

双移动机械臂空间协作动力学建模研究

董方方, 喻斌, 赵晓敏, 陈珊

Dynamic Modeling of Spatial Cooperation Between Dual-Arm Mobile Manipulators

DONG Fangfang, YU Bin, ZHAO Xiaomin, and CHEN Shan

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420223>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于Udwadia-Kalaba方法的平面冗余并联机器人建模与轨迹跟踪控制

Modeling and Control of Planar Redundant Parallel Robots Based on the Udwadia-Kalaba Method

应用数学和力学. 2020, 41(11): 1183-1196 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400363>

基于Udwadia-Kalaba理论的Hamel嵌入法研究

Study on Hamel's Embedding Method via the Udwadia-Kalaba Theory

应用数学和力学. 2017, 38(6): 696-707 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370327>

机械多体系统动力学非线性最优控制问题的Noether理论

The Noether Theorem for Nonlinear Optimal Control Problems of Mechanical Multibody System Dynamics

应用数学和力学. 2018, 39(7): 776-784 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380295>

机械多体系统碰撞动力学的对称性和守恒量研究

Study on Symmetries and Conserved Quantities of Mechanical Multibody System Collision Dynamics

应用数学和力学. 2018, 39(11): 1292-1299 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380291>

基于Udwadia-Kalaba方法的并联机器人鲁棒伺服约束控制

Robust Servo Constrained Control of Parallel Robots Based on the Udwadia-Kalaba Method

应用数学和力学. 2021, 42(3): 264-274 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410197>

基于微分几何的蛇板系统动力学建模与运动规划

Dynamics Modeling and Motion Planning for Snakeboard Systems Based on Differential Geometry

应用数学和力学. 2018, 39(1): 29-40 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380107>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

双移动机械臂空间协作动力学建模研究*

董方方^{1,2}, 喻斌¹, 赵晓敏³, 陈珊¹

- (1. 合肥工业大学 机械工程学院, 合肥 230009;
2. 安徽省智能数控技术及装备工程实验室, 合肥 230009;
3. 合肥工业大学 汽车与交通工程学院, 合肥 230009)

摘要: 移动机械臂进行空间协作时会产生复杂的非线性耦合, 使得采用 Lagrange 方程或 Newton-Euler 法直接进行建模极为繁琐. 针对双移动机械臂空间协作问题, 提出了一种结合 Udwadia-Kalaba (U-K) 方法与 Lagrange 方程建立动力学模型的方法. 在建模过程中, 将负载简化为连杆, 选择负载中心断开的方式对系统进行分解, 从而避免了机械臂末端关节断开导致的末端关节转角与连杆转角的约束信息缺失问题; 将分割形成的两个子系统通过 Lagrange 方程进行建模, 得到了子系统的动力学模型; 再将协作系统的固有几何关系通过约束形式引入, 应用 U-K 方法得到了协作系统动力学模型, 减少了建立动力学模型所需要的计算量; 最后通过数值仿真验证了该方法所得到的动力学模型的准确性.

关键词: Udwadia-Kalaba 方法; 动力学建模; 协作机械臂; 移动机械臂

中图分类号: O313.3 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420223

Dynamic Modeling of Spatial Cooperation Between Dual-Arm Mobile Manipulators

DONG Fangfang^{1,2}, YU Bin¹, ZHAO Xiaomin³, CHEN Shan¹

- (1. School of Mechanical Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P.R.China;
2. Anhui Engineering Laboratory of Intelligent CNC Technology and Equipment, Hefei 230009, P.R.China;
3. School of Automotive and Transportation Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P.R.China)

Abstract: The complex nonlinear coupling in the spatial cooperation process of mobile manipulators, makes it extremely tedious to directly model the spatial cooperative systems with the Lagrange equation or the Newton-Euler method. A dynamic modeling method, combining the Udwadia-Kalaba (U-K) method with the Lagrange equation, was proposed for spatial cooperation of dual-arm mobile manipulators. The load was simplified as a connecting link during modeling. The load center was selected to be disconnected for decomposition, so that the lack of constraint information was avoided between the end joint angle and the end link angle caused by the disconnection of the manipulator end joint; the segmented 2 subsystems were modeled with the Lagrange equation, thus, the dynamic model for the subsystems was obtained. The inherent geometric relationships of the cooperative system were introduced in the form of constraints, and the U-K method

* 收稿日期: 2021-08-02; 修订日期: 2021-11-02

基金项目: 国家自然科学基金 (51905140); 安徽省自然科学基金 (2208085ME126)

作者简介: 董方方 (1988—), 男, 副教授, 硕士生导师 (E-mail: fangfangdong@hfut.edu.cn);

赵晓敏 (1986—), 女, 副教授, 硕士生导师 (通讯作者, E-mail: zhaoxiaomin@hfut.edu.cn).

引用格式: 董方方, 喻斌, 赵晓敏, 陈珊. 双移动机械臂空间协作动力学建模研究[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(8): 846-856.

was applied to obtain the dynamic model for the cooperative system. The computation for modeling was reduced. The numerical simulation verifies the accuracy of the model.

Key words: Udwadia-Kalaba method; dynamic modeling; cooperative manipulator; mobile manipulator

引 言

移动机械臂的多机协作系统可广泛应用于各种不同场合,如用于风电叶片、火箭壳体、高铁车厢等大尺寸零部件表面的抛磨加工、焊接,以及低刚度、低稳定性零件的搬运、装配等工作。双臂空间协作是多机协作中的典型案例,双臂相比于单臂,具有灵活、高效、相对低成本、高可靠性等诸多优点^[1],能够更好地模仿人类手臂的工作情况。Yan 等^[2]针对双机协作与单臂作业的差别与优势、协作机械臂的工作环境与资源冲突等诸多问题进行了具体的分析调研。对于需要大范围移动工作的情况,移动机械臂相比于传统的三坐标机械臂,占地面积更小,也更加灵活^[3],20 世纪 80 年代兴起的同步定位与建图技术,使得移动机器人在陌生环境中的适应性得到了极大提升^[4]。

协作机械臂的建模与控制问题受到了众多研究者的青睐,目前动力学建模常用的方法一般为 Lagrange 法^[5]与 Newton-Euler 法^[6],此外还有基于 Lagrange 乘子法的 Lie 群方法^[7]、Kane 方法^[8]等。Jorge 等^[9]提出了一种通过 Lagrange 法建立起单臂作业的动力学模型,再引入双臂协作搬运时关节变量的耦合约束,建立了双机协作搬运机械臂动力学模型的方法。Parra-Vega 等^[10]针对受约束协作多指抓取机器人,通过 Lagrange 法,建立了其摩擦模型与动力学模型。Flixeder 等^[11]针对协作搬运易形变材料的问题,分别针对易形变材料与协作机械臂两部分进行了研究并建立了交互模型。章定国^[12]在计算多杆机器人的动力学模型时采用将 Lagrange 方程与齐次变换矩阵相结合的方式,通过递推策略求得了结果。郭益深等^[13]结合 Lagrange 法与动量守恒理论,建立了双臂空间机器人的模型。Reza 等^[14]应用多个力传感器,提出了一种针对未知搬运物体的质心估测方法,将未知搬运物体固定在三个虚拟连杆上,并将连杆视作机械臂的一部分进行建模。

移动机械臂空间协作系统具有诸多优势,但由于其存在复杂的耦合关系,使得应用 Lagrange 法或 Newton-Euler 法直接进行动力学建模时的计算极为繁琐,应用 Lagrange 乘子法虽然计算结果的形式相对简洁,但建模思路抽象,且需要引入新的 Lagrange 乘子。Udwadia 与 Kalaba^[15-16]提出了一种全新的观点,称为 Udwadia-Kalaba(U-K)方法。他们将系统分割为若干子系统并建立动力学模型,通过 U-K 方程引入各子系统的固有几何约束,无需引入辅助变量即可构建复杂系统整体动力学方程,从而达到简化计算的目的。

已经有许多研究者基于 U-K 方法进行了探索。韩江等^[17]以平面 2 自由度冗余驱动并联机器人作为研究对象,将系统分解为三个无约束开链子系统,建立无约束子系统模型后再引入支链末端位置约束,利用 U-K 方法求取约束力建立起其动力学方程。Huang 等^[18]针对并联机械臂,应用 U-K 方法构建了其正逆动力学方程。韩江等^[19]提出了一种基于 U-K 方法的协作机械臂轨迹跟踪控制。刘佳等^[20]和 Zhen^[21]针对双机平面协作搬运问题,将系统从一条机械臂基座处断开,形成虚拟 5 自由度机械臂进行建模,再利用 U-K 方法引入基座约束建立了动力学模型。

目前基于 U-K 方法,针对协作双臂搬运系统建模问题,大多是基于平面动力学系统进行研究。本文结合 Lagrange 方法与 U-K 方法,建立了双移动机械臂空间协作搬运的动力学模型。由于本文的研究对象中存在移动平台,且平台底面必须始终与地面平行,故针对本文的研究对象,在建模过程中若直接采用文献 [20-21] 的方法,将机械臂末端连杆与旋转关节视作断开进行建模,虽然形成 5 自由度虚拟机械臂的方式同样易于理解,但会导致无法引入断开端基座电机转角与断开端连杆转角的约束,造成约束缺失,且非线性耦合严重,最终表达式极其繁琐。故本文提出了一种基于对称思路的建模方法,该方法将负载中心处视作断开,以将整体系统分割成两个子系统,两个子系统拥有高度对称的动力学模型特征与约束关系,因此只需要利用 Lagrange 方法对其中一个子系统进行建模,即可得出两个无约束子系统的动力学模型,再将固有几何约束与期望轨迹以约束形式给出,即可通过 U-K 方程建立起整体模型。该方法的对称建模思路,使得建立子系统动力学模型与约束方程时只需要考虑某一子系统即可得出整体方程,简化了建模所需计算量,同时也避免了约束信息缺失的问题,

且该方法探索了 U-K 方法在三维工作空间协作机械臂上的应用,将 U-K 方法针对双臂协作机器人的应用推广到了空间协作的情况.

1 应用 U-K 方法的一般步骤

U-K 方法在稳定无约束子系统的动力学方程的基础上,向子系统施加约束力,子系统同时受到平衡力与约束力的作用,使其稳定且始终满足给定的约束条件.根据 U-K 理论的一般应用方法^[22],建立具有 n 个自由度的动力学系统模型的步骤如下:

(I) 建立无约束系统动力学方程:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (1)$$

式中, t 为时间, \mathbf{M} 为系统的 $n \times n$ 维惯性矩阵, \mathbf{q} 为广义坐标, \mathbf{Q} 为施加在系统上的广义力.

(II) 建立约束方程 $\Phi_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$, 对于显含 $\dot{\mathbf{q}}$ 的非完整约束进行一次求导, 对不显含 $\dot{\mathbf{q}}$ 的完整约束进行二次求导, 得到约束方程的二阶标准微分形式:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (2)$$

式中, \mathbf{A} 为 $m \times n$ 维矩阵, \mathbf{b} 为 m 维向量.

(III) 计算约束力, 受约束系统动力学方程为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{Q}^c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (3)$$

$$\mathbf{Q}^c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{M}^{1/2}(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2})^+(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}), \quad (4)$$

式中, \mathbf{Q}^c 为约束力, 上标 “+” 表示矩阵的 Moore-Penrose 广义逆矩阵.

对于一般的机械系统, 现提出如下假设.

假设 1 对于任意 $\mathbf{q} \in R^n$, 总有 $|\mathbf{M}(\mathbf{q})| > 0$ ^[23].

假设 2 对于任意 $\mathbf{q} \in R^n$, 矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 的秩 $\text{rank}(\mathbf{A}) \geq 1$.

本条假设也保证了矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ 的 Moore-Penrose 广义逆矩阵存在且唯一.

假设 3 对于任意初始条件 $\mathbf{q} \in R^n$ 均满足约束方程 $\Phi_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$, 且约束连续.

2 双移动机械臂空间协作搬运建模

单个移动机械臂由四自由度机械臂与移动平台构成, 移动平台使用全向轮或 Mecanum 轮, 可实现平面全向移动, 机械臂拥有四个旋转关节, 如图 1 所示.

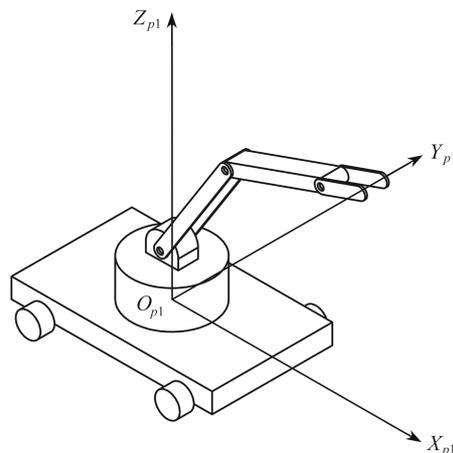


图 1 移动机械臂示意图

Fig. 1 The schematic of the mobile manipulator

建立如图 1、2 所示的空间直角坐标系. 以旋转关节 m_{r1} 与 m_{r2} 下表面圆心处建立坐标系 $O_{p1}X_{p1}Y_{p1}Z_{p1}$ 与 $O_{p2}X_{p2}Y_{p2}Z_{p2}$, Z_{p1} 与 Z_{p2} 轴垂直于移动平台上表面向上, X_{p1} 与 X_{p2} 轴平行于移动平台上表面指向平台前端(如图 2

所示), 并依据右手定则确定 Y_{p1} 与 Y_{p2} 轴. 以初始位置处的机器人坐标系确定世界坐标系 $O_w X_w Y_w Z_w$.

图 2 中部件 m_3 与 m_6 为机械臂末端负载, 可简化为连杆, 并假想该连杆中心处分离进行建模, 图中变量 Δx_i 和 Δy_i 分别表示平台 i 在 X_w 和 Y_w 方向的位移, 变量 δ_i 和 θ_i 分别表示旋转关节 i 和连杆 i 的转角, 变量 F_{xi} 和 F_{yi} 分别表示平台 i 在 X_w 和 Y_w 方向受到的驱动力, 变量 τ_i 和 u_i 分别表示旋转关节 i 和连杆 i 的扭矩, 物理量 m_i, I_i, l_i 分别表示部件 i 的质量、转动惯量和长度, Δz 表示两移动平台高度差.

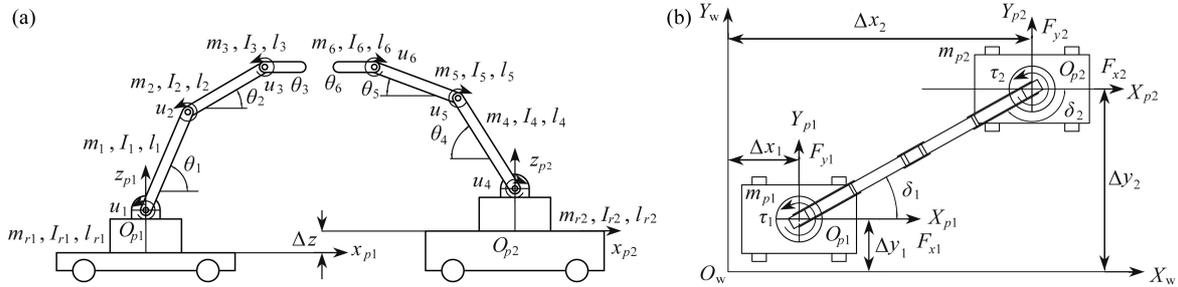


图 2 双移动机械臂空间协作系统示意图: (a) 主视图; (b) 俯视图

Fig. 2 The schematic of dual-system cooperative handling mobile manipulators: (a) the main view; (b) the vertical view

2.1 无约束子系统动力学方程的建立

在此动力学系统中, 每个移动机械臂具有 6 个自由度, 包含了与移动平台相连接的关节转动. 由于移动平台采用全向轮或 Mecanum 轮, 在实际搬运过程中给定运动轨迹后, 移动平台的转动并不会对搬运过程造成影响. 为简化计算, 本文暂不考虑移动平台的整体转动. 在不考虑约束条件下, 该动力学系统共有 12 个自由度, 需要 12 个状态变量进行描述, 选择广义坐标 $q = [\Delta x_1, \Delta y_1, \delta_1, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \Delta x_2, \Delta y_2, \delta_2, \theta_4, \theta_5, \theta_6]^T$, 对该动力学系统施加外力 $\tau = [F_{x1}, F_{y1}, \tau_1, u_1, u_2, u_3, F_{x2}, F_{y2}, \tau_2, u_4, u_5, u_6]^T$.

与文献 [18-19] 中末端关节与连杆处断开方式相比, 选择负载中心处断开的方式具有如下优势: 第一, 两子系统动力学特性相同, 故只需要针对某一子系统进行建模, 即只需建立起无约束 6 自由度子系统模型, 形式相对简洁. 若在本文研究对象中采用文献 [18-19] 所用方法, 虽然方法与形式上同样易于理解, 但需要建立起一个 3 自由度模型(移动平台 + 旋转关节)与一个 8 自由度模型(移动平台 + 6 自由度虚拟机械臂). 其中, 8 自由度模型计算量大且形式极其繁琐. 第二, 若文献 [18-19] 的方法应用在本文的研究对象上, 会导致难以引入断开端基座电机转角与断开端连杆转角的约束, 导致约束缺失. 选择负载中心处断开则无需考虑该约束.

采用 Lagrange 方法, 对图 2 中左半子系统进行建模. 由文献 [24] 可知, 对有 n 个自由度的一般系统应用 Lagrange 方程进行建模, 可得到一般形式的动力学模型. 其中惯性矩阵 $M \in R^{12 \times 12}$ 的计算方式如下:

$$M = \sum_{k=1}^n (m_k J_v^{(k)T} J_v^{(k)} + J_\omega^{(k)T} I_k J_\omega^{(k)}), \tag{5}$$

式中, $J_v^{(k)}$ 和 $J_\omega^{(k)}$ 为机构 k 线速度和角速度对应的 Jacobi 矩阵.

首先计算各部分速度的 Jacobi 矩阵, 可知

$$v_k = \sum_{j=1}^n J_{vj}^{(k)} \dot{q}_j = J_v^{(k)} \dot{q}, \tag{6}$$

$$\omega_k = \sum_{j=1}^n J_{\omega j}^{(k)} \dot{q}_j = J_\omega^{(k)} \dot{q}, \tag{7}$$

式中, v_k 和 ω_k 分别为机构 k 质心处的线速度与角速度, $J_{vj}^{(k)}$ 和 $J_{\omega j}^{(k)}$ 分别为矩阵 $J_v^{(k)}$ 和 $J_\omega^{(k)}$ 的第 j 列.

计算得各部件质心处线速度, 由式 (6) 计算可得 Jacobi 矩阵 J_v , 左半子系统矩阵 J_{vL} 如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{v1}^{(v1)} = \mathbf{J}_{v1}^{(r1)} = \mathbf{J}_{v1}^{(i)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_{v2}^{(v1)} = \mathbf{J}_{v2}^{(r1)} = \mathbf{J}_{v2}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_{v3}^{(i)} = \begin{bmatrix} -\left(\sum_{k=1}^i \hat{c}_k - \hat{c}_i/2\right) \sin \delta_1 \\ \left(\sum_{k=1}^i \hat{c}_k - \hat{c}_i/2\right) \cos \delta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}_{v4}^{(1)} &= \begin{bmatrix} -\hat{s}_1 \cos(\delta_1/2) \\ -\hat{s}_1 \sin(\delta_1/2) \\ \hat{c}_1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_{v5}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\hat{s}_2 \cos(\delta_1/2) \\ -\hat{s}_2 \sin(\delta_1/2) \\ \hat{c}_2/2 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_{v6}^{(3)} = \begin{bmatrix} -\hat{s}_3 \cos(\delta_1/2) \\ -\hat{s}_3 \sin(\delta_1/2) \\ \hat{c}_3/2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}_{v4}^{(2)} = \mathbf{J}_{v4}^{(3)} &= \begin{bmatrix} -\hat{s}_1 \cos \delta_1 \\ -\hat{s}_1 \sin \delta_1 \\ \hat{c}_1 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_{v5}^{(3)} = \begin{bmatrix} -\hat{s}_2 \cos \delta_1 \\ -\hat{s}_2 \sin \delta_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

式中, $\hat{s}_i := l_i \sin \theta_i$, $\hat{c}_i := l_i \cos \theta_i$ ($i = 1, 2, 3$), $\mathbf{J}_v^{(v1)}$, $\mathbf{J}_v^{(r1)}$, $\mathbf{J}_v^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) 分别为移动平台 v_1 , r_1 及连杆 i 对应的线速度 Jacobi 矩阵.

同理, 可得到各部件质心处角速度, 由式 (7) 计算可得 Jacobi 矩阵 \mathbf{J}_ω , 左半子系统矩阵 \mathbf{J}_{vL} 如下:

$$\mathbf{J}_{\omega3}^{(1)} = \mathbf{J}_{\omega3}^{(2)} = \mathbf{J}_{\omega3}^{(3)} = \mathbf{J}_{\omega3}^{(r1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{J}_{\omega4}^{(1)} = \mathbf{J}_{\omega5}^{(2)} = \mathbf{J}_{\omega6}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

同理, 可得矩阵 $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in R^{12}$ 的计算方式如下:

$$\mathbf{G}_i = -\sum_{k=1}^n m_k \mathbf{g}^T \mathbf{J}_{vi}^{(k)}, \quad (8)$$

式中, \mathbf{G}_i 为矩阵 \mathbf{G} 的第 i 个元素, \mathbf{g} 为广义坐标下的重力加速度.

机械臂在转动时会受到向心力与 Coriolis 力, 可统一表示为 $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in R^{12}$, 其中 $\mathbf{C} \in R^{12 \times 12}$. 向量 $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ 是唯一确定的, 但矩阵 \mathbf{C} 并不唯一. 可以将矩阵 $\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}$ 规范为反对称矩阵, 以此确定矩阵 \mathbf{C} ^[25], 得到矩阵 \mathbf{C} 的计算公式如下:

$$C_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k, \quad (9)$$

式中, C_{ij} 为矩阵 \mathbf{C} 的第 (i, j) 个元素, M_{ij} 为矩阵 \mathbf{M} 的第 (i, j) 个元素.

由式 (5)、(8)、(9) 计算可得左半子系统矩阵 $\mathbf{M}_L, \mathbf{G}_L, \mathbf{C}_L$ 与右半子系统矩阵 $\mathbf{M}_R, \mathbf{G}_R, \mathbf{C}_R$. $\mathbf{M}_L, \mathbf{G}_L, \mathbf{C}_L$ 的具体计算结果见附录.

至此, 可得子系统形式的一般动力学方程:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}, t) = \boldsymbol{\tau}. \quad (10)$$

将其变化为式 (1) 所示形式, 可得

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (11)$$

式中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_L & \\ & \mathbf{M}_R \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_L & \\ & \mathbf{C}_R \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_L \\ \mathbf{G}_R \end{bmatrix}, \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}(\mathbf{q}).$$

2.2 约束方程的建立

假定机械臂进行水平搬运, 假想断开连杆实际为一整体, 故假想末端 x, y, z 坐标应重合, 且转角 δ_1, δ_2 及 θ_3, θ_6 应满足物理结构约束条件. 对位置所进行的约束, 要求断开处时刻保持位置相同, 实际上已经隐含了对速度和加速度的约束 (将位置约束求一阶导数即为对速度的约束, 求二阶导即为加速度约束), 因此无需额外考虑对速度与加速度进行额外的约束. 由于采用负载中心处进行断开的方法, 因此也无需考虑连杆转角与关节转角之间的约束关系, 避免了约束信息缺失. 由此, 建立以下约束方程组:

$$\begin{cases} \Delta x_1 + \hat{k}_1 \cos \delta_1 = \Delta x_2 + \hat{k}_2 \cos \delta_2, \\ \Delta y_1 + \hat{k}_1 \sin \delta_1 = \Delta y_2 + \hat{k}_2 \sin \delta_2, \\ l_{r1} + \hat{\rho}_1 = l_{r2} + \hat{\rho}_2 + \Delta z, \\ \delta_1 - \delta_2 = \pi, \\ \theta_3 = 0, \\ \theta_6 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

显然该约束为完整约束, 将约束方程 (12) 对时间 t 求二阶导数, 得到

$$\begin{cases} \Delta \ddot{x}_1 + (2\hat{\zeta}_1 - \hat{k}_1 \ddot{\delta}_1) \sin \delta_1 - (\hat{\psi}_1 + \hat{s}_1 \ddot{\theta}_1 + \hat{s}_2 \ddot{\theta}_2 + \hat{s}_3 \ddot{\theta}_3 + \hat{k}_1 \ddot{\delta}_1^2) \cos \delta_1 = \\ \Delta \ddot{x}_2 + (2\hat{\zeta}_2 - \hat{k}_2 \ddot{\delta}_2) \sin \delta_2 - (\hat{\psi}_2 + \hat{s}_4 \ddot{\theta}_4 + \hat{s}_5 \ddot{\theta}_5 + \hat{s}_6 \ddot{\theta}_6 + \hat{k}_2 \ddot{\delta}_2^2) \cos \delta_2, \\ \Delta \ddot{y}_1 - (2\hat{\zeta}_1 - \hat{k}_1 \ddot{\delta}_1) \cos \delta_1 - (\hat{\psi}_1 + \hat{s}_1 \ddot{\theta}_1 + \hat{s}_2 \ddot{\theta}_2 + \hat{s}_3 \ddot{\theta}_3 + \hat{k}_1 \ddot{\delta}_1^2) \sin \delta_1 = \\ \Delta \ddot{y}_2 - (2\hat{\zeta}_2 - \hat{k}_2 \ddot{\delta}_2) \cos \delta_2 - (\hat{\psi}_2 + \hat{s}_4 \ddot{\theta}_4 + \hat{s}_5 \ddot{\theta}_5 + \hat{s}_6 \ddot{\theta}_6 + \hat{k}_2 \ddot{\delta}_2^2) \sin \delta_2, \\ \hat{c}_1 \ddot{\theta}_1 + \hat{c}_2 \ddot{\theta}_2 + \hat{c}_3 \ddot{\theta}_3 - \hat{\gamma}_1 = \hat{c}_4 \ddot{\theta}_4 + \hat{c}_5 \ddot{\theta}_5 + \hat{c}_6 \ddot{\theta}_6 - \hat{\gamma}_2, \\ \ddot{\delta}_1 - \ddot{\delta}_2 = 0, \\ \ddot{\theta}_3 = 0, \\ \ddot{\theta}_6 = 0, \end{cases} \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_1 &:= \hat{s}_1 + \hat{s}_2 + \hat{s}_3, \quad \hat{\rho}_2 := \hat{s}_4 + \hat{s}_5 + \hat{s}_6, \quad \hat{k}_1 := \hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3, \quad \hat{k}_2 := \hat{c}_4 + \hat{c}_5 + \hat{c}_6, \quad \hat{\zeta}_1 := (\hat{s}_1 \dot{\theta}_1 + \hat{s}_2 \dot{\theta}_2 + \hat{s}_3 \dot{\theta}_3) \dot{\delta}_1, \\ \hat{\zeta}_2 &:= (\hat{s}_4 \dot{\theta}_4 + \hat{s}_5 \dot{\theta}_5 + \hat{s}_6 \dot{\theta}_6) \dot{\delta}_2, \quad \hat{\psi}_1 := \hat{c}_1 \dot{\theta}_1^2 + \hat{c}_2 \dot{\theta}_2^2 + \hat{c}_3 \dot{\theta}_3^2, \quad \hat{\psi}_2 := \hat{c}_4 \dot{\theta}_4^2 + \hat{c}_5 \dot{\theta}_5^2 + \hat{c}_6 \dot{\theta}_6^2, \quad \hat{\gamma}_1 := \hat{s}_1 \dot{\theta}_1^2 + \hat{s}_2 \dot{\theta}_2^2 + \hat{s}_3 \dot{\theta}_3^2, \\ \hat{\gamma}_2 &:= \hat{s}_4 \dot{\theta}_4^2 + \hat{s}_5 \dot{\theta}_5^2 + \hat{s}_6 \dot{\theta}_6^2. \end{aligned}$$

将约束方程二阶导数写成式 (2) 所示形式, 可得

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (14)$$

矩阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{b} 的具体计算结果如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\hat{k}_1 \sin \delta_1 & -\hat{s}_1 \cos \delta_1 & -\hat{s}_2 \cos \delta_1 & -\hat{s}_3 \cos \delta_1 & -1 & 0 & \hat{k}_2 \sin \delta_2 & \hat{s}_4 \cos \delta_2 & \hat{s}_5 \cos \delta_2 & \hat{s}_6 \cos \delta_2 \\ 0 & 1 & \hat{k}_1 \cos \delta_1 & -\hat{s}_1 \sin \delta_1 & -\hat{s}_2 \sin \delta_1 & -\hat{s}_3 \sin \delta_1 & 0 & -1 & -\hat{k}_2 \cos \delta_2 & \hat{s}_4 \sin \delta_2 & \hat{s}_5 \sin \delta_2 & \hat{s}_6 \sin \delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{c}_1 & \hat{c}_2 & \hat{c}_3 & 0 & 0 & 0 & -\hat{c}_4 & -\hat{c}_5 & -\hat{c}_6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} (\hat{\psi}_1 + \hat{k}_1 \dot{\delta}_1^2) \cos \delta_1 - (\hat{\psi}_2 + \hat{k}_2 \dot{\delta}_2^2) \cos \delta_2 - 2\hat{\zeta}_1 \sin \delta_1 + 2\hat{\zeta}_2 \sin \delta_2 \\ (\hat{\psi}_1 + \hat{k}_1 \dot{\delta}_1^2) \sin \delta_1 - (\hat{\psi}_2 + \hat{k}_2 \dot{\delta}_2^2) \sin \delta_2 - 2\hat{\zeta}_2 \cos \delta_2 + 2\hat{\zeta}_1 \cos \delta_1 \\ \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

至此已经得到矩阵 $\mathbf{M}, \mathbf{A}, \mathbf{Q}$ 与向量 \mathbf{b} , 根据式 (4) 计算得约束力 \mathbf{Q}^c :

$$\mathbf{Q}^c = \mathbf{M}^{1/2} (\mathbf{A} \mathbf{M}^{-1/2})^+ (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}). \quad (17)$$

求得的约束力 \mathbf{Q}^c 为系统受到约束 (12) 时产生的力, 在无约束子系统的动力学方程 (11) 的右侧添加求得的约束力, 使得两个子系统始终满足约束 (12), 从而得到协作系统动力学方程:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{Q}^c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (18)$$

从以上建模过程中可以看出, 采用 U-K 方法建模, 不需要引入 Lagrange 乘子或者辅助变量, 得到的是约束力的解析解, 并且求解过程相对简洁.

3 数值仿真分析

本节将通过仿真软件进行数值仿真, 以检验模型的准确性. 为了验证模型的准确性, 需要验证两假想断

开末端是否始终重合, δ_1, δ_1 及 θ_3, θ_6 是否符合约束 (12). 为此, 假想断开连杆左端添加期望轨迹约束:

$$\begin{cases} \Delta x_1 + \hat{k}_1 \cos \delta_1 = 0, \\ \Delta y_1 + \hat{k}_1 \sin \delta_1 = 0.5 - 0.5 \cos(\pi t) + y_i, \\ l_{r1} + \hat{\rho}_1 = 0.5 - 0.5 \cos(\pi t) + z_i, \\ \Delta x_1 = 0, \\ \Delta x_2 = 0, \\ \delta_1 = 0, \end{cases} \quad (19)$$

式中, x_i, y_i, z_i 为机械臂末端初始位置的坐标常量.

求二阶导数得

$$\begin{cases} \Delta \ddot{x}_1 - (\hat{\psi}_1 + \hat{s}_1 \ddot{\theta}_1 + \hat{s}_2 \ddot{\theta}_2 + \hat{s}_3 \ddot{\theta}_3 + \hat{k}_1 \delta_1^2) \cos \delta_1 + (2\hat{z}_1 - \hat{k}_1 \ddot{\delta}_1) \sin \delta_1 = 0, \\ \Delta \ddot{y}_1 - (\hat{\psi}_1 + \hat{s}_1 \ddot{\theta}_1 + \hat{s}_2 \ddot{\theta}_2 + \hat{s}_3 \ddot{\theta}_3 + \hat{k}_1 \delta_1^2) \sin \delta_1 - (2\hat{z}_1 - \hat{k}_1 \ddot{\delta}_1) \cos \delta_1 = 0.5 \pi^2 \cos(\pi t), \\ \hat{c}_1 \ddot{\theta}_1 + \hat{c}_2 \ddot{\theta}_2 + \hat{c}_3 \ddot{\theta}_3 - \hat{\gamma}_1 = 0.5 \pi^2 \cos(\pi t), \\ \Delta \ddot{x}_1 = 0, \\ \Delta \ddot{x}_2 = 0, \\ \ddot{\delta}_1 = 0. \end{cases} \quad (20)$$

可得矩阵 A_t 与 b_t :

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\hat{k}_1 \sin \delta_1 & -\hat{s}_1 \cos \delta_1 & -\hat{s}_2 \cos \delta_1 & -\hat{s}_3 \cos \delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \hat{k}_1 \cos \delta_1 & -\hat{s}_1 \sin \delta_1 & -\hat{s}_2 \sin \delta_1 & -\hat{s}_3 \sin \delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{c}_1 & \hat{c}_2 & \hat{c}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$b_t = \begin{bmatrix} (\hat{\psi}_1 + \hat{k}_1 \delta_1^2) \cos \delta_1 - 2\hat{z}_1 \sin \delta_1 \\ (\hat{\psi}_1 + \hat{k}_1 \delta_1^2) \sin \delta_1 + 2\hat{z}_1 \cos \delta_1 + 0.5 \pi^2 \cos(\pi t) \\ \hat{\gamma}_1 + 0.5 \pi^2 \cos(\pi t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

将矩阵 A_t 与 b_t 和约束 (12) 所求得的约束矩阵 A 与 b 合并, 得到新的约束矩阵 $\hat{A} = [A \quad A_t]^T$, $\hat{b} = [b \quad b_t]^T$, 代入系统动力学模型 $M(q, t)\ddot{q} = Q(q, \dot{q}, t) + Q^c(q, \dot{q}, t)$ 中进行数值仿真.

动力学系统中的参数 m_i, I_i, l_i 为常数, 与系统物理特性有关, 可通过测量与计算得出, 仿真所用相应参数见表 1.

表 1 系统动力学参数表

Table 1 Dynamic parameters of system

| object | mass m/kg | moment of inertia $I/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$ | length l/m |
|-----------------------|-----------------------|---|------------------------|
| mobile platform v_1 | 50 | 0 | 0 |
| joint r_1 | 2 | 0.062 5 | 0.5 |
| link 1 | 3 | 0.490 0 | 0.7 |
| link 2 | 4 | 0.855 0 | 0.8 |
| link 3 | 1 | 0.080 0 | 0.4 |
| mobile platform v_2 | 50 | 0 | 0 |
| joint r_2 | 2 | 0.062 5 | 0.5 |
| link 4 | 3 | 0.490 0 | 0.7 |
| link 5 | 4 | 0.855 0 | 0.8 |
| link 6 | 1 | 0.080 0 | 0.4 |

此外, 我们还需要知道系统的初始位置信息与初始速度和加速度信息, 且初始状态必须满足约束条件 (12), 给定如下初始位置、速度与加速度: $q = [0 \ 0 \ 0 \ \pi/2 \ -\pi/3 \ 0 \ 1.6 \ 0 \ -\pi \ \pi/2 \ -\pi/3 \ 0]^T$, $\dot{q} = \mathbf{0}, \ddot{q} = \mathbf{0}$, 取 $g = [0 \ 0 \ 9.8]^T$, 给定任意初值 τ , 图 3~6 为仿真结果.

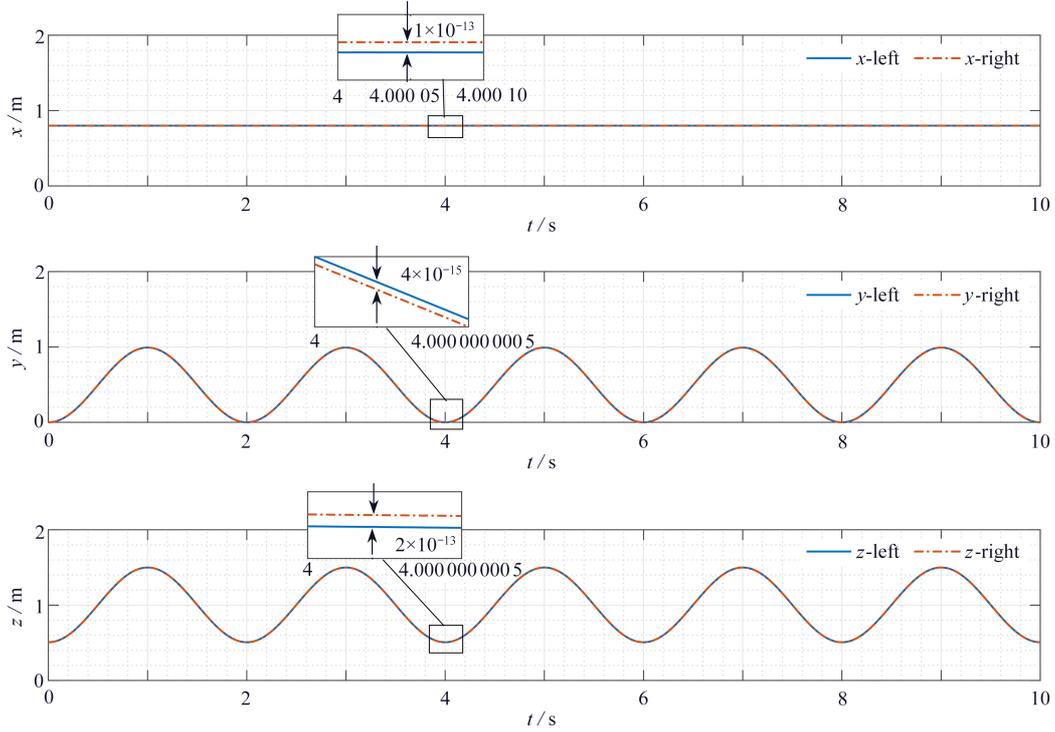


图 3 断开处轨迹示意图

Fig. 3 Trajectories at disconnection points

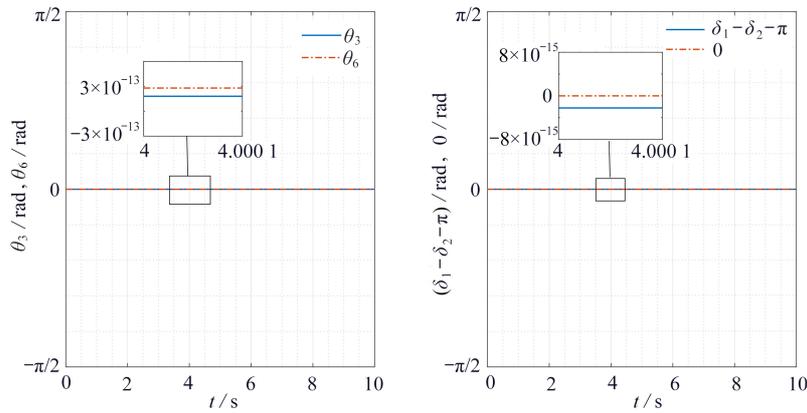


图 4 关节角度约束示意图

Fig. 4 Joint angle constraints

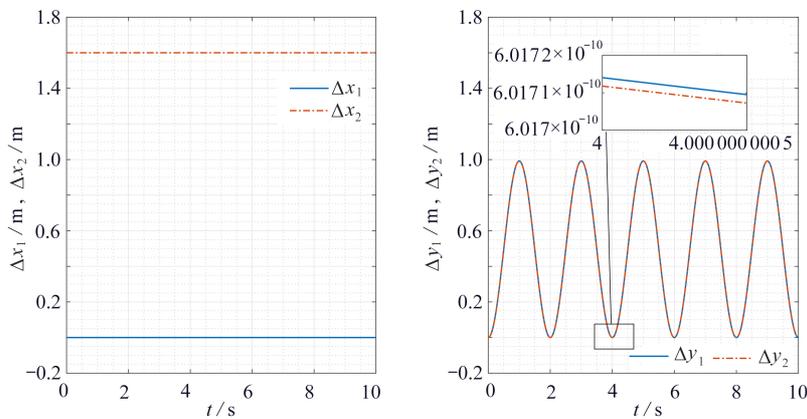


图 5 移动平台位移示意图

Fig. 5 Displacements of mobile platforms

图3中 x, z 方向误差量级为 10^{-13} , y 方向误差量级为 10^{-15} , 可视作负载断开处运动时基本重合, x 方向无位移, y, z 方向做周期往复运动, 满足固有几何约束及给定运动约束. 图4中 θ_3 与 θ_6 误差量级为 10^{-13} , δ_1 与 δ_2 方向误差量级为 10^{-15} , 可视作满足固有几何约束. 移动平台在 x 方向保持静止, 在 y 方向做周期往复运动, 满足给定运动约束, 机械臂关节转角在满足约束的条件下做周期运动. 仿真结果表明该方法构建的空间协作动力学模型准确可用.

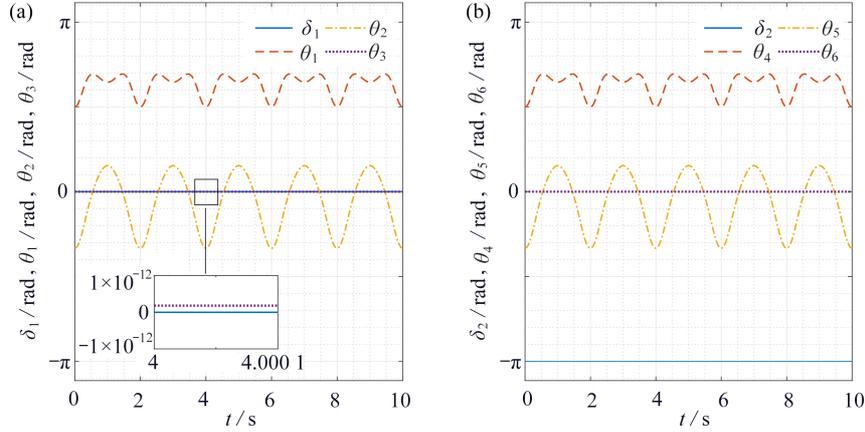


图6 子系统转角示意图: (a) 左半子系统; (b) 右半子系统

Fig. 6 Rotation angles of subsystems: (a) the left subsystem; (b) the right subsystem

4 结 论

双移动机械臂空间协作系统存在复杂的约束与非线性耦合, 使得直接建立动力学模型极为困难, 故本文中提出了一种基于U-K方程对系统建立动力学模型的方法. 主要结论如下:

1) 将负载的中心处断开, 应用Lagrange方法建立了单个移动机械臂的动力学方程, 减轻了系统的耦合现象, 解决了引入约束方程时无法对末端电机转角与末端连杆转角加以限制的问题.

2) 给出了将双移动机械臂空间协作的固有几何约束及其二阶导数, 应用U-K方程建立了双移动机械臂空间协作系统的动力学模型. 该方法思路清晰, 无需引入辅助变量, 简化了计算量. 此外, 现有针对双臂协作问题的研究主要是基于平面协作进行的, 而本文针对空间协作机械臂开展了应用U-K方法的探索.

3) 对建立的模型进行了数值仿真, 对模型添加期望的轨迹约束, 给定了符合约束方程的初始条件, 仿真显示模型运动轨迹与期望轨迹基本重合, 证明了该方法建立动力学模型的可行性. 由于该方法未考虑负载与机械臂之间的密度变化, 且将连杆质心简单视作连杆中心, 因此存在一定的建模误差. 后续的研究可以把此类误差统一整合至不确定性中, 进一步基于该模型进行控制算法的探索.

附 录

$$M_{1,1} = M_{2,2} = m_{v1} + m_{r1} + m_1 + m_2 + m_3,$$

$$M_{3,3} = m_1 \hat{c}_1 / 4 + m_2 (\hat{c}_1 + \hat{c}_2 / 2)^2 + m_3 (\hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3 / 2)^2 + I_1 + I_2 + I_3 + I_{r1},$$

$$M_{4,4} = (m_1 / 4 + m_2 + m_3) l_1^2 + I_1, \quad M_{5,5} = (m_2 / 4 + m_3) l_2^2 + I_2, \quad M_{6,6} = m_3 l_3^2 / 4 + I_3,$$

$$M_{1,3} = M_{3,1} = -[(m_1 / 2 + m_2 + m_3) \hat{c}_1 + (m_2 / 2 + m_3) \hat{c}_2 + m_3 \hat{c}_3 / 2] \sin \delta_1,$$

$$M_{2,3} = M_{3,2} = [(m_1 / 2 + m_2 + m_3) \hat{c}_1 + (m_2 / 2 + m_3) \hat{c}_2 + m_3 \hat{c}_3 / 2] \cos \delta_1,$$

$$M_{1,4} = M_{4,1} = -(m_1 / 2 + m_2 + m_3) \hat{s}_1 \cos \delta_1, \quad M_{2,4} = M_{4,2} = -(m_1 / 2 + m_2 + m_3) \hat{s}_1 \sin \delta_1,$$

$$M_{1,5} = M_{5,1} = -(m_2 / 2 + m_3) \hat{s}_2 \cos \delta_1, \quad M_{2,5} = M_{5,2} = -(m_2 / 2 + m_3) \hat{s}_2 \sin \delta_1,$$

$$M_{4,5} = M_{5,4} = (m_2 + m_3) / 2 \cdot l_1 l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

$$M_{1,6} = M_{6,1} = -m_3 \hat{s}_3 / 2 \cdot \cos \delta_1, \quad M_{2,6} = M_{6,2} = -m_3 \hat{s}_3 / 2 \cdot \sin \delta_1,$$

$$M_{4,6} = M_{6,4} = m_3 l_1 l_3 / 2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_3), \quad M_{5,6} = M_{6,5} = m_3 l_2 l_3 / 2 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_3).$$

$$\begin{aligned}
G_1 = G_2 = G_3 = 0, G_4 = (m_1/2 + m_2 + m_3)g\hat{c}_1, G_5 = (m_2/2 + m_3)g\hat{c}_2, G_6 = m_3g\hat{c}_3/2. \\
C_{1,3} = [(m_1/2 + m_2 + m_3)\hat{s}_1\dot{\theta}_1 + (m_2/2 + m_3)\hat{s}_2\dot{\theta}_2 + m_3\hat{s}_3\dot{\theta}_3/2]\sin \delta_1 - \\
[(m_1/2 + m_2 + m_3)\hat{c}_1 + (m_2/2 + m_3)\hat{c}_2 + m_3\hat{c}_3/2]\cos \delta_1 \cdot \dot{\delta}_1, \\
C_{1,4} = (m_1/2 + m_2 + m_3)(\hat{s}_1 \sin \delta_1 \cdot \dot{\delta}_1 - \hat{c}_1 \cos \delta_1 \cdot \dot{\theta}_1), \\
C_{1,5} = (m_2/2 + m_3)(\hat{s}_2 \sin \delta_1 \cdot \dot{\delta}_1 - \hat{c}_2 \cos \delta_1 \cdot \dot{\theta}_2), C_{1,6} = m_3/2 \cdot (\hat{s}_3 \sin \delta_1 \cdot \dot{\delta}_1 - \hat{c}_3 \cos \delta_1 \cdot \dot{\theta}_3), \\
C_{2,3} = -[(m_1/2 + m_2 + m_3)\hat{s}_1\dot{\theta}_1 + (m_2/2 + m_3)\hat{s}_2\dot{\theta}_2 + m_3\hat{s}_3\dot{\theta}_3/2]\cos \delta_1 - \\
[(m_1/2 + m_2 + m_3)\hat{c}_1 + (m_2/2 + m_3)\hat{c}_2 + m_3\hat{c}_3/2]\sin \delta_1 \cdot \dot{\delta}_1, \\
C_{2,4} = -(m_1/2 + m_2 + m_3)(\hat{s}_1 \cos \delta_1 \cdot \dot{\delta}_1 + \hat{c}_1 \sin \delta_1 \cdot \dot{\theta}_1), \\
C_{2,5} = -(m_2/2 + m_3)(\hat{s}_2 \cos \delta_1 \cdot \dot{\delta}_1 + \hat{c}_2 \sin \delta_1 \cdot \dot{\theta}_2), C_{2,6} = -m_3/2 \cdot (\hat{s}_3 \cos \delta_1 \cdot \dot{\delta}_1 + \hat{c}_3 \sin \delta_1 \cdot \dot{\theta}_3), \\
C_{3,3} = -m_1/4 \cdot \hat{c}_1 \hat{s}_1 \dot{\theta}_1 - m_2/2 \cdot (\hat{c}_1 + \hat{c}_2/2)(2\hat{s}_1\dot{\theta}_1 + \hat{s}_2\dot{\theta}_2) - m_3/2 \cdot (\hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3/2)(2\hat{s}_1\dot{\theta}_1 + 2\hat{s}_2\dot{\theta}_2 + \hat{s}_3\dot{\theta}_3), \\
C_{3,4} = -[m_1\hat{c}_1/2 + m_2(\hat{c}_1 + \hat{c}_2/2) + m_3(\hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3/2)]\hat{s}_1\dot{\delta}_1, \\
C_{3,5} = -[m_2/2 \cdot (\hat{c}_1 + \hat{c}_2/2) + m_3(\hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3/2)]\hat{s}_2\dot{\delta}_1, C_{3,6} = -m_3/2 \cdot (\hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3/2)\hat{s}_3\dot{\delta}_1, \\
C_{4,3} = [m_1\hat{c}_1/2 + m_2(\hat{c}_1 + \hat{c}_2/2) + m_3(\hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3/2)]\hat{s}_1\dot{\delta}_1, \\
C_{4,5} = (m_2/2 + m_3)l_1l_2\sin(\theta_1 - \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2, C_{4,6} = m_3/2 \cdot l_1l_3\sin(\theta_1 - \theta_3) \cdot \dot{\theta}_3, \\
C_{5,3} = [m_2/2 \cdot (\hat{c}_1 + \hat{c}_2/2) + m_3(\hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3/2)]\hat{s}_2\dot{\delta}_1, C_{5,4} = (m_2/2 + m_3)l_1l_2\sin(\theta_2 - \theta_1) \cdot \dot{\theta}_1, \\
C_{5,6} = m_3/2 \cdot l_2l_3\sin(\theta_2 - \theta_3) \cdot \dot{\theta}_3, C_{6,3} = m_3/2 \cdot (\hat{c}_1 + \hat{c}_2 + \hat{c}_3/2)\hat{s}_3\dot{\delta}_1, \\
C_{6,4} = m_3/2 \cdot l_1l_3\sin(\theta_3 - \theta_1) \cdot \dot{\theta}_1, C_{6,5} = m_3/2 \cdot l_2l_3\sin(\theta_3 - \theta_2) \cdot \dot{\theta}_2.
\end{aligned}$$

参考文献 (References):

- [1] TSUJI T, JAZIDIE A, KANEKO M. Distributed trajectory generation for cooperative multi-arm robots via virtual force interactions[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics (Part B): Cybernetics*, 1997, **27**(5): 862-867.
- [2] YAN Z, JOUANDEAU N, CHERIF A A. A survey and analysis of multi-robot coordination[J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2013, **10**(12): 283-290.
- [3] 沈显庆, 孙启智, 马志鹏. 基于双闭环P+前馈的移动机器人路径跟随控制[J]. *黑龙江科技大学学报*, 2021, **31**(2): 223-228. (SHEN Xianqing, SUN Qizhi, MA Zhipeng. Path following control of mobile robot based on double closed loop P+ with feedforward compensation[J]. *Journal of Heilongjiang University of Science and Technology*, 2021, **31**(2): 223-228.(in Chinese))
- [4] 郭隆臻, 徐定明, 李子信. 移动送料机器人地图构建与运动控制研究[J]. *智能计算机与应用*, 2021, **11**(1): 55-60. (GUO Longzhen, XU Dingming, LI Zixin. Research on map construction and motion control of mobile feeding robot[J]. *Intelligent Computer and Applications*, 2021, **11**(1): 55-60.(in Chinese))
- [5] 杨秀清. 机电液耦合的搬运机械手虚拟样机研究[D]. 博士学位论文. 合肥: 中国科学技术大学, 2008. (YANG Xiuning. Research on virtual prototyping of mechanical-electrical-hydraulic coupling manipulator[D]. PhD Thesis. Hefei: University of Science and Technology of China, 2008. (in Chinese))
- [6] 姜晓, 李铁民, 王立平. 过约束并联机构动力学建模方法[J]. *机械工程学报*, 2013, **49**(17): 123-129. (JIANG Yao, LI Tiemin, WANG Liping. Research on the dynamic model of an over-constrained parallel mechanism[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, **49**(17): 123-129.(in Chinese))
- [7] 刘铖, 胡海岩. 基于李群局部标架的多柔体系统动力学建模与计算[J]. *力学学报*, 2021, **53**(1): 213-233. (LIU Cheng, HU Haiyan. Dynamic modeling and computation for flexible multibody systems based on the local frame of Lie group[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, **53**(1): 213-233.(in Chinese))
- [8] 陈俊斌. 双柔性机械臂多刚体模拟方法研究[D]. 硕士学位论文. 福州: 福州大学, 2006. (CHEN Junbin. Using multirigid-body method for the simulation of two flexible manipulators[D]. Master Thesis. Fuzhou: Fuzhou University, 2006. (in Chinese))
- [9] JORGE G L, ARTEAGA M A. Dynamic model and simulation of cooperative robots: a case study[J]. *Robotica*,

- 2005, **23**(5): 615-624.
- [10] PARRA-VEGA V, RODRÍGUEZ-ANGELES A, ARIMOTO S, et al. High precision constrained grasping with cooperative adaptive handcontrol[J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2001, **32**(3): 235-254.
- [11] FLIXEDER S, T GLÜCK, KUGI A. Force-based cooperative handling and lay-up of deformable materials: mechatronic design, modeling, and control of a demonstrator[J]. *Mechatronics*, 2017, **47**: 246-261.
- [12] 章定国. 多杆空间柔性机器人递推Lagrange动力学建模和仿真[J]. *应用数学和力学*, 2009, **30**(10): 1202-1212. (ZHANG Dingguo. Recursive Lagrangian dynamic modeling and simulation of multi-link spatial flexible manipulator arms[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, **30**(10): 1202-1212.(in Chinese))
- [13] 郭益深, 陈力. 双臂空间机器人姿态、关节协调运动基于RBF神经网络的自适应控制算法[J]. *应用数学和力学*, 2008, **29**(9): 1028-1036. (GUO Yishen, CHEN Li. Adaptive neural network control for coordinated motion of dual-arm space robot system with uncertain parameters[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2008, **29**(9): 1028-1036.(in Chinese))
- [14] REZA M, S. MEHDI R, ALI T. A new observer-based adaptive controller for cooperative handling of an unknown object[J]. *Robotica*, 2014, **34**(7): 1437-1463.
- [15] UDWADIA F E, KALABA R E. A new perspective on constrained motion[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1992, **439**(1906): 407-410.
- [16] UDWADIA F E. A new perspective on tracking control of nonlinear structural and mechanical systems[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2003, **459**(2035): 1783-1800.
- [17] 韩江, 汪鹏, 董方方, 等. 基于Udwadia-Kalaba方法的平面冗余并联机器人建模与轨迹跟踪控制[J]. *应用数学和力学*, 2020, **41**(11): 1183-1196. (HAN Jiang, WANG Peng, DONG Fangfang, et al. Modeling and control of planar redundant parallel robots based on the Udwadia-Kalaba method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(11): 1183-1196.(in Chinese))
- [18] HUANG J, CHEN Y H, ZHIHUA Z. Udwadia-Kalaba approach for parallel manipulator dynamics[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2013, **135**(6): 061003-061014.
- [19] 韩江, 王凡志, 董方方, 等. 基于Udwadia-Kalaba理论的协作机器人轨迹跟踪控制[J]. *组合机床与自动化加工技术*, 2021(1): 78-83. (HAN Jiang, WANG Fanzhi, DONG Fangfang, et al. A novel trajectory tracking control of collaborative robot based on Udwadia-Kalaba theory[J]. *Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique*, 2021(1): 78-83.(in Chinese))
- [20] 刘佳, 刘荣. 双臂协调机械手动力学建模的新方法[J]. *北京航空航天大学学报*, 2016, **42**(9): 1903-1910. (LIU Jia, LIU Rong. New approach for dynamics modeling of dual-arm cooperating manipulators[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2016, **42**(9): 1903-1910.(in Chinese))
- [21] ZHEN S. Study on Lyapunov-based deterministic robust control (LDRC) of uncertain mechanical systems[D]. PhD Thesis. Hefei: Hefei University of Technology, 2014.
- [22] UDWADIA F E, KALABA R E. *Analytical Dynamics: a New Approach*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [23] CHEN Y H, LEITMANN G, CHEN J S. Robust control for rigid serial manipulators: a general setting[C]// *IEEE American Control Conference (ACC)*. 1998, **2**: 912-916.
- [24] SPONG M W, HUTCHINSON S, VIDYASAGAR M. *Robot Modeling and Control*[M]. New Jersey: John Wiley & Sons Inc, 2006.
- [25] SLOTINE J J, LI W. *Applied Nonlinear Control*[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1991.