

微分求积法分析平面接头应力奇异性

葛仁余, 张佳宸, 马国强, 刘小双, 牛忠荣

Analysis on Stress Singularity of Plane Joints With the Differential Quadrature Method

GE Renyu, ZHANG Jiachen, MA Guoqiang, LIU Xiaoshuang, and NIU Zhongrong

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420218>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

热环境中旋转功能梯度纳米环板的振动分析

Vibration Analysis of Rotating Functionally Gradient Nano Annular Plates in Thermal Environment

应用数学和力学. 2020, 41(11): 1224-1236

准三维功能梯度微梁的尺度效应模型及微分求积有限元

Microbeam Model and Related Differential Quadrature Finite Elements

应用数学和力学. 2021, 42(6): 623-636

反平面塑性V形切口尖端应力和位移渐近解

Asymptotic Solutions of Plastic Stress and Displacement at V-Notch Tips Under Anti-Plane Shear

应用数学和力学. 2021, 42(12): 1258-1275

平面应力状态断裂强度的椭圆准则分析

Fracture Strength Analysis of the Plane-Stress State by the Ellipse Criterion

应用数学和力学. 2020, 41(3): 292-301

深埋公路隧洞围岩应力和位移分布的复变函数解

Complex Variable Function Solutions for Stress and Displacement Distributions in Surrounding Rock of Deep Buried Highway Tunnels

应用数学和力学. 2018, 39(5): 548-557

满足断裂过程区裂纹张开位移条件应力函数的半解析解法

A Semi-Analytical Method for Stress Functions Meeting Crack Opening Displacements in Fracture Process Zones

应用数学和力学. 2018, 39(8): 979-988



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

微分求积法分析平面接头应力奇异性*

葛仁余¹, 张佳宸¹, 马国强¹, 刘小双¹, 牛忠荣²

(1. 安徽工程大学 力学重点实验室, 安徽 芜湖 241000;
2. 合肥工业大学 土木与水利工程学院, 合肥 230009)

摘要: 对于双材料平面接头问题提出了一个分析应力奇性指数的新方法: 微分求积法 (DQM). 首先, 将平面接头连接点处位移场的径向渐近展开格式代入平面弹性力学控制方程, 获得了关于应力奇性指数的常微分方程组 (ODEs) 特征值问题. 然后, 基于 DQM 理论, 将 ODEs 的特征值问题转化为标准型广义代数方程组特征值问题, 求解之可一次性地计算出双材料平面接头连接点处应力奇性指数, 同时, 一并求出了接头连接点处相应的位移和应力特征函数. 数值计算结果说明该文 DQM 计算平面接头连接点处应力奇性指数的结果是正确的.

关键词: 应力奇性指数; 微分求积法; 平面接头; 位移特征函数

中图分类号: O343.4 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420218

Analysis on Stress Singularity of Plane Joints With the Differential Quadrature Method

GE Renyu¹, ZHANG Jiachen¹, MA Guoqiang¹, LIU Xiaoshuang¹, NIU Zhongrong²

(1. Key Laboratory for Mechanics, Anhui Polytechnic University, Wuhu, Anhui 241000, P.R.China;

2. College of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P.R.China)

Abstract: A novel differential quadrature method (DQM) for analysis of the stress singularity index was proposed. Firstly, the radial asymptotic expansion scheme of the displacement field at the connection point of the plane joint was substituted into the governing equation of plane elasticity, and the eigenvalue problem of ordinary differential equations (ODEs) about the stress singularity index was obtained. Then, based on the DQM theory, the eigenvalue problem of ordinary differential equations was transformed into the eigenvalue problem of standard generalized algebraic equations. The stress singularity index at the connection point of the bi-material plane joint was calculated at one time, and the corresponding displacement and stress characteristic functions at the connection point were obtained at the same time. The numerical results show that, the DQM is correct in calculation of the stress singularity index at the connection point of the plane joint.

Key words: stress singularity index; differential quadrature method; plane joint; displacement characteristic function

* 收稿日期: 2021-07-28; 修订日期: 2021-09-19

基金项目: 安徽省自然科学基金 (1808085ME147); 国家级大学生创新创业训练计划 (202010363121)

作者简介: 葛仁余 (1969—), 男, 副教授, 博士 (E-mail: gerenyu@sina.com);

张佳宸 (1996—), 男, 硕士生 (通讯作者. E-mail: 381610972@qq.com).

引用格式: 葛仁余, 张佳宸, 马国强, 刘小双, 牛忠荣. 微分求积法分析平面接头应力奇异性[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(4): 382-391.

引 言

不同材料的连接是机械工程和材料科学中经常遇到的一种情况. 由于组成材料的弹性性质不同, 连接点是产生结构破坏失效的薄弱部位和损伤源. 结构在这些薄弱部位产生强应力集中, 以至于在弹性力学意义上应力趋于无穷大, 这种弹性力学范围内应力趋于无穷大的特性称为应力奇异性. 当外载荷作用时, 在结构的这些薄弱部位会产生很高的应力集中, 会导致结构在 V 形切口或接头连接点处出现龟裂等多种破坏形式. 由于接头应力场的奇性指数对结构强度有决定性的影响, 因此, 获取奇性指数对确保结构服役的可靠性和安全性具有重要意义^[1-2].

接头连接点处应力奇点研究方法有若干种, 每种方法都有各自的特点, 例如, Mellin 变换法是一种计算应力奇性指数简便而十分有效的方法^[3-5]. Williams^[6](1952 年)用直接的 Airy 应力函数法研究了幂应力奇异性. England^[7](1971 年), Stern 和 Soni^[8](1976 年), 以及 Carpenter 和 Byers^[9](1987 年)使用了简单的复势方法来研究幂应力奇异性. Paggi 和 Carpinteri^[10]对含切口结构和多材料接头应力奇异性进行了广泛的研究, 从数学上证明了特征函数展开法、复变函数法和 Mellin 变换法在求解应力奇性指数方面的等价性.

为了确定和降低材料微观结构中的应力奇性指数, 人们开始关注不同材料组成的接头结构的应力奇异性问题^[11-13]. 例如, 张金轮和葛仁余等^[14]运用插值矩阵法分析了平面接头与界面裂纹的应力奇性指数; Sator 等^[15]从特征方程出发, 获得了平面接头应力奇性指数实数解的精确值, 用 Newton 法获得了应力奇性指数复数解的数值解; 在假设特征值为复数的前提下, Carpinteri 等^[16]运用特征函数展开的方法研究了多材料连接点处的应力奇异性问题; Cho 等^[17]利用复势方法以及复根的概念, 研究了双材料 V 形切口裂纹的幂对数应力奇异性问题.

1971 年, Bellman 和 Casti^[18]提出了微分求积法(DQM)基本理论, 在求解微分方程特征值和边值问题时, 由于该理论不依赖于变分原理, 具有公式简单、编程方便、高效、精度高等特点, 是一种有吸引力的直接求解微分方程的数值计算方法, 并且能以较少的网格点求得微分方程的高精度数值解, 所以其在振动工程领域得到了广泛应用, 主要用来求解工程结构的自由振动和强迫振动问题. 本文创新性地将该方法运用到工程断裂力学的研究领域. 根据弹性力学基本理论, 将异质双材料平面接头连接点处应力奇性指数的计算转化为一组常微分方程组(ODEs)的特征值问题, 再由 DQM 基本理论将其转化为标准型广义代数方程组特征值问题, 最后, 一次性地计算出异质材料平面接头连接点处应力奇性指数及其相应的位移和应力特征函数.

1 平面接头应力奇性指数及其 DQM 计算

图 1 为各向同性双材料平面接头模型, Γ_1 和 Γ_3 为两自由楔边, Γ_2 为两种不同材料的交界边. 在接头连接点 O 处同时定义一个直角坐标系 xOy 和一个极坐标系 $rO\theta$, 交界 Γ_2 与 x 轴重合, θ 逆时针方向为正, 顺时针方向为负. 对于一个平面接头构件, 基于 Williams 渐近展开理论^[6], 将接头连接点处的位移场表达成关于径向 r 的级数渐近展开形式:

$$u_i^{(m)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^M A_k r^{\lambda_k+1} \tilde{u}_{ik}^{(m)}(\theta), \quad i = r, \theta. \quad (1)$$

关于平面应力问题, 将式(1)代入各向同性材料本构方程, 获得接头连接点处应力分量如下:

$$\sigma_{ij}^{(m)}(r, \theta) = \sum_{k=1}^M A_k r^{\lambda_k} \tilde{\sigma}_{ijk}^{(m)}(\theta), \quad ij = rr, \theta\theta, r\theta. \quad (2)$$

式(1)和(2)中, λ_k 为应力奇性指数, A_k 为位移幅值系数($k = 1, 2, 3, \dots, M$), M 是截取的级数项数; 上标 $m = 1, 2$ 分别表示材料域 1 和材料域 2, $\tilde{u}_{ik}^{(m)}(\theta)$ ($i = r, \theta$)为相应材料域的径向和周向位移特征函数, $\tilde{\sigma}_{ijk}^{(m)}(\theta)$ ($ij = rr, \theta\theta, r\theta$)为相应材料域的应力特征函数, $\tilde{\sigma}_{ijk}^{(m)}(\theta)$ 为 $\tilde{u}_{ik}^{(m)}(\theta)$ 的线性组合, 即

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{rrk}^{(m)}(\theta) = \frac{E^{(m)}}{1-(\nu^{(m)})^2} \left[\nu^{(m)} \frac{d\tilde{u}_{\theta k}^{(m)}}{d\theta} + (1+\lambda_k)\tilde{u}_{rk}^{(m)} + \nu^{(m)}\tilde{u}_{rk}^{(m)} \right], \\ \bar{\sigma}_{rrk}^{(m)}(\theta) = \frac{E^{(m)}}{1-(\nu^{(m)})^2} \left[\frac{d\tilde{u}_{\theta k}^{(m)}}{d\theta} + (1+\lambda_k)\nu^{(m)}\tilde{u}_{rk}^{(m)} + \tilde{u}_{rk}^{(m)} \right], \\ \bar{\sigma}_{r\theta k}^{(m)}(\theta) = \frac{E^{(m)}}{2(1+\nu^{(m)})} \left(\frac{d\tilde{u}_{rk}^{(m)}}{d\theta} + \lambda_k\tilde{u}_{\theta k}^{(m)} \right), \end{cases} \quad (3)$$

式中, $E^{(m)}$ 和 $\nu^{(m)}$ 分别为相应材料域的弹性模量和 Poisson 比. 考虑平面应变问题时, 只需将式(3)中的 $E^{(m)}$ 用

$\frac{E^{(m)}}{1-(\nu^{(m)})^2}$ 替换, $\nu^{(m)}$ 用 $\frac{\nu^{(m)}}{1-\nu^{(m)}}$ 替换. 在极坐标系下, 无体力的弹性力学平面问题平衡方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}^{(m)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(m)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{\theta\theta}^{(m)}}{r} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(m)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(m)}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}^{(m)}}{r} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

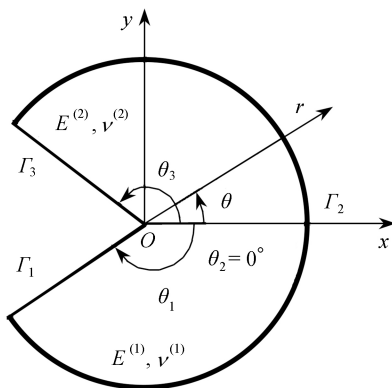


图1 两相材料平面接头模型

Fig. 1 The 2-phase isotropic multi-material junction model

为了便于编程计算, 引入归一化变量 ξ , $0 \leq \xi \leq 1$. 在区间 $[\theta_1, \theta_2]$ 中, 归一化变量 ξ 为

$$\xi = (\theta - \theta_1) / \theta_{21}, \quad \theta_{21} = \theta_2 - \theta_1. \quad (5a)$$

在区间 $[\theta_2, \theta_3]$ 中, 归一化变量 ξ 为

$$\xi = (\theta - \theta_2) / \theta_{32}, \quad \theta_{32} = \theta_3 - \theta_2. \quad (5b)$$

将式(2)、(5)代入平面问题的平衡方程(4)中, 得

$$\mathbf{L} + \lambda_k \mathbf{M} + \lambda_k^2 \mathbf{N} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

其中, 矩阵列向量 \mathbf{L} , \mathbf{M} 和 \mathbf{N} 为 $\tilde{u}_{rk}^{(m)}(\xi)$, $\tilde{u}_{\theta k}^{(m)}(\xi)$ 及其第1阶、第2阶导数的线性组合($m = 1, 2$), 即

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_{21}^2} \frac{d^2 \tilde{u}_{rk}^{(1)}}{d\xi^2} - \frac{2}{\theta_{21}} \frac{d\tilde{u}_{\theta k}^{(1)}}{d\xi} \\ \frac{1}{\theta_{21}^2} \frac{d^2 \tilde{u}_{\theta k}^{(1)}}{d\xi^2} + \frac{2}{\theta_{21}} \frac{d\tilde{u}_{rk}^{(1)}}{d\xi} \\ \frac{1}{\theta_{32}^2} \frac{d^2 \tilde{u}_{rk}^{(2)}}{d\xi^2} - \frac{2}{\theta_{32}} \frac{d\tilde{u}_{\theta k}^{(2)}}{d\xi} \\ \frac{1}{\theta_{32}^2} \frac{d^2 \tilde{u}_{\theta k}^{(2)}}{d\xi^2} + \frac{2}{\theta_{32}} \frac{d\tilde{u}_{rk}^{(2)}}{d\xi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\theta_{21}} \frac{1+\nu^{(1)}}{1-\nu^{(1)}} \frac{d\tilde{u}_{\theta k}^{(1)}}{d\xi} + \frac{4}{1-\nu^{(1)}} \tilde{u}_{rk}^{(1)} \\ \frac{1}{\theta_{21}} \frac{1+\nu^{(1)}}{2} \frac{d\tilde{u}_{rk}^{(1)}}{d\xi} + (1-\nu^{(1)})\tilde{u}_{\theta k}^{(1)} \\ \frac{1}{\theta_{32}} \frac{1+\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)}} \frac{d\tilde{u}_{\theta k}^{(2)}}{d\xi} + \frac{4}{1-\nu^{(2)}} \tilde{u}_{rk}^{(2)} \\ \frac{1}{\theta_{32}} \frac{1+\nu^{(2)}}{2} \frac{d\tilde{u}_{rk}^{(2)}}{d\xi} + (1-\nu^{(2)})\tilde{u}_{\theta k}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\nu^{(1)}} \tilde{u}_{rk}^{(1)} \\ \frac{1-\nu^{(1)}}{2} \tilde{u}_{\theta k}^{(1)} \\ \frac{2}{1-\nu^{(2)}} \tilde{u}_{rk}^{(2)} \\ \frac{1-\nu^{(2)}}{2} \tilde{u}_{\theta k}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

图1 平面接头两自由楔边 Γ_1 和 Γ_3 上的面力为零, 则边界条件可表示为

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, \theta_1) = \sigma_{r\theta}^{(1)}(r, \theta_1) = 0, \quad (7a)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, \theta_3) = \sigma_{r\theta}^{(2)}(r, \theta_3) = 0. \tag{7b}$$

图 1 平面接头交界 Γ_2 上位移连续、面力相等, 则交界条件可由下式表示:

$$u_r^{(1)}(r, \theta_2) = u_r^{(2)}(r, \theta_2), \tag{8a}$$

$$u_\theta^{(1)}(r, \theta_2) = u_\theta^{(2)}(r, \theta_2), \tag{8b}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)}(r, \theta_2) = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(r, \theta_2), \tag{8c}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)}(r, \theta_2) = \sigma_{r\theta}^{(2)}(r, \theta_2). \tag{8d}$$

至此, 平面接头应力奇性指数的分析变成了求解在边界条件(7)和交界条件(8)下, ODEs(6) 的特征值问题. 这里, 运用 DQM 计算平面接头结构的应力奇性指数. 图 1 平面接头的两个楔形圆弧区间 $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ 和 $\theta_2 \leq \theta \leq \theta_3$ 上的离散单元总数皆为 N , 离散节点总数皆为 $N + 1$, 即 $\xi_j (0 \leq j \leq N)$, 其中 $\xi_0 = 0, \xi_N = 1$. 离散节点分布方式采用等步长均匀网格模式, 即

$$\xi_j = \frac{j}{N}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N. \tag{9}$$

DQM 的基本思想是: 将归一化的位移特征函数 $\tilde{u}_{rk}^{(m)}(\xi), \tilde{u}_{\theta k}^{(m)}(\xi) (0 \leq \xi \leq 1)$ 及其 r 阶导数在其求解域中任意离散节点上的近似值, 表示为所有离散节点上值的线性加权和. 即

$$\frac{\partial^r \tilde{u}_{rk}^{(m)}(\xi)}{\partial \xi^r} = \sum_{j=0}^N A_{ij}^{(r)} \tilde{u}_{rk}^{(m)}(\xi_j), \tag{10a}$$

$$\frac{\partial^r \tilde{u}_{\theta k}^{(m)}(\xi)}{\partial \xi^r} = \sum_{j=0}^N A_{ij}^{(r)} \tilde{u}_{\theta k}^{(m)}(\xi_j), \tag{10b}$$

式中, $A_{ij}^{(r)}$ 是 r 阶导数加权系数矩阵, $i, j = 0, 1, 2, \dots, N, r = 1, 2, \dots, N - 1$. 加权系数矩阵 $A_{ij}^{(r)}$ 可用一组递推公式计算获得^[19-22], 当 $i \neq j$ 时, 有

$$A_{ij}^{(r)} = r \left(A_{ii}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(r-1)}}{\xi_i - \xi_j} \right), \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N, r = 2, 3, \dots, N - 1; \tag{11}$$

当 $i = j$ 时, 有

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{j=0, j \neq i}^N A_{ij}^{(r)}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, r = 1, 2, \dots, N - 1. \tag{12}$$

一阶导数的加权系数矩阵 $A_{ij}^{(1)}$ 的表达式如下:

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{R^{(1)}(\xi_i)}{(\xi_i - \xi_j)R^{(1)}(\xi_j)}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, N, \tag{13}$$

式中, $R^{(1)}$ 为

$$R^{(1)}(\xi_k) = \prod_{j=0, j \neq k}^N (\xi_k - \xi_j). \tag{14}$$

将式(10)中表示的 DQM 规则应用于 ODEs(6), 从而得到关于平面接头应力奇性指数 λ_k 为特征值的一组代数方程组为

$$\hat{\mathbf{L}}\delta + \lambda_k \hat{\mathbf{M}}\delta + \lambda_k^2 \hat{\mathbf{N}}\delta = \mathbf{0}, \tag{15}$$

式中, δ 为关于归一化位移角函数 $\tilde{u}_{rk}^{(m)}(\xi)$ 和 $\tilde{u}_{\theta k}^{(m)}(\xi)$ 的未知特征向量, 即 $\delta = (\tilde{u}_{rk}^{(1)} \quad \tilde{u}_{\theta k}^{(1)} \quad \tilde{u}_{rk}^{(2)} \quad \tilde{u}_{\theta k}^{(2)})^T$, 矩阵向量 $\hat{\mathbf{L}}, \hat{\mathbf{M}}$ 和 $\hat{\mathbf{N}}$ 分别为

$$\hat{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{L}}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{L}}_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{M}}_{22} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{N}}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{N}}_{22} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

其中

$$\hat{L}_{11} = \begin{pmatrix} A_{ij}^{(2)} \frac{1}{\theta_{21}^2} & -A_{ij}^{(1)} \frac{2}{\theta_{21}} \\ A_{ij}^{(1)} \frac{2}{\theta_{21}} & A_{ij}^{(2)} \frac{1}{\theta_{21}^2} \end{pmatrix}, \hat{L}_{22} = \begin{pmatrix} A_{ij}^{(2)} \frac{1}{\theta_{32}^2} & -A_{ij}^{(1)} \frac{2}{\theta_{32}} \\ A_{ij}^{(1)} \frac{2}{\theta_{32}} & A_{ij}^{(2)} \frac{1}{\theta_{32}^2} \end{pmatrix}, \hat{M}_{11} = \begin{pmatrix} \frac{4}{1-\nu^{(1)}} & \frac{1}{\theta_{21}} \frac{1+\nu^{(1)}}{1-\nu^{(1)}} A_{ij}^{(1)} \\ \frac{1}{\theta_{21}} \frac{1+\nu^{(1)}}{2} A_{ij}^{(1)} & 1-\nu^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$\hat{M}_{22} = \begin{pmatrix} \frac{4}{1-\nu^{(2)}} & \frac{1}{\theta_{32}} \frac{1+\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)}} A_{ij}^{(1)} \\ \frac{1}{\theta_{32}} \frac{1+\nu^{(2)}}{2} A_{ij}^{(1)} & 1-\nu^{(2)} \end{pmatrix}, \hat{N}_{11} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\nu^{(1)}} & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu^{(1)}}{2} \end{pmatrix}, \hat{N}_{22} = \begin{pmatrix} \frac{2}{1-\nu^{(2)}} & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu^{(2)}}{2} \end{pmatrix}.$$

最后,再将边界条件(7)和交界条件(8)中关于 $E^{(m)}$ 和 $\nu^{(m)}$ 的常数表达式替换式(15)矩阵 \hat{L} , \hat{M} 和 \hat{N} 中相应的首行和末行.根据以上公式,笔者用 FORTRAN 语言编写了通用程序 DQMEI 用于 DQM 计算平面接头应力奇性指数 λ_k 及其相应的位移特征函数 $\tilde{u}_{ik}^{(m)}(\theta)$ 和应力特征函数 $\tilde{\sigma}_{ijk}^{(m)}(\theta)$.

2 数值算例及问题讨论

2.1 算例1:平面接头模型 1

图 2 为平面接头模型 1, $\alpha = 180^\circ$ 是一定值, β 角是变化的.考虑平面应变情况,并且假定两种材料的 Poisson 比 $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.2$;离散单元总数分别取 $N=4, 6, 8, 10, 12$,离散节点分布形式采用等步长均匀网格模式,运用 DQM 求解 ODEs(6)、边界条件(7)和交界条件(8),获得两相材料接头连接点处应力奇性指数随材料的弹性模量比值 $\eta = E^{(2)}/E^{(1)}$ 以及楔角 β 变化的计算值,如表 1~3 所示.从表 1~3 可知,在离散单元总数 $N=4$ 和 $N=6$ 时, DQM 计算值与实际值误差较大,随着 N 逐渐增加, DQM 计算值加速收敛.当 $N=12$ 时, DQM 计算值与文献 [14] 的计算结果至少有 5 位有效数字相同,表明了本文数值方法计算平面接头应力奇性指数的有效性和精确性.

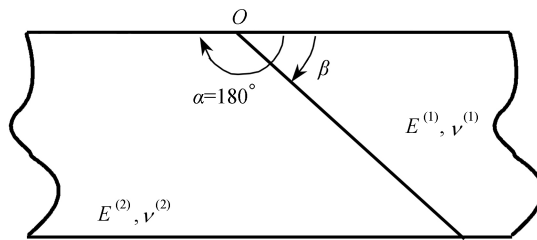


图 2 平面接头模型 1
Fig. 2 Plane junction model 1

表 1 $\eta = 3.0$ 时,平面接头模型 1 的第 1 阶应力奇性指数 λ_1 计算值随离散单元数 N 的变化
Table 1 Variation of the 1st-order stress singularity index of plane joint model 1 with number of discrete elements N for $\eta = 3.0$

$\beta/(\circ)$	$\eta = 3.0$					ref. [14]
	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$	$N = 10$	$N = 12$	
15	-0.142 935 841	-0.171 926 062	-0.172 359 547	-0.174 841 720	-0.174 843 563	-0.174 837
30	-0.172 189 244	-0.168 084 637	-0.168 357 284	-0.171 008 990	-0.171 010 442	-0.171 006
45	-0.120 351 300	-0.097 236 818	-0.097 575 977	-0.100 173 229	-0.100 174 236	-0.100 170
60	-0.042 900 476	-0.008 193 459	-0.008 995 020	-0.011 148 934	-0.011 150 916	-0.011 146
75	-0.039 048 671	-0.009 146 856	-0.011 225 252	-0.012 133 752	-0.012 128 895	-0.012 132
90	-0.072 175 519	-0.480 812 299	-0.050 550 470	-0.051 075 515	-0.051 073 963	-0.051 074

当 $\beta = 90^\circ$ 和 $\beta = 15^\circ$ 时,平面接头模型 1 连接点处应力奇性指数随材料的弹性模量比值 $\eta = E^{(2)}/E^{(1)}$ 的变化曲线如图 3、4 所示.本文 DQM 计算值与文献 [15] 的解析解及 Newton 迭代法计算结果一致,同时, DQM 计算结果还表明:图 3 中, $\beta = 90^\circ$, $0.001 \leq \eta \leq 10\ 000$ 时,接头仅存在一个实数奇性指数;图 4 中, $\beta = 15^\circ$, $0.001 < \eta \leq 1$ 时, $\text{Re } \lambda = 0$ 平面接头模型 1 连接点处无应力奇异性, $1 < \eta \leq 511.9$ 时,连接点处存在 1 个实数奇性指数, $511.9 < \eta \leq 851.3$ 时,连接点处存在 2 个实数奇性指数,尤其当 $851.3 < \eta \leq 10\ 000$ 时,由于材料的相互不匹

配性, 平面接头模型 1 连接点附近区域应力奇性指数是复数, 而不是实数, 产生振荡应力奇异性^[23].

表 2 $\eta = 4.0$ 时, 平面接头模型 1 的第 1 阶应力奇性指数 λ_1 计算值随离散单元数 N 的变化

Table 2 Variation of the 1st-order stress singularity index of plane joint model 1 with number of discrete elements N for $\eta = 4.0$

$\beta/(\circ)$	$\eta = 4.0$					ref. [14]
	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$	$N = 10$	$N = 12$	
15	-0.191 925 955	-0.214 512 897	-0.215 023 699	-0.217 433 336	-0.217 435 029	-0.217 430
30	-0.205 239 132	-0.198 498 506	-0.198 833 494	-0.201 426 794	-0.201 428 700	-0.201 424
45	-0.136 422 364	-0.112 082 716	-0.112 388 798	-0.115 019 309	-0.115 020 289	-0.115 016
60	-0.042 586 733	-0.006 382 054	-0.007 046 986	-0.009 334 714	-0.009 339 771	-0.009 332
75	-0.056 361 125	-0.029 365 948	-0.031 589 068	-0.032 355 253	-0.032 357 518	-0.032 354
90	-0.092 606 092	-0.071 003 905	-0.073 550 960	-0.073 999 146	-0.073 998 571	-0.073 998

表 3 $\eta = 5.0$ 时, 平面接头模型 1 的第 1 阶应力奇性指数 λ_1 计算值随离散单元数 N 的变化

Table 3 Variation of the 1st-order stress singularity index of plane joint model 1 with number of discrete elements N for $\eta = 5.0$

$\beta/(\circ)$	$\eta = 5.0$					ref. [14]
	$N = 4$	$N = 6$	$N = 8$	$N = 10$	$N = 12$	
15	-0.226 230 590	-0.244 514 386	-0.245 073 248	-0.247 438 211	-0.247 439 135	-0.247 435
30	-0.226 503 691	-0.218 078 739	-0.218 450 970	-0.221 009 453	-0.221 009 756	-0.221 006
45	-0.145 347 760	-0.120 250 154	-0.120 521 489	-0.123 186 475	-0.123 187 448	-0.123 183
60	-0.039 263 008	-0.001 610 141	-0.002 117 127	-0.004 559 442	-0.004 551 847	-0.004 556
75	-0.073 518 508	-0.049 300 481	-0.051 647 322	-0.052 291 762	-0.052 286 395	-0.052 290
90	-0.108 633 756	-0.088 879 155	-0.091 481 239	-0.091 875 053	-0.091 874 796	-0.091 874

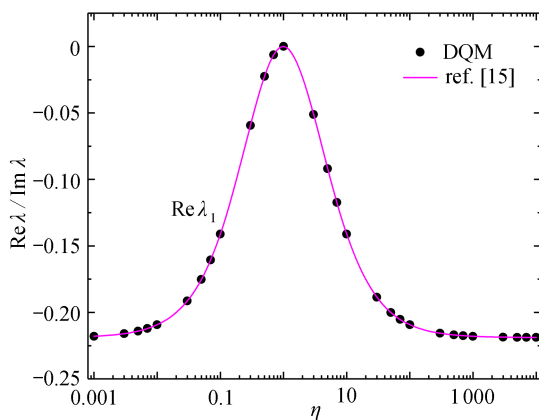


图 3 当 $\beta = 90^\circ$ 时, 平面接头模型 1 的应力奇性指数

Fig. 3 The singular index of stress in plane joint model 1 for $\beta = 90^\circ$

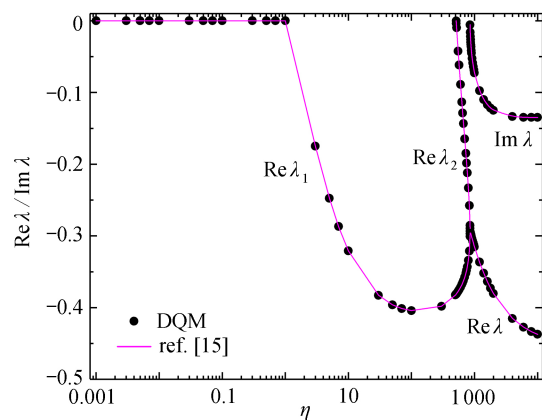


图 4 当 $\beta = 15^\circ$ 时, 平面接头模型 1 的应力奇性指数

Fig. 4 The singular index of stress in plane joint model 1 for $\beta = 15^\circ$

图 2 中, 在平面应变条件下, 当 $\beta = 90^\circ$ 、离散单元总数 $N=12$ 时, 在 $\eta = E^{(2)}/E^{(1)} = 0.01$ 和 $\eta = E^{(2)}/E^{(1)} = 0.1$ 两种情况下, 由本文 DQM 获得连接点处的第 1 阶应力奇性指数分别为 $\lambda_1 = -0.209 247 37$ 、 $\lambda_1 = -0.141 009 68$, 它们对应的位移特征函数和应力特征函数分布曲线如图 5、6 所示. 从计算结果中看出, 位移分量 $\bar{u}_r^{(m)}$ 和 $\bar{u}_\theta^{(m)}$ 在粘接界面上虽然连续, 位移特征函数曲线却出现转折, 两种材料的弹性模量相差越大, 转折越明显, 而且, 径向应力特征函数 $\bar{\sigma}_{rrk}^{(m)}$ 在粘接界面上出现突变, 弹性模量相差越大突变越激烈, 这就是接头连接点处发生开裂破坏的主要原因. 但是, 另外两个应力特征函数 $\bar{\sigma}_{r\theta k}^{(m)}$ 和 $\bar{\sigma}_{\theta\theta k}^{(m)}$ 在粘接界面上连续, 无明显的转折.

2.2 算例 2: 平面接头模型 2

图 7 为平面接头模型 2, 设交界面两侧分属不同的均质弹性体材料, 材料 Poisson 比为 $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.2$; $\alpha = 180^\circ$ 是一定值, β 角是变化的. 在平面应变条件下, 两个区间 $[-\alpha, 0^\circ]$ 和 $[0^\circ, \beta]$ 上离散单元总数取 $N=12$ 时, 由 DQM 计算获得以下结论: ① 如图 8 所示, 当 $\beta = 180^\circ$ 时, 平面接头模型 2 退化为双材料界面裂纹模型, 当

0.001 ≤ η ≤ 10 000时, 界面裂纹尖端应力奇性指数是一对复数, 实部值 Re λ = -0.5, 虚部值 Im λ 很小. ② 如图 9 所示, 当 β = 135° 和 0.17 < η < 2.82 时, 平面接头连接点处应力场存在 2 个实数奇性指数; 当 0.001 ≤ η ≤ 0.17 和 2.82 ≤ η ≤ 10 000 时, 平面接头连接点处为 2 个复数奇性指数, 产生振荡应力奇异性^[23]. 根据图 8、9 可知, 本文 DQM 计算值与文献 [15] 计算结果一致, 再次证明本文 DQM 对分析一般平面接头应力奇性指数是一种有效且准确的手段.

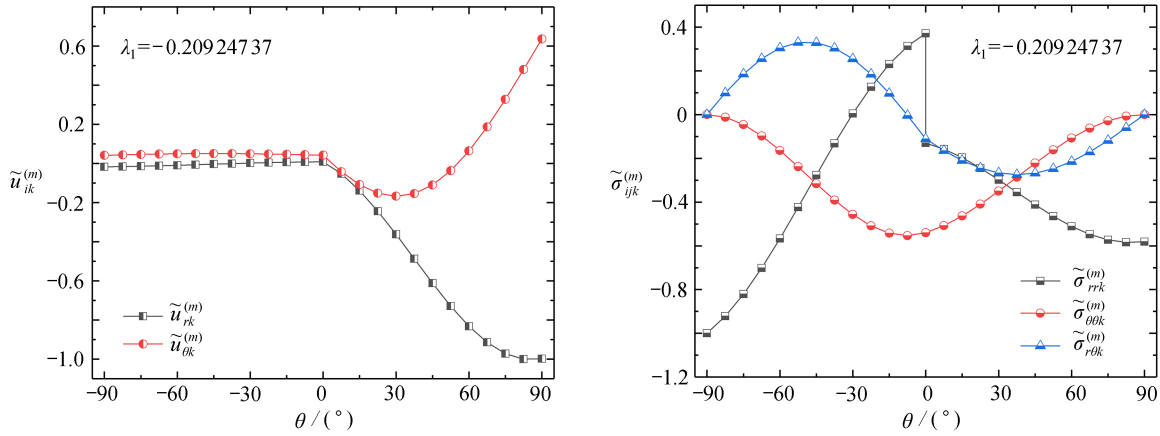


图 5 $E^{(2)}/E^{(1)} = 0.01$ 时, 平面接头模型 1 第 1 阶应力奇性指数 λ_1 对应的位移和应力特征函数曲线图

Fig. 5 Displacement and stress characteristic function curves corresponding to 1st-order stress singular index λ_1 of plane joint model 1 for $E^{(2)}/E^{(1)} = 0.01$

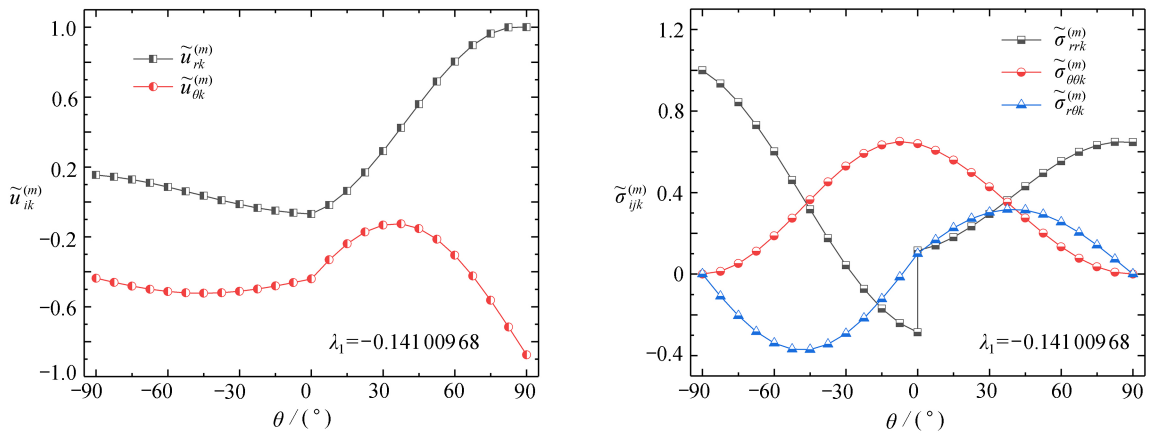


图 6 $E^{(2)}/E^{(1)} = 0.1$ 时, 平面接头模型 1 第 1 阶应力奇性指数 λ_1 对应的位移和应力特征函数曲线图

Fig. 6 Displacement and stress characteristic function curves corresponding to the 1st-order stress singular index λ_1 of plane joint model 1 for $E^{(2)}/E^{(1)} = 0.1$

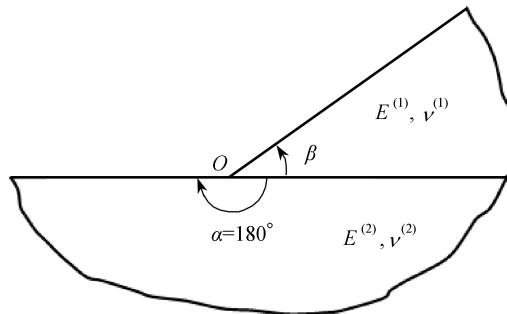


图 7 平面接头模型 2

Fig. 7 Plane junction model 2

图 7 中, 在平面应变条件下, 当 $\beta = 90^\circ$, $\eta = E^{(2)}/E^{(1)} = 3$ 时, 由本文 DQM 计算获得平面接头的前 2 阶应力奇性指数分别为 $\lambda_1 = -0.498 701 52$ 和 $\lambda_2 = -0.222 442 62$, 它们对应的位移和应力特征函数分布曲线如图 10、11 所示. 从图 11 中看出, 第 2 阶应力奇性指数 λ_2 对应的位移特征函数分布曲线 $\tilde{u}_{rk}^{(m)}$ 和 $\tilde{u}_{\theta k}^{(m)}$ 在粘接界面上连续且

转折, 径向应力特征函数分布曲线 $\tilde{\sigma}_{rrk}^{(m)}$ 在粘接界面上出现突变, 与图 10 第 1 阶应力奇异性指数 λ_1 对应的特征函数曲线分布规律一致。

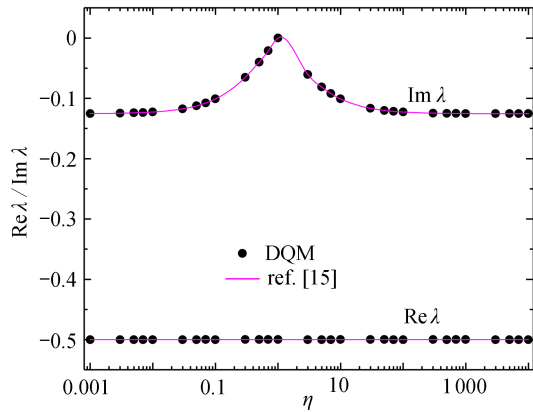


图 8 当 $\beta = 180^\circ$ 时, 平面接头模型 2 应力奇异性指数

Fig. 8 The singular index of stress in plane joint model 2 for $\beta = 180^\circ$

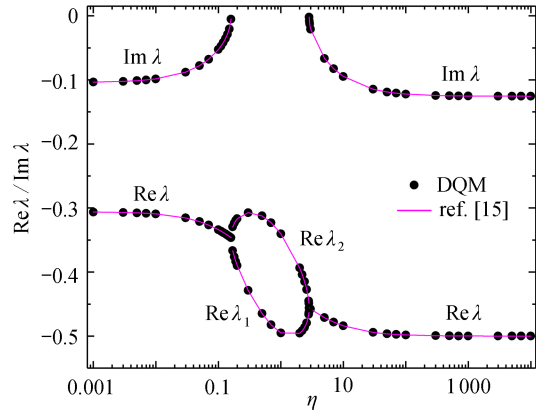


图 9 当 $\beta = 135^\circ$ 时, 平面接头模型 2 应力奇异性指数

Fig. 9 The singular index of stress in plane joint model 2 for $\beta = 135^\circ$

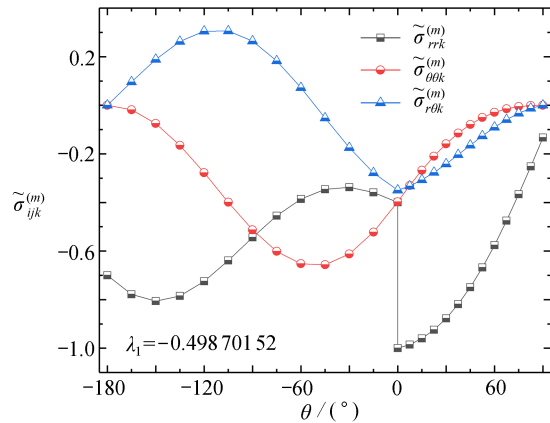
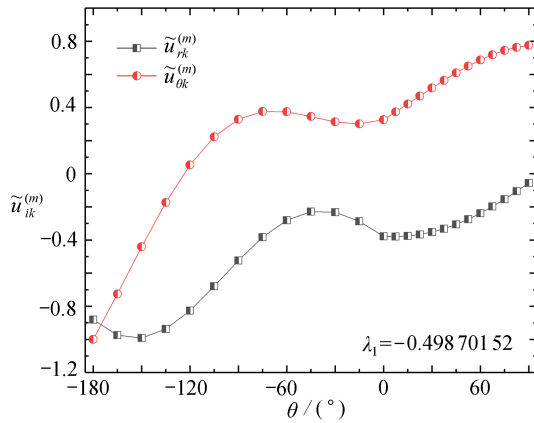


图 10 $E^{(2)}/E^{(1)} = 3$ 时, 平面接头模型 2 第 1 阶应力奇异性指数 λ_1 对应的位移和应力特征函数曲线图

Fig. 10 Displacement and stress characteristic function curves corresponding to the 1st-order stress singular index λ_1 of plane joint model 2 for $E^{(2)}/E^{(1)} = 3$

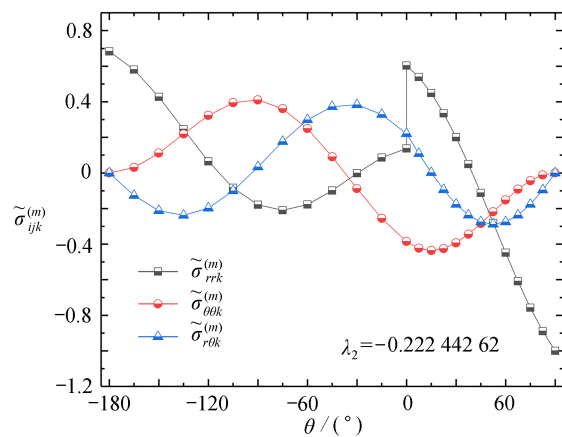
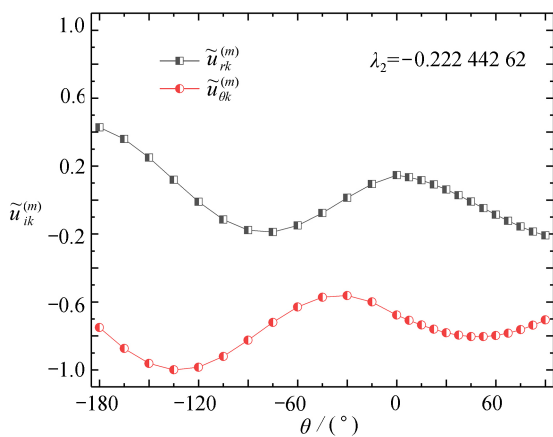


图 11 $E^{(2)}/E^{(1)} = 3$ 时, 平面接头模型 2 第 2 阶应力奇异性指数 λ_2 对应的位移和应力特征函数曲线图

Fig. 11 Displacement and stress characteristic function curves corresponding to the 2nd-order stress singular index λ_2 of plane joint model 2 for $E^{(2)}/E^{(1)} = 3$

2.3 算例3: 平面接头模型 3

图 12 为两个材料完全粘接在一起的平面接头模型 3, 其中材料 1 和材料 2 均为各向同性材料, 材料 Poisson 比为 $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.2$, $\alpha = 270^\circ$, $\beta = 90^\circ$. 在每个材料域上离散单元总数皆取 $N=12$ 时, 图 13 给出了

$\eta = E^{(2)}/E^{(1)}$ 从 0.001 至 10 000 时, DQM 计算的应力奇性指数的变化曲线, 表明了两相材料属性关系对奇异性应力状况的影响情况, 本文计算值与文献 [16] 的结果完全一致。

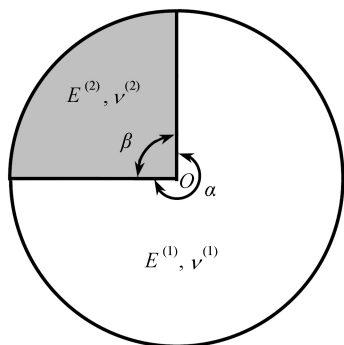


图 12 平面接头模型 3

Fig. 12 Plane junction model 3

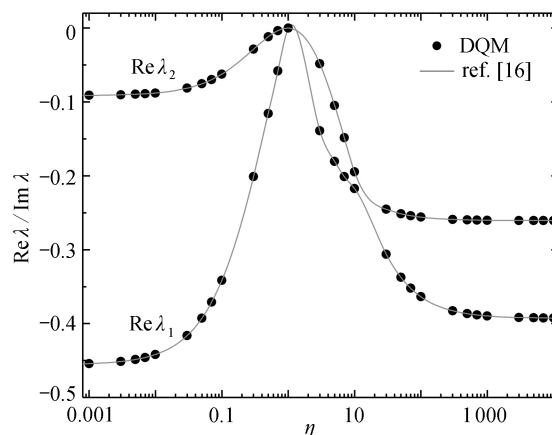


图 13 当 $\beta = 90^\circ$ 时, 平面接头模型 3 应力奇性指数

Fig. 13 The singular index of stress in plane joint model 3 for $\beta = 90^\circ$

3 结 论

DQM 在振动工程领域应用比较广泛, 主要用来求解结构的自然频率及振型, 本文创新性地将该法运用到弹性力学和工程断裂力学的研究领域. 基于平面接头连接点处位移场和应力场的 Williams 渐近展开式, 将其典型项代入平面问题平衡方程中, 将平面接头的线弹性理论微分方程转换成一类 ODEs 特征值问题, 根据 DQM 理论的计算列式, 用 FORTRAN 编制了一个新求解器 DQMEI 用于求解一般 ODEs 特征值问题. 最后应用 DQMEI 分析了平面接头的应力奇性指数, 同时, 也一并求出了平面接头连接点处对应的位移和应力特征函数, 这些特征函数在分析平面接头完整应力场和应力强度因子时是不可或缺的物理量. 文中给出数值算例的 DQM 计算值与已有文献结果完全一致, 证明了求解一般平面接头连接点处应力奇性指数时, DQM 是一种有效且准确的手段。

参考文献 (References):

- [1] LIU C I, CHUE C H. On the stress singularity of dissimilar anisotropic wedges and junctions in anti-plane shear[J]. *Composite Structures*, 2006, **73**(4): 432-442.
- [2] 张志春, 强洪夫, 周伟. 基于粘结界面的三维裂纹扩展研究[J]. *计算物理*, 2010, **27**(4): 586-592. (ZHANG Zhichun, QIANG Hongfu, ZHOU Wei. 3D crack propagation in cohesive zone models[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2010, **27**(4): 586-592. (in Chinese))
- [3] HEIN V L, ERDOGAN F. Stress singularities in a two-material wedge[J]. *International Journal of Fracture*, 1971, **7**: 317-330.
- [4] BOGY D B. On the problem of edgebonded elastic quarterplanes loaded at the boundary[J]. *International Journal of Solids & Structures*, 1970, **6**(9): 1287-1313.
- [5] BOGY D B. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1971, **38**(2): 377-386.
- [6] WILLIAMS M L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1952, **19**(4): 526-528.
- [7] ENGLAND A H. On stress singularities in linear elasticity[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1971, **9**(6): 571-585.
- [8] STERN M, SONI M L. On the computation of stress intensities at fixed-free corners[J]. *International Journal of Solids & Structures*, 1976, **12**(5): 331-337.
- [9] CARPENTER W C, BYERS C. A path independent integral for computing stress intensities for V-notched

- cracks in a bi-material[J]. *International Journal of Fracture*, 1987, **35**: 245-268.
- [10] PAGGI M, CARPINTERI A. On the stress singularities at multi-material interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2008, **61**(2): 1-22.
- [11] PICU C R, GUPTA V. Stress singularities at triple junctions with freely sliding grains[J]. *International Journal of Solids & Structures*, 1996, **33**(11): 1535-1541.
- [12] LIU X H, SUO Z, MA Q. Split singularities: stress field near the edge of a silicon die on a polymer substrate[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, **47**(1): 67-76.
- [13] BONIFACE V, SIMHA K R Y. Suppression of complex singularity using wedge interphase in interface fracture[J]. *International Journal of Solids and Structure*, 2001, **38**(30/31): 5411-5420.
- [14] 张金轮, 葛仁余, 韩有民, 等. 各向同性材料接头和界面相交裂纹应力奇异性特征分析[J]. *应用力学学报*, 2017, **34**(1): 14-19. (ZHANG Jinlun, GE Renyu, HAN Youmin, et al. Analysis of the stress singularity of the junctions and plane cracks terminating at the interface in bonded dissimilar isotropic materials[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2017, **34**(1): 14-19.(in Chinese))
- [15] SATOR C, BECKER W. Closed-form solutions for stress singularities at plane bi- and trimaterial junctions[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2012, **82**(5): 643-658.
- [16] CARPINTERI A, PAGGI M. Analytical study of the singularities arising at multi-material interfaces in 2D linear elastic problems[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2007, **74**(1/2): 59-74.
- [17] CHO S B, CARPENTER W C. The complex potential approach to power-logarithmic stress singularities for V-notched cracks in a bi-material[J]. *KSME International Journal*, 1999, **13**(1): 19-25.
- [18] BELLMAN R, CASTI J. Differential quadrature and long-term integration[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1971, **34**: 235-238.
- [19] BERT C W, WANG X, STRIZ A G. Differential quadrature for static and free vibration analysis of anisotropic plates[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1993, **30**(13): 1737-1744.
- [20] BERT C W, JANG S K, STRIZ A G. Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components[J]. *AIAA Journal*, 2015, **26**(5): 612-618.
- [21] LIEW K M, TEO T M, HAN J B. Three-dimensional static solutions of rectangular plates by variant differential quadrature method[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001, **43**(7): 1611-1628.
- [22] YANG J, KITIPORNCHAI S, LIEW K M. Non-linear analysis of thermos-electro-mechanical behavior of shear deformable FGM plates with piezoelectric actuators[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, **59**(12): 1605-1632.
- [23] 许金泉. 界面力学[M]. 1版. 北京: 科学出版社, 2006. (XU Jinquan. *The Mechanics of Interface*[M]. 1st ed. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese))