用也更加广泛.Eringen 非局部理论认为材料中一点处应力不仅和该点处应变有关,还与材料其他点处应变有关^[17].目前看来,非局部领域的研究多为基于非局部理论研究材料受热作用的力学行为^[18-21].同时考虑记忆依赖效应和非局部效应的双相滞后热弹性理论尚未建立,基于该理论对多场耦合问题的研究尚未发现.

本文引入了记忆依赖效应和非局部效应修正了双相滞后广义热弹性理论,基于改进后的理论研究了受磁-热-弹耦合作用下薄板的动态响应.为微尺度薄板的设计提供了理论指导,并为分析其他材质微尺度弹性体的多场耦合提供了方法.

1 理论公式

函数 f 的一阶记忆依赖微分算子可表示为^[4]

$$D_{\omega}f(t) = \frac{1}{\omega} \int_{t-\omega}^t K(t-\xi) f'(\xi) d\xi, \quad (1)$$

式中 ω 为时间延迟因子 ($\omega > 0$), $K(t-\xi)$ 为核函数,根据工程应用的需要,二者可自由选择来表征不同情况下记忆效应对材料力学行为的影响; $f(t)$ 为函数 f 的时间项, ξ 为积分变量; D_{ω} 为记忆依赖微分算子符号,当核函数取 1 时 D_{ω} 满足如下数学关系^[20]:

$$D_{\omega}f(x,t) = \frac{f(x,t) - f(x,t-\omega)}{\omega}, \quad (2)$$

式中 x 和 t 均为函数 $f(x,t)$ 的自变量.

El-Karamany 和 Ezzat 等^[21]给出了记忆依赖热传导方程形式如下:

$$\mathbf{q} + \omega D_{\omega} \mathbf{q} = -k \nabla \theta, \quad (3)$$

式中 k 为导热系数, \mathbf{q} 为热流, θ 为温度, ∇ 为 Hamilton 算子.当记忆依赖算子中核函数 $K(t-\xi) = 1$, 且时间延迟因子 $\omega \rightarrow 0$ 时,该理论将退化为 Biot 经典热弹性理论 (DCT)^[22].

Tzou^[23]提出了双相滞后模型,该理论下导热定律为

$$\mathbf{q}(x,t+\tau_q) = -k \nabla \theta(x,t+\tau_{\theta}), \quad (4)$$

式中 x 为坐标变量, τ_q 为温度梯度迟滞因子, τ_{θ} 为热流矢量迟滞因子.

Biot^[22]的能量方程形式如下:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_E \theta + \gamma T_0 e) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + Q, \quad (5)$$

式中 ρ 为密度, C_E 为比热, T_0 为参考温度, θ 为温度, e 为应变, Q 为单位质量的热源, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$, α_T 为热膨胀系数.

将方程(4)两边取 Taylor 级数展开式,将 τ_q 展开到二阶, τ_{θ} 展开到一阶,得到引入记忆依赖微分的双相滞后热传导方程形式如下:

$$\left(1 + \frac{\tau_q}{1!} D_\omega + \frac{\tau_q^2}{2!} D_\omega^2\right) \nabla \cdot \mathbf{q} = -k \left(1 + \frac{\tau_\theta}{1!} D_\omega\right) \nabla^2 \theta. \quad (6)$$

对方程(6)的两边同时求散度,并将方程(5)代入其中,化简后得

$$\left(1 + \frac{\tau_q}{1!} D_\omega + \frac{\tau_q^2}{2!} D_\omega^2\right) \left(\rho C_E \frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma T_0 \frac{\partial e}{\partial t} - Q\right) = k \left(1 + \frac{\tau_\theta}{1!} D_\omega\right) \nabla^2 \theta. \quad (7)$$

方程(7)即为考虑记忆依赖效应的双相滞后热方程.

根据 Eringen 提出的非局部理论,材料中一点 r 处应力-应变关系可表示为^[17]

$$\sigma_{ij}^*(r^*) = \lambda \varepsilon_{kk}^*(r^*) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^*(r^*); \quad (8)$$

按照 Eringen 非局部理论的微分形式,一维情况下本构方程为^[17]

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{ij}(r) = \sigma_{ij}^*(r^*), \quad (9)$$

式中 $\sigma_{ij}(r)$ 为非局部应力分量, $\sigma_{ij}^*(r^*)$ 为经典应力分量, $\varepsilon_{ij}^*(r^*)$ 为经典应变分量, $\varepsilon_{kk}^*(r^*)$ 为经典体积应变, $e_0 a$ 为非局部参数, λ, μ 为 Lamé 常数, δ_{ij} 为 Kronecker 符号.

2 基本方程

不考虑体力和内热源,处于磁场中导体的运动方程为

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j} + F_i, \quad (10)$$

式中 ρ 为密度, u_i 为位移分量, t 为时间, σ_{ij} 为应力分量, F_i 为 Lorentz 力分量.

Lorentz 力分量 F_i 为

$$F_i = \mu_0 (\mathbf{J} \times \mathbf{H}), \quad (11)$$

式中 μ_0 为磁导率, \mathbf{J} 为电流密度矢量, \mathbf{H} 为施加的磁场强度矢量.

本构方程为

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \gamma \theta \delta_{ij}, \quad (12)$$

几何方程为

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (13)$$

则给出 Maxwell 方程组形式为

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (14)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \quad (15)$$

$$\mathbf{E} = -\mu_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right), \quad (16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h} = 0, \quad (17)$$

式中 ε_0 为电导率, μ_0 为磁导率, ∇ 为 Hamilton 算子, \mathbf{h} 为感应磁场, \mathbf{E} 为感应电场.

联立方程(9)和方程(12),即将非局部因子引入到本构方程中,得出考虑非局部效应的本构方程表达式:

$$[1 - (e_0 a)^2 \nabla^2] \sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \gamma \theta \delta_{ij}. \quad (18)$$

3 模型的控制方程

如图 1 所示,考虑一个长为 L_0 的直尺状窄长薄板,材质为均匀各向同性的热弹性固体.整个材料置于初始磁场 \mathbf{H}_0 中,在 $x = 0$ 的边界处受到热作用,热作用大小随时间而变化.

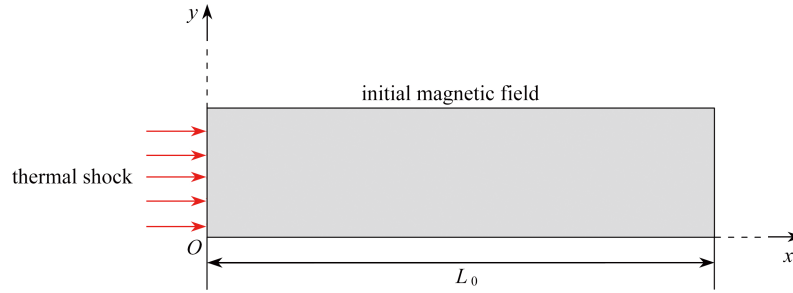


图 1 板受磁场和热作用示意图

Fig. 1 A plate in a magnetic field under thermal shock

本算例可以看作一维问题, 所有变量都依赖于空间变量 x 和时间变量 t , 位移分量的形式如下:

$$U = (u(x, t), 0, 0). \tag{19}$$

从 Maxwell 方程组 (14) ~ (17) 可得感应电场 E 和感应磁场 h 为

$$E = (0, E, 0) = \left(0, \mu_0 H_0 \frac{\partial u}{\partial t}, 0\right), \tag{20}$$

$$h = (0, 0, h) = \left(0, 0, -H_0 \frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{21}$$

由方程 (20)、(21) 和 (14), 可得出电流密度:

$$J = \left(0, -\frac{\partial h}{\partial x} - \varepsilon_0 \mu_0 H_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0\right). \tag{22}$$

由方程 (21)、(22) 和 (11), 得 Lorentz 力 F_i 为

$$F_i = \left(\mu_0 H_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right), 0, 0\right). \tag{23}$$

在一维情况下, 方程 (10)、(13)、(18) 的形式如下:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \mu_0 H_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right), \tag{24}$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{25}$$

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \sigma = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma \theta. \tag{26}$$

把方程 (1) 代入方程 (7) 并将所得方程化为一维形式, 可得一维情况下考虑记忆依赖效应的双相滞后热方程:

$$\begin{aligned} k \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\tau_\theta}{\omega} \int_{t-\omega}^t K(t-\xi) \frac{\partial^3 \theta(x, \xi)}{\partial x^2 \partial \xi} d\xi \right] &= \rho C_E \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial t} + \gamma T_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x} + \\ &\frac{\tau_q}{\omega} \int_{t-\omega}^t K(t-\xi) \left(\rho C_E \frac{\partial^2 \theta(x, \xi)}{\partial \xi^2} + \gamma T_0 \frac{\partial^3 u(x, \xi)}{\partial \xi^2 \partial x} \right) d\xi + \\ &\frac{\tau_q^2}{2\omega} \int_{t-\omega}^t K(t-\xi) \left(\rho C_E \frac{\partial^3 \theta(x, \xi)}{\partial \xi^3} + \gamma T_0 \frac{\partial^4 u(x, \xi)}{\partial \xi^3 \partial x} \right) d\xi. \end{aligned} \tag{27}$$

引入下列无量纲量对基本方程进行简化:

$$\{x^*, u^*\} = c_0 \eta_0 \{x, u\}, \eta_0 = \frac{\rho C_E}{k}, \{t^*, \omega^*\} = c_0^2 \eta_0 \{t, \omega\}, (e_0 a)^* = c_0 \eta_0 (e_0 a), \theta^* = \frac{\gamma \theta}{\lambda + 2\mu},$$

等温弹性波的波速 $v = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, Alfvén 速度 $\alpha_0 = \sqrt{\frac{H_0^2 \mu_0}{\rho}}$, $c_0^2 = v^2 + \alpha_0^2$.

对方程 (24) ~ (27) 进行无量纲化处理得 (为了便于书写, 略去各量右上角星号)

$$\left(1 + \frac{\alpha_0^2}{c_0^2}\right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\alpha_0^2}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{28}$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (29)$$

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \sigma = \frac{\partial u}{\partial x} - \theta, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\tau_\theta}{\omega} \int_{t-\omega}^t K(t-\xi) \frac{\partial^3 \theta}{\partial \xi \partial x^2} d\xi &= \frac{\partial \theta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \\ &\frac{\tau_q}{\omega} \int_{t-\omega}^t K(t-\xi) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial \xi^2} \right) d\xi + \\ &\frac{\tau_q^2}{2\omega} \int_{t-\omega}^t K(t-\xi) \left(\frac{\partial^3 \theta}{\partial \xi^3} + \varepsilon \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial \xi^3} \right) d\xi, \end{aligned} \quad (31)$$

其中 ε 为热弹性耦合常数,

$$\varepsilon = \frac{\gamma^2 T_0}{\rho C_E (\lambda + 2\mu)}.$$

联立方程(24)~(26), 并进行无量纲处理可得

$$\left\{ \left[1 + (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] + \frac{\alpha_0^2}{c_0^2} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{v^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (32)$$

对于热边界条件, 在 $x=0$ 处界面受到一个随时间变化的热载荷 $f(t)$. 对于机械边界条件, 在 $x=0$ 处界面为自由约束. 则边界条件为

$$\theta(0, t) = f(t), \quad \sigma(0, t) = 0, \quad t > 0; \quad (33)$$

初始条件为

$$u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0. \quad (34)$$

为了与其他学者的研究^[5]对照, 本文周期性变化热源与国外学者所采用的保持形式一致^[24], 给出热源如下:

$$f(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right), & 0 \leq t \leq a, \\ 0, & t > a, \end{cases} \quad (35)$$

此处常数 a 为温度波的周期, t 为时间.

核函数形式取 Wang 和 Li^[4] 给出的形式:

$$K(t-\xi) = \begin{cases} 1, & a = b = 0, \\ 1 - \frac{t-\xi}{\omega}, & a = 0, b = \frac{1}{2}, \\ \left(1 - \frac{t-\xi}{\omega}\right)^2, & a = 1, b = 1. \end{cases} \quad (36)$$

4 Laplace 域下问题求解

采用以下 Laplace 变换公式:

$$L\{g(x, t)\} = \dot{g}(x, s) = \int_0^\infty e^{-st} g(x, t) dt. \quad (37)$$

由式(37)可得如下数学关系式:

$$L\left\{\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right)\right\} = s(\bar{\theta} + \varepsilon D\bar{u}). \quad (38)$$

采用式(37)、(38)对方程(28)~(31)进行 Laplace 变换, 可得

$$\left(1 + \frac{\alpha_0^2}{c_0^2}\right) \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = \frac{d\sigma}{dx} + \frac{\alpha_0^2}{v^2} \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad (39)$$

$$\bar{z} = \frac{d\bar{u}}{dx}, \quad (40)$$

$$\left[1 - (e_0 a)^2 \frac{d^2}{dx^2}\right] \bar{\sigma} = \frac{du}{dx} - \theta, \quad (41)$$

$$\frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} - \alpha_1 s \bar{\theta} = \alpha_1 \varepsilon s \frac{d\bar{u}}{dx}, \quad (42)$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{1 + \frac{\tau_q}{\omega} \left(1 + \frac{s\tau_q}{2}\right) G_\omega(s)}{1 + \frac{\tau_\theta}{\omega} G_\omega(s)}.$$

磁-热-弹耦合方程为

$$\left[(e_0 a)^2 s^2 + \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{\nu^2}\right)\right] \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{d\bar{\theta}}{dx} = \left(1 + \frac{\alpha_0^2}{c_0^2}\right) s^2 \bar{u}. \quad (43)$$

边界条件(33)可化为

$$\bar{\sigma}(0, s) = 0, \quad \theta(0, s) = \bar{f}(s). \quad (44)$$

联立方程(39) ~ (42), 消去 $\bar{\theta}$ 得到包含 \bar{u} 的表达式:

$$A \frac{d^4 \bar{u}}{dx^4} - (B + s\alpha_1 A + s\alpha_1 \varepsilon) \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + s\alpha_1 B \bar{u} = 0, \quad (45)$$

其中

$$A = (e_0 \alpha_1)^2 s^2 + \left(1 + \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho \nu^2}\right),$$

$$B = 1 + \frac{\varepsilon_0 \mu_0^2 H_0^2}{\rho}.$$

用相同的方法, 消去 \bar{u} 得到包含 $\bar{\theta}$ 的表达式:

$$A \frac{d^4 \bar{\theta}}{dx^4} - (B + s\alpha_1 A + s\alpha_1 \varepsilon) \frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2} + s\alpha_1 B \bar{\theta} = 0, \quad (46)$$

这里 $x > 0$, 求解方程(45)和(46), 得出通解为

$$\bar{\theta}(x, s) = c_1 e^{-k_1 x} + c_2 e^{-k_2 x}, \quad (47)$$

$$\bar{u}(x, s) = c_3 e^{-k_1 x} + c_4 e^{-k_2 x}, \quad (48)$$

其中

$$k_1^2 + k_2^2 = s^2 + \alpha_1 s(1 + \varepsilon),$$

$$k_1^2 k_2^2 = \alpha_1 s^3.$$

由式(48)结合边界条件(44)得

$$c_1 = \frac{k_1^2 - s^2}{k_1^2 - k_2^2} \bar{f}(s), \quad c_2 = \frac{s^2 - k_2^2}{k_1^2 - k_2^2} \bar{f}(s).$$

将式(47)、(48)代入方程(42)得

$$c_3 = \frac{k_1}{s^2 - k_1^2} c_1, \quad c_4 = \frac{k_2}{s^2 - k_2^2} c_2.$$

将式(47)、(48)代入方程(41)得

$$\bar{\sigma}(x, s) = \frac{s^2}{k_1^2 - s^2} c_1 e^{-k_1 x} + \frac{s^2}{k_2^2 - s^2} c_2 e^{-k_2 x}. \quad (49)$$

5 Laplace 反变换

为了得到材料在时空域中温度、位移和应力的分布, 需要对拉氏域中的解进行 Laplace 反变换. 由于在拉氏域中得到的表达式形式复杂, 通过反变换公式计算时空域中的解析解是较困难的. 因此, 实际处理时大多都是通过编写 MATLAB 程序来进行数值求解. 给出 Laplace 反变换基本公式形式如下^[24]:

$$f(t) = L^{-1}[F(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \tag{50}$$

其中 i 为虚数单位, s 为 Laplace 变换因子, $c \approx \alpha - (\Omega/2\pi) \ln E_r$, α 是函数 $f(t)$ 的指数阶, Ω 为拉氏域中的周期, E_r 为相对误差.

基于快速 Fourier 变换 (FFL) 将反变换基本公式近似离散, 然后采用 “ ε -algorithm” 在保证精度和收敛速度情况下对其求和从而得出反变换结果^[25]. 给出 “ ε -algorithm” 定义如下:

$$\varepsilon_{-1}^{(n)} = 0, \varepsilon_0^{(n)} = S_k, \varepsilon_{k+1}^{(n)} = \varepsilon_{k-1}^{(n+1)} + \frac{1}{\varepsilon_k^{(n+1)} - \varepsilon_k^{(n)}}, \quad k, n = 0, 1, 2, \dots, \tag{51}$$

这里 S_k 为所需计算无穷级数的前 k 项和, $\varepsilon_k^{(n)}$ 表示 ε_k 向量中第 n 个元素.

Brancik 基于以上思想编写了 Laplace 反变换程序^[25], 本文通过参照该程序思路编写反变换程序解决了所分析的问题.

6 数值分析

在前文中我们建立了模型的基本控制方程, 由控制方程结合相应的初始条件和边界条件, 借助 Laplace 变换及反变换得出一维情况下的无量纲温度、位移及应力的解析解. 下文以铜质材料为算例, 研究各无量纲量的变化规律, 在计算中用到的相关材料参数见表 1.

表 1 相关参数
Table 1 Related parameters

parameter	value
thermal conductivity $K/(\text{N}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{s}^{-1})$	386
specific heat at constant strain $C_E/(\text{m}^2/\text{K})$	383.1
Lamé constant $\mu/(\text{N}/\text{m}^2)$	3.86×10^{10}
Lamé constant $\lambda/(\text{N}/\text{m}^2)$	7.76×10^{10}
density $\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$	8 954
magnetic permeability in vacuum $\mu_0/(\text{N}\cdot\text{s}^2/\text{C}^2)$	1.256×10^{-6}
electric permittivity in vacuum $\varepsilon_0/(\text{C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2})$	$10^{-9}/(36\pi)$
reference temperature T_0/K	293

6.1 磁场的影响

本小节研究磁场对各无量纲温度、位移、应力的影响. 取时间 t 为 1, 核函数 $K(t-\xi) = 1$, 时间延迟因子 $\omega = 0.01$, 非局部参数取 0, 相位迟滞因子 τ_θ, τ_q 均取 0. 用方程 (43) 中磁场参数 $\alpha = 1 + \alpha_0^2/c_0^2$ 取不同值来体现磁场的变化, $\alpha = 1$ 表示磁场为 0. 磁场取不同值时各无量纲量的分布如图 2~4 所示.

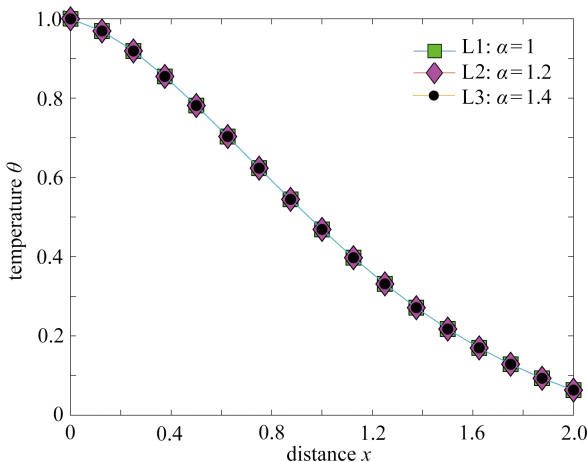


图 2 磁场取不同值时温度 θ 的变化情况

Fig. 2 The variation of temperature θ for different values of the magnetic field

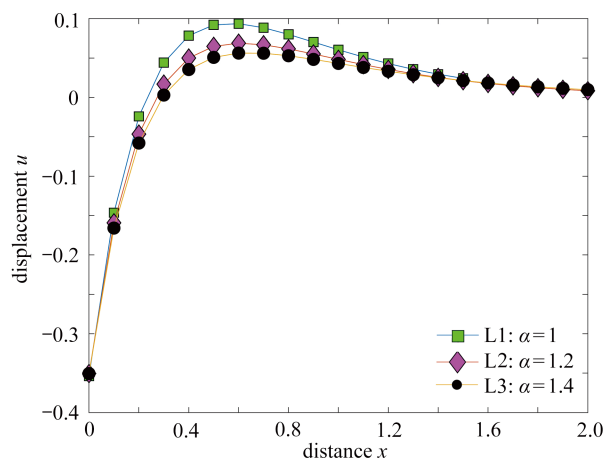


图 3 磁场取不同值时位移 u 的变化情况

Fig. 3 The variation of displacement u for different values of the magnetic field

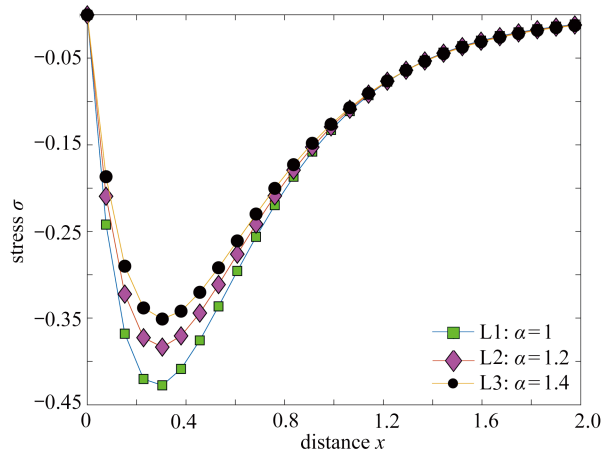


图 4 磁场取不同值时应力 σ 的变化情况

Fig. 4 The variation of stress σ for different values of the magnetic field

从图 2 可以看出, 随着磁场的增大三条温度分布曲线是重叠的, 表明磁场对材料无量纲温度没有影响. 图 3 中随着磁场的增大正位移的峰值逐渐减小, 曲线变化趋势趋于平缓, 可见磁场的存在对材料的膨胀起到抑制作用. 在 $x = 1$ 处之后三条曲线开始逐渐趋于重合, 可见该处之后的材料面内磁场对位移的影响逐渐消失. 从图 4 可以看出, 在 $x = 0$ 的边界面上应力始终为 0, 这与边界条件相一致. 在 $x = 1$ 处之后的面内, 磁场对应力的影响逐渐消失. 比较图 4 中三条曲线可以看出随着磁场的增大, 材料内应力峰值一直在减小, 即磁场的存在抑制了应力的增大.

6.2 核函数的影响

本小节研究了不同形式核函数对材料无量纲温度、位移、应力的影响情况. 时间 t 取 1, 磁场参数 α 取 1.2, 非局部参数参数取 0, 相位迟滞因子 τ_θ, τ_q 均取 0, 核函数采用式 (36) 给出的形式. 不同核函数下各无量纲量分布如图 5 ~ 7 所示.

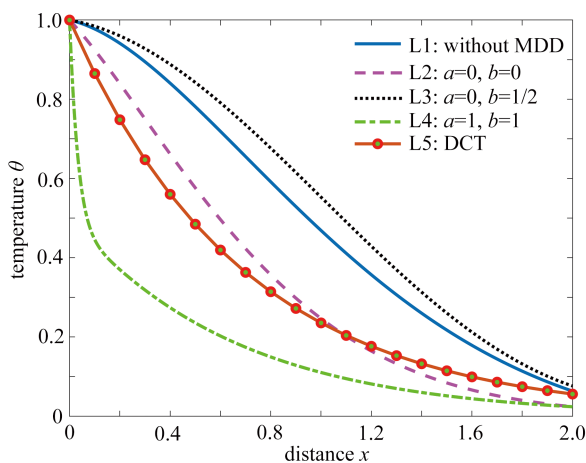


图 5 核函数取不同形式时温度 θ 的变化情况

Fig. 5 The variation of temperature θ for different forms of the kernel function

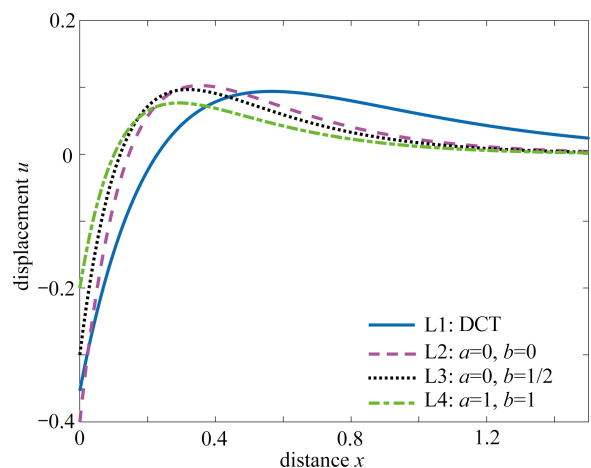


图 6 核函数取不同形式时位移 u 的变化情况

Fig. 6 The variation of displacement u for different forms of the kernel function

图 5 中曲线 L1 ~ L4 时间延迟因子 ω 取 0.01. 比较 L2、L3、L4 可以看出核函数对温度分布的影响主要体现在温度递减速率上. 核函数 $K(t - \xi) = (1 - (t - \xi)/\omega)^2$ 使得温度曲线下降速度最快, 核函数 $K(t - \xi) = 1$ 对温度分布影响最小.

曲线 L5 表示 $\omega = 0$ 、磁场为 0 时的温度分布曲线. 本文所建立的理论为考虑非局部效应和记忆依赖效应的双相滞后热弹性耦合理论, 若 $\omega = 0$ 则方程 (3) 退化为 Fourier 热传导方程, 即忽略了记忆效应. 本小节非局部因子为 0, 即忽略了非局部效应. 相位迟滞因子 τ_θ, τ_q 均取 0, 则方程 (7) 退化为 Biot 能量方程 (5), 即忽略了相位

迟滞。由此,本文建立的耦合理论退化成了 Biot 经典理论.将曲线 L5 与国外学者研究结果的图 1^[5] 做对比,可知分布是合理的.在 $x = 0$ 的边界面上温度值始终为 1,这与本算例的热边界条件相一致.距离边界面越远处温度越小,这与事实相符.

图 6 中曲线 L2 ~ L4 为不同核函数对位移影响的分布曲线.可以看出位移 u 在边界面处为负值,随着 x 增大位移先迅速减小至 0,而后又逐渐增大,在 $x=0.4$ 的附近位移 u 达到正峰值,最后随着 x 值的增大位移逐渐趋于 0.比较曲线 L2~L4 可得,无论是正位移峰值还是负位移峰值,在核函数 $K(t-\xi) = (1-(t-\xi)/\omega)^2$ 下均为最小,核函数 $K(t-\xi) = 1$ 下均为最大.L1 表示当 $\omega = 0$ 、磁场为 0 时位移 u 的分布情况,此时模型退化为 Biot 模型,退化过程与图 5 相同,所示位移分布与其他学者研究的 DCT 模型的图 2^[5] 分布情况一致.

图 7 为不同核函数下应力的分布情况.曲线 L1 不考虑记忆依赖效应,曲线 L2、L3、L4 为三个不同核函数下应力的分布曲线,观察得出核函数对应力峰值的影响与对位移峰值的影响相同.从图 7 可以看到在 $x=0$ 处应力为 0,在远离边界 $x=0$ 处应力逐渐趋于 0,符合给定的边界条件.

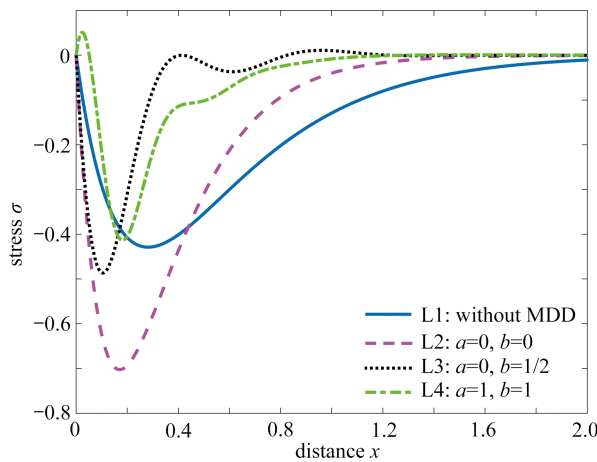


图 7 核函数取不同形式时应力 σ 的变化情况
Fig. 7 The variation of stress σ for different forms of the kernel function

6.3 时间延迟和相位迟滞的影响

本小节研究时间延迟因子和相位迟滞因子对各无量纲量的影响.选取时间 $t=1$,核函数取 $K(t-\xi) = 1$,非局部因子取 0.因热波以有限的速度传播导致热流矢量的传播将滞后于温度梯度的形成,因此热流矢量滞后时间 τ_q 大于温度梯度滞后时间 τ_θ ^[7].图 8 ~ 10 为受时间延迟因子和相位迟滞因子影响的各无量纲量分布结果.

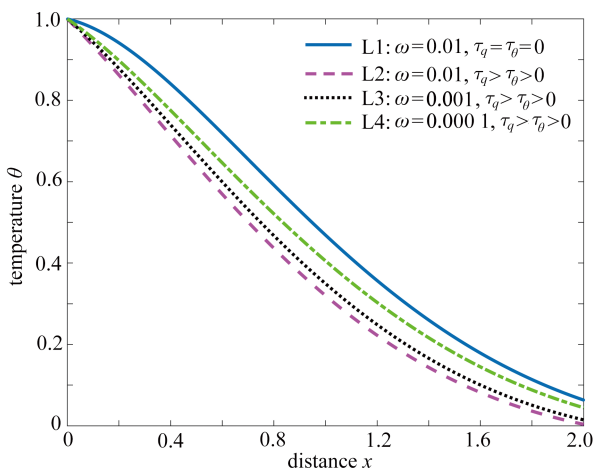


图 8 τ_q, τ_θ 和 ω 取不同值时温度 θ 的变化情况

Fig. 8 The variation of temperature θ for different values of τ_q, τ_θ and ω

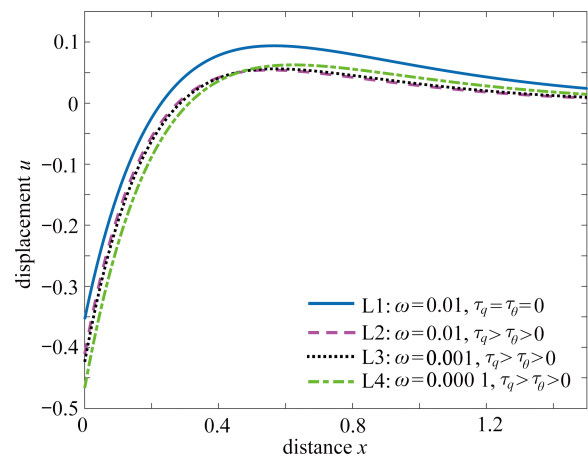


图 9 τ_q, τ_θ 和 ω 取不同值时位移 u 的变化情况

Fig. 9 The variation of displacement u for different values of τ_q, τ_θ and ω

本小节中曲线 L1 表示时间延迟因子 ω 取 0.01, 相位迟滞因子 $\tau_q = \tau_\theta = 0$. 曲线 L2 ~ L4 为 ω 分别取值 0.01, 0.001, 0.000 1, 相位迟滞因子取值 $\tau_q = 0.04, \tau_\theta = 0.02$. 从图 8 可以看出,随着时间延迟因子的增大,温度的非 0 区

域沿 x 轴减小, 这说明热的传播速度是有限的. 从图 9 中可得, 时间延迟因子越大, $x = 0$ 边界处由于热量积累时间越少, 因此热膨胀程度越弱, 负位移越小. 但时间延迟因子越大热传播距离越小, 受热区域在材料上越集中, 因此材料形变越多, 正位移峰值增大. 从图 10 可看出时间延迟因子越大应力峰值越大.

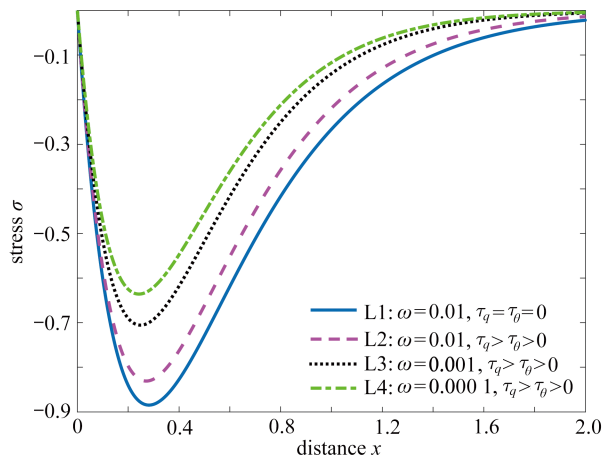


图 10 τ_q, τ_θ 和 ω 取不同值时应力 σ 的变化情况

Fig. 10 The variation of stress σ for different values of τ_q, τ_θ and ω

分别比较三个图中的曲线 L1 和 L2 可知相位迟滞的存在加剧了各无量纲量的变化速率, 使得介质中温度、位移、应力能更快地趋于平稳. 计算中可选取不同的时间延迟因子和相位迟滞因子组合计算以满足实际需要.

6.4 非局部的影响

本小节研究非局部效应对无量纲温度、位移、应力的影响. 取核函数 $K(t - \xi) = 1$, 时间延迟因子 $\omega = 0.0001$, 相位迟滞因子 $\tau_q = \tau_\theta = 0$. 非局部因子 $e_0 a$ 分别取 0, 0.05, 0.1, 非局部因子取不同值时各无量纲量的分布情况如图 11 ~ 13 所示.

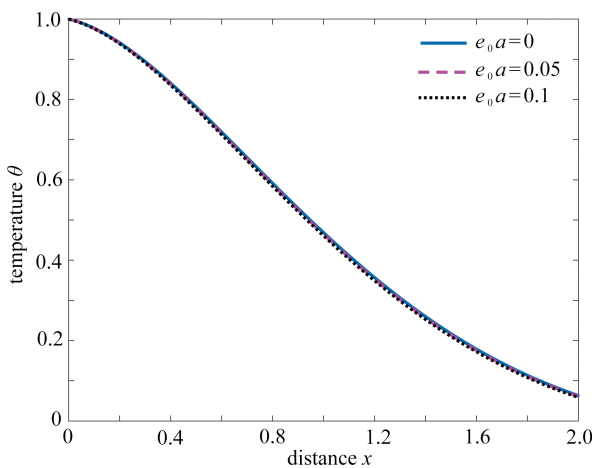


图 11 $e_0 a$ 取不同值时温度 θ 的变化情况

Fig. 11 The variation of temperature θ for different values of $e_0 a$

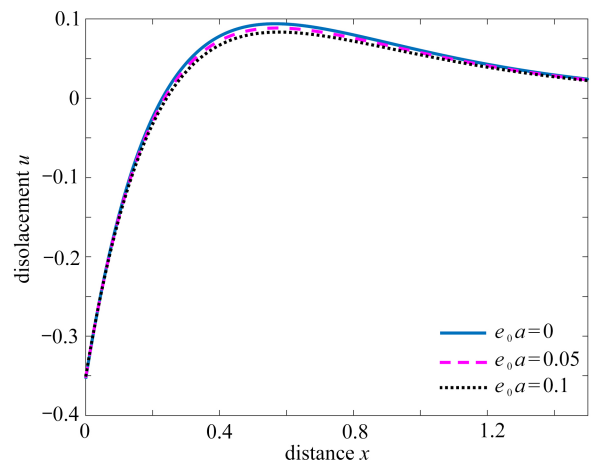


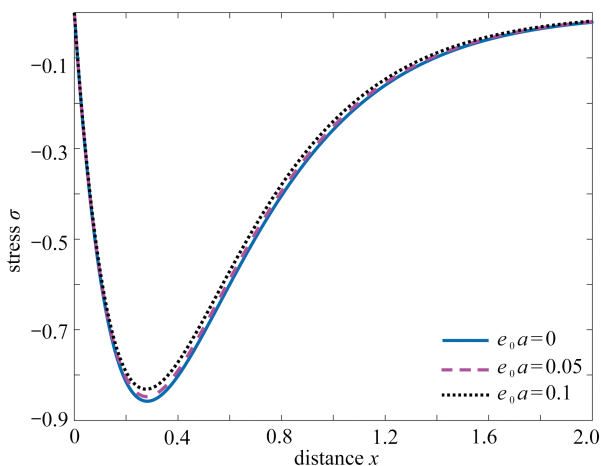
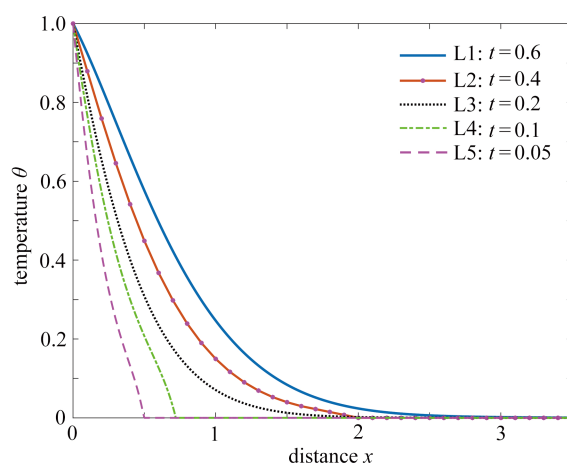
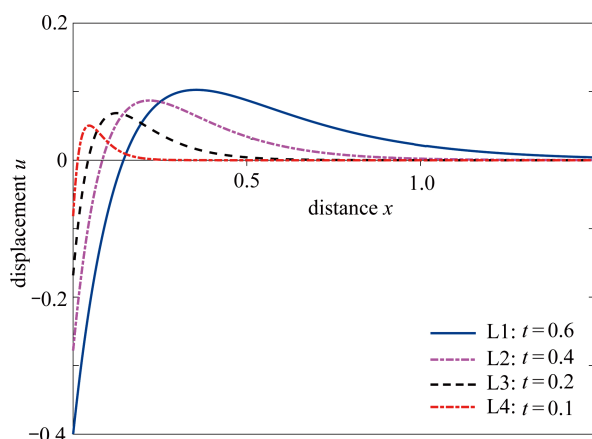
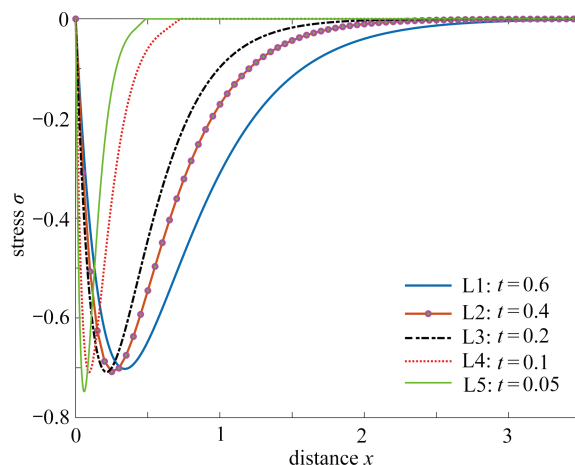
图 12 $e_0 a$ 取不同值时位移 u 的变化情况

Fig. 12 The variation of displacement u for different values of $e_0 a$

从图 11 看出所得三条无量纲温度分布曲线几乎重合, 即非局部因子对无量纲温度分布几乎无影响. 从图 12 看出随着非局部因子的增大, 正位移峰值减小, 负位移峰值几乎无变化. 从图 13 看出随着非局部因子的增大, 应力峰值减小. 从本小节可以看出, 非局部参数越大, 其对材料的位移、应力影响越明显, 这表明微尺度材料尤其纳米材料, 在工程中考虑非局部的影响具有重要意义.

6.5 时间的影响

本小节研究无量纲温度、位移、应力随时间变化的分布图. 取核函数 $K(t - \xi) = 1$, 时间延迟因子 $\omega = 0.0001$, 相位迟滞因子 $\tau_q = \tau_\theta = 0$, 非局部因子取 0. 不同时刻各无量纲量的分布情况如图 14 ~ 16 所示.

图 13 $e_0 a$ 取不同值时应力 σ 的变化情况Fig. 13 The variation of stress σ for different values of $e_0 a$ 图 14 t 取不同值时温度 θ 的变化情况Fig. 14 The variation of temperature θ for different values of t 图 15 t 取不同值时位移 u 的变化情况Fig. 15 The variation of displacement u for different values of t 图 16 t 取不同值时应力 σ 的变化情况Fig. 16 The variation of stress σ for different values of t

为研究各无量纲随时间变化的分布图,需要将变化热源固定,即用控制变量的方法固定边界条件,从而使时间成为唯一变量.因此,本小节热边界条件采用 $\theta(0, t) = 1$ ^[7].

从图 14 可以看出,从 x 轴分布情况来看,无量纲温度的非 0 区域是有限的,这说明热传播速度是有限的.当 $t = 0.1$ 和 $t = 0.05$ 时,温度曲线各自存在一个骤降的区域,即温度快速降为 0,温度骤降位置便是热波前位置.随着时间 t 的增大,温度骤降现象消失,且无量纲温度的非 0 值区域一直在增大,即热扰动区域一直增大.

从图 15 可看出,在 $x = 0$ 界面处发生了热膨胀,位移为负值.从 x 轴分布情况来看,随着 x 增大位移一直减小到 0,之后介质因受热而收缩,位移为正并逐渐达到峰值.最后位移减小并趋于 0.

从图 16 可看出,在 $x = 0$ 界面处应力始终为 0,从 x 轴分布情况来看,随着 x 增大材料内压应力先迅速增大,之后较缓慢减小至 0.当时间越小时,应力变化速率越大,介质中应力区域愈集中,且时间越小应力峰值越大.

6.6 Laplace 反变换算法的影响

本小节研究反变换过程中自由设置的参数对反变换结果的影响.参数设置对反变换结果的影响是一个纯粹的数学问题,因此本小节以式(49)为例,对该式进行不同参数的数值反演以说明反变换过程中参数设置的作用.

本文基于 Brancik 的程序编写了 Laplace 反变换程序,相对误差 E_r 控制在 10^{-11} 内^[26].程序的核心思想是快速 Fourier 变换和“ ε -algorithm”,其中“ ε -algorithm”是一种迭代算法,迭代控制参数 P 和 M 可自由设置. P 为正整数,通常设置为 2 或 3, M 为 2 的幂^[25]. P 值的作用:决定“ ε -algorithm”迭代算法的最终结果,当

设定其取值, 迭代计算的最终结果值为 $\varepsilon_{2p}^{(0)}$, 迭代过程见文献 [25] 的图 1. M 值的作用: 若用 t_m 表示计算设定的最大时间, 则 M 是时间间隔 $t \in (0, t_m)$ 内计算点的数量. 取 $\omega = 0.0001$, $\tau_q = \tau_\theta = 0$, $e_0 a = 0$, $K(t - \xi) = 1$, 不同 P 值和 M 值对式(49)反变换结果的影响如图 17、图 18 所示.

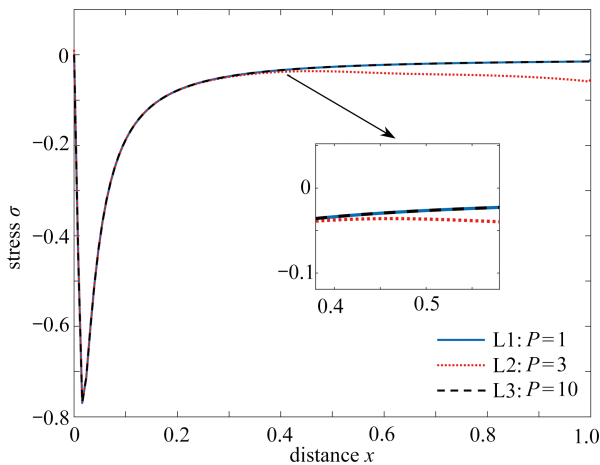


图 17 P 取不同值时应力 σ 的变化情况

Fig. 17 The variation of stress σ for different values of P

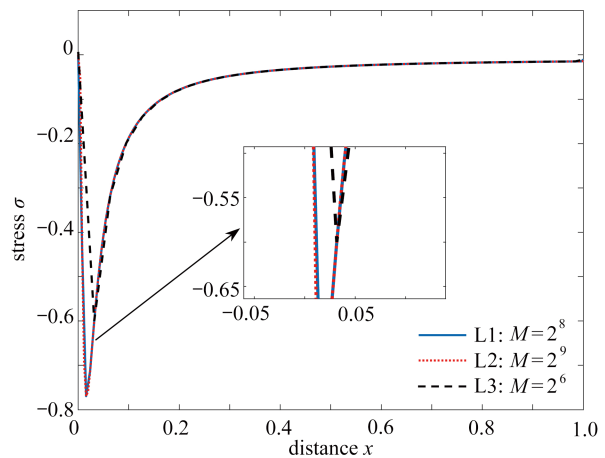


图 18 M 取不同值时应力 σ 的变化情况

Fig. 18 The variation of stress σ for different values of M

图 17 中 L2 为 P 取经验值 3 时的反变换结果, 其结果在相对误差以内. 而当 P 取值较大时, 在 $x = 0.4$ 之后其反变换误差随 x 增大而增大, 这与 Brancik 的研究结果相似. 当 P 取 1 时对本例几乎无影响. 图 18 中 L1 和 L2 分别为 M 取 256 和 512 的反变换结果, 可以看出计算点多于经验值 256 后, 反变换结果并没有变化. 由此可见计算点太多不仅不能提高计算精度, 还增加了计算机的计算时长. 但是当 M 取值 64 时, 由于计算点数目太少, 在 σ 变化较大的区域计算误差非常大, 在 σ 变化较小的平缓区域计算误差相对较小.

7 结 论

本文基于双相滞后广义热弹性理论, 同时考虑记忆依赖效应和非局部效应, 研究了窄长薄板受到磁-热弹耦合作用下的动态响应问题. 通过分析得出以下结论:

- 1) 核函数的形式、时间延迟因子和相位迟滞因子对各无量纲量有明显的影响. 根据工程需要, 选取不同的核函数、时间延迟因子和相位滞后时间的组合作为新指标来计算, 可更精确地表征材料的力学行为.
- 2) 时间延迟因子对各无量纲量有明显的影响, 随着时间延迟因子的增大, 温度非 0 区域减小, 正位移和应力的峰值均增大.
- 3) 相位迟滞加剧了各无量纲量的变化速率, 使介质内温度、位移、应力更快趋于平稳.
- 4) 非局部因子对无量纲温度分布几乎无影响, 但对位移、应力峰值有明显的影响. 随着非局部参数的增大, 正位移和应力的峰值均减小.
- 5) 磁场对无量纲温度的分布无影响, 正位移和应力的峰值随着磁场的增大在减小. 可见磁场的存在对材料的位移、应力变化起到抑制作用.
- 6) 在给定的时刻下, 各无量纲量的非 0 值都分布在有限的区域内, 这反映出热传播速度是有限的. 当时间尺度非常小时, 无量纲温度在热波波前位置骤降趋于 0. 当时间增大时, 正位移的峰值和边界面处负位移的绝对值均增加, 应力的峰值减小.
- 7) 在 Laplace 反变换过程中设置恰当的参数对反变换结果的准确性影响很大.

参考文献 (References):

[1] POVSTENKO Y Z. Fractional radial heat conduction in an infinite medium with a cylindrical cavity and associated thermal stresses[J]. *Mechanics Research Communications*, 2010, **37**(4): 436-440.

[2] YOUSSEF H M. Generalized thermoelastic infinite medium with spherical cavity subjected to moving heat

- source[J]. *Computational Mathematics and Modeling*, 2010, **21**(2): 212-225.
- [3] EI-KARAMANY A S, EZZAT M A. On fractional thermoelasticity[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2011, **3**(3): 334-346.
- [4] WANG J L, LI H F. Surpassing the fractional derivative: concept of the memory-dependent derivative[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2011, **62**(3): 1562-1567.
- [5] EZZAT M A, EI-KARAMANY A S, EI-BARY A A. On dual-phase-lag thermoelasticity theory with memory-dependent derivative[J]. *Mechanics of Composite Materials & Structures*, 2017, **24**(11): 908-916.
- [6] LOTFY K, SARKAR N. Memory-dependent derivatives for photothermal semiconducting medium in generalized thermoelasticity with two temperature[J]. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2017, **21**(4): 519-534.
- [7] WANG Y Z, ZHANG X B, SONG X N. A generalized theory of thermoelasticity based on thermomass and its uniqueness theorem[J]. *Acta Mechanica*, 2014, **225**(3): 797-808.
- [8] LORD H W, SHULMAN Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1967, **15**(5): 299-309.
- [9] IGNACZAK J, HETNARSKI R B. Generalized thermoelasticity: mathematical formulation[J]. *Encyclopedia of Thermal Stresses*, 1999, **22**: 451-476.
- [10] GREEN A E, NAGHDI P M. Thermoelasticity without energy dissipation[J]. *Journal of Elasticity*, 1993, **31**(3): 189-208.
- [11] YOUSSEF H M. Theory of two-temperature-generalized thermoelasticity[J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 2006, **71**(3): 383-390.
- [12] KUANG Z B. Variational principles for generalized dynamical theory of thermopiezoelectricity[J]. *Acta Mechanica*, 2009, **203**(1/2): 1-11.
- [13] CHANDRASEKHARAIH D S. Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1998, **51**(12): 705-729.
- [14] 戴天民. 微极连续统的耦合场理论的再研究(II): 微极热压电弹性理论和电磁热弹性理论[J]. *应用数学和力学*, 2002, **23**(3): 229-238. (DAI Tianmin. Restudy of coupled field theories for micropolar continua (II): thermopiezoelectricity and magnetothermoelasticity[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, **23**(3): 229-238.(in Chinese))
- [15] 林 C W. 基于非局部弹性应力场理论的纳米尺度效应研究: 纳米梁的平衡条件、控制方程以及静态挠度[J]. *应用数学和力学*, 2010, **31**(1): 35-50. (LIM C W. On the truth of nanoscale for nanobeams based on nonlocal elastic stress field theory: equilibrium, governing equation and static deflection[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2010, **31**(1): 35-50.(in Chinese))
- [16] 周保良, 李志远, 黄丹. 二维瞬态热传导的PDDO分析[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(6): 660-668. (ZHOU Baoliang, LI Zhiyuan, HUANG Dan. PDDO analysis of 2D transient heat conduction problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(6): 660-668.(in Chinese))
- [17] ERINGEN A C. Nonlocal continuum field theories[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2003, **56**(2): 391-398.
- [18] 张培, 何天虎. 考虑非局部效应和记忆依赖微分的广义热弹问题[J]. *力学学报*, 2018, **50**(3): 508-516. (ZHANG Pei, HE Tianhu. A generalized thermoelastic problem with nonlocal effect and memory-dependent derivative[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2018, **50**(3): 508-516.(in Chinese))
- [19] 马金涛, 何天虎. 基于非局部理论的一维广义热弹问题研究[J]. *甘肃科学学报*, 2018, **30**(5): 4-9. (MA Jintao, HE Tianhu. Study on one dimensional generalized thermoelastic problem based on non local theory[J]. *Journal of Gansu Sciences*, 2018, **30**(5): 4-9.(in Chinese))
- [20] SUR A. Non-local memory-dependent heat conduction in a magneto-thermoelastic problem[J]. *Waves in Random and Complex Media*, 2022, **32**(1): 251-271.
- [21] EI-KARAMANY A S, EZZAT M A. Modified Fourier's law with time delay and kernel function: application in thermoelasticity[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 2015, **38**(7): 811-834.
- [22] BIOT M A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics[J]. *Journal of Applied Physics*, 1956, **27**(3): 240-253.
- [23] TZOU D Y. A unified field approach for heat conduction from macro- to micro-scales[J]. *Journal of Heat Transfer*, 1995, **117**(1): 8-16.
- [24] HONIG G, HIRDES U. A method for the numerical inversion of Laplace transforms[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1984, **10**(1): 113-132.
- [25] BRANCIK L. Programs for fast numerical inversion of Laplace transforms in MATLAB language environment[C]//*Proceedings of the 7th Conference MATLAB'99, Czech Republic, Prague*. 1999: 27-39.