

### 登革热传播模型的最优综合控制研究

李雅芝, 刘利利

#### Study of the Optimal Integrated Control of a Dengue Transmission Model

LI Yazhi and LIU Lili

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420258>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 机械多体系统动力学非线性最优控制问题的Noether理论

The Noether Theorem for Nonlinear Optimal Control Problems of Mechanical Multibody System Dynamics

应用数学和力学. 2018, 39(7): 776–784

#### 具有潜伏期时滞的时变SEIR模型的最优疫苗接种策略

Optimal Vaccination Strategies for a Time-Varying SEIR Epidemic Model With Latent Delay

应用数学和力学. 2019, 40(7): 701–712

#### 基于微分几何的蛇板系统动力学建模与运动规划

Dynamics Modeling and Motion Planning for Snakeboard Systems Based on Differential Geometry

应用数学和力学. 2018, 39(1): 29–40

#### 基于Euler-Lagrange模型的电弧风洞喷管两相流模拟

Simulation of 2-Phase Flow in the Nozzle of the ArcHeated Wind Tunnel Based on the Eulerian-Lagrangian Model

应用数学和力学. 2020, 41(1): 16–26

#### 脉动气流对垂直平板降膜蒸发影响的数值模拟研究

Numerical Simulation Research of Effects of Pulsating Air Flow on Liquid Film Evaporation Over Vertical Plates

应用数学和力学. 2020, 41(5): 491–498

#### 基于三维CFD-DEM的多孔介质流场数值模拟

Numerical Simulation of Flow Fields in Porous Media Based on the 3D CFD-DEM

应用数学和力学. 2017, 38(10): 1093–1102



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

# 登革热传播模型的最优综合控制研究\*

李雅芝<sup>1,2</sup>, 刘利利<sup>3</sup>

- (1. 黔南民族师范学院 数学与统计学院, 贵州 都匀 558000;  
2. 黔南州复杂系统与智能优化重点实验室, 贵州 都匀 558000;  
3. 山西大学 复杂系统研究所, 太原 030006)

**摘要:** 建立了一个登革热在蚊子和人之间传播的模型, 引入了 Wolbachia、自我保护和杀虫剂三种控制措施, 分别从常数控制和时变控制两个方面进行探讨. 首先, 分析了常数控制对模型基本再生数的影响, 研究发现: Wolbachia 有助于减小基本再生数, 且基本再生数与自我保护和杀虫剂呈负相关. 其次, 以使得感染数最少且实施成本最低为目标, 使用 Pontryagin 极值原理讨论最优控制. 最后, 通过数值模拟展示了最优控制的效果.

**关键词:** 登革热; 传播模型; 最优控制; 数值模拟

**中图分类号:** O193      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.420258

## Study of the Optimal Integrated Control of a Dengue Transmission Model

LI Yazhi<sup>1,2</sup>, LIU Lili<sup>3</sup>

- (1. School of Mathematics and Statistics, Qiannan Normal University for Nationalities,  
Duyun, Guizhou 558000, P.R.China;  
2. Key Laboratory of Complex Systems and Intelligent Optimization of Qiannan,  
Duyun, Guizhou 558000, P.R.China;  
3. Complex Systems Research Center, Shanxi University, Taiyuan 030006, P.R.China)

**Abstract:** A transmission model for dengue fever between mosquitoes and human beings was established. Three control measures: Wolbachia, self-protection and insecticide were introduced. The constant control and the time-varying control were discussed respectively. Firstly, the influences of the constant control on the basic regeneration number of the model were analyzed. It is shown that Wolbachia helps reduce the basic regeneration number, and the basic regeneration number is negatively correlated with self-protection and insecticide. Secondly, in order to minimize the number of infections and the implementation cost, the optimal control was discussed with Pontryagin's extreme value principle. Finally, the effects of the optimal control was demonstrated through numerical simulation.

**Key words:** dengue; transmission model; optimal control; numerical simulation

## 引 言

近些年来, 登革热在世界各地迅速流行. 据估计, 每年约 1 亿有症状登革热病例, 另有约 3 亿无症状感染

\* 收稿日期: 2021-08-30; 修订日期: 2021-09-15

**基金项目:** 国家自然科学基金 (11901326; 11601293); 山西省面上青年基金 (201901D211160); 贵州省科学技术基金 (黔科合基础-ZK[2021] 一般 002); 贵州省教育厅 2019 年度科技拔尖人才项目 (黔教合 KY 字 [2019]063)

**作者简介:** 李雅芝 (1990—), 女, 博士 (E-mail: [lyz900101@126.com](mailto:lyz900101@126.com));

刘利利 (1985—), 女, 博士 (通讯作者. E-mail: [liulili03@sxu.edu.cn](mailto:liulili03@sxu.edu.cn)).

**引用格式:** 李雅芝, 刘利利. 登革热传播模型的最优综合控制研究[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(4): 445-452.

病例,负担最大的是亚洲 (75%)<sup>[1]</sup>,这不仅威胁到了人们的身体健康,而且造成了严重的经济负担,因此需要寻找有效的防控措施以缓解登革热在世界范围内的传播.

目前还没有针对登革热的特定疫苗或抗病毒治疗,故媒介控制是防控登革热病毒传播的重要策略.这些策略有:通过环境治理防止蚊子获得产卵地、妥善处理固体废物,去除人为制造的蚊虫栖息地;对室外储水容器施用适当杀虫剂;使用个人家庭防护,如纱窗、长袖衣服、经杀虫剂处理的材料、蚊香和喷雾式杀虫剂;不育技术和基因控制等<sup>[2]</sup>.在实际中,往往会同时实施多种控制措施以达到更好的控制效果,但是任何一种控制措施都要耗费一定的人力、物力和财力,如何在花费尽可能少的前提下达到最好的控制效果是一个值得研究的问题.

关于登革热的最优控制已有一些科研工作者进行了研究,如 Augusto 和 Khan<sup>[3]</sup>考虑了使用杀虫剂和疫苗的最优控制,Prasetyo 等<sup>[4]</sup>建立了一个 SVIR 模型研究最优疫苗控制策略.Xue 等<sup>[5]</sup>建立了一个多菌株的登革热模型并考虑了最优疫苗控制.Fister 等<sup>[6]</sup>研究了投放绝育蚊子和生活环境改造对蚊媒传染病的最优控制.Masud 等<sup>[7]</sup>建立了一个 SIR-SI 模型,加入两种控制措施,研究其在降低蚊子对人的叮咬率和蚊子被人感染的有效性,并考虑了最优控制.从现有文献中发现,在模型中加入基因控制研究最优控制策略的研究还较少,关于基因控制目前主要是投放携带 Wolbachia 的蚊子.有实验发现 Wolbachia 可以抑制登革热病毒在蚊子体内的复制,所以让蚊子携带 Wolbachia 有助于抑制登革热的传播,而只要成年雌蚊感染了 Wolbachia,其后代也会感染此菌,并且被感染的雄性与正常雌性的后代会因为细胞质不相容 (CI) 而死亡<sup>[8]</sup>,这些特性都有助于 Wolbachia 在蚊子种群的传播.相比传统的控制措施,使用 Wolbachia 是一种可持续且环境友好的控制方式.

为了研究登革热的最优控制策略,本文将建立登革热在蚊子和人之间的传播模型,加入自我保护、杀虫剂和 Wolbachia 三种控制措施,研究最优综合控制策略.

### 1 模型建立

关于登革热传播模型的建立,有以下几点解释:

(I) 对于人采用 SIS 仓室模型,因为登革热的潜伏期相对人的寿命是很短的,在此忽略.而登革热有四种类型,人感染了一种类型的登革热并恢复后,仍可能感染其他类型的登革热,所以 SIS 模型是合理的.

(II) 对于蚊子采用 SEI 仓室模型,因为登革热病毒在蚊子体内的潜伏期 (约 7 d) 相对蚊子的整个生命周期 (30~100 d) 是不能被忽略的.

(III) 考虑 Wolbachia 在蚊子种群中的垂直传播和 CI 影响.

(IV) 控制变量  $u_1(t)$  表示通过使用蚊帐、穿长袖衣服等保护人类免受蚊虫叮咬的效果,控制变量  $u_2(t)$  表示为减少蚊子数量而进行的捕杀工作.

综合以上几种因素,可得到如下模型:

$$\begin{cases} \dot{S}_{mi}(t) = b_m N_{mi} - d_m N_m S_{mi} - (1 - u_1(t))\beta_m S_{mi} I_h - u_2(t) S_{mi}, \\ \dot{S}_{mu}(t) = b_m \left(1 - \frac{N_{mi}}{N_m}\right) N_{mu} - d_m N_m S_{mu} - (1 - u_1(t))\beta_m S_{mu} I_h - u_2(t) S_{mu}, \\ \dot{E}_{mi}(t) = (1 - u_1(t))\beta_m S_{mi} I_h - d_m N_m E_{mi} - e_m E_{mi} - u_2(t) E_{mi}, \\ \dot{E}_{mu}(t) = (1 - u_1(t))\beta_m S_{mu} I_h - d_m N_m E_{mu} - e_m E_{mu} - u_2(t) E_{mu}, \\ \dot{I}_{mi}(t) = e_m E_{mi} - d_m N_m I_{mi} - u_2(t) I_{mi}, \\ \dot{I}_{mu}(t) = e_m E_{mu} - d_m N_m I_{mu} - u_2(t) I_{mu}, \\ \dot{S}_h(t) = w - d_h S_h - (1 - u_1(t))S_h(\bar{\beta}_h I_{mi} + \beta_h I_{mu}) + \gamma_h I_h, \\ \dot{I}_h(t) = (1 - u_1(t))S_h(\bar{\beta}_h I_{mi} + \beta_h I_{mu}) - d_h I_h - \gamma_h I_h, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $N_{mi} = S_{mi} + E_{mi} + I_{mi}$ ,  $N_{mu} = S_{mu} + E_{mu} + I_{mu}$ ,  $N_m = N_{mi} + N_{mu}$ ,  $N_h = S_h + I_h$ . 各状态变量和参数的含义分别见表 1 和表 2,“W”表示“Wolbachia”,“D”表示“登革热”.由于有 Wolbachia 菌株的垂直传播率和 CI 发生可能性均接近 1,故在模型 (1) 中,将两种影响的可能性视为 1,即只要成年雌蚊感染了 Wolbachia,其后代也一定会感染,感染雄蚊和正常雌蚊的后代一定会因为 CI 影响而死亡.模型 (1) 第二个方程中的项  $b_m \left(1 - \frac{N_{mi}}{N_m}\right) N_{mu}$  表示正常雌性产生正常后代.另外,由于对蚊子的捕杀不可能超过蚊子的出生,否则蚊子种群将会由于捕杀而灭绝,故假设  $b_m > u_2$ .

表 1 模型 (1) 中各状态变量的含义  
Table 1 The meanings of variables in model (1)

state variable	biological meaning
$S_{mi}$	mosquito population infected with W and susceptible to D
$S_{mu}$	mosquito population not infected with W and susceptible to D
$E_{mi}$	mosquito population infected with W and in the incubation period of D
$E_{mu}$	mosquito population not infected with W and in the incubation period of D
$I_{mi}$	mosquito population infected with W and D
$I_{mu}$	mosquito population not infected with W but infected with D
$S_h$	human population susceptible to D
$I_h$	human population infected with D

表 2 模型 (1) 中各参数的含义  
Table 2 The meanings of parameters in model (1)

parameter	biological meanings
$w$	recruitment rate of human beings
$b_m$	birth rate of mosquitoes
$d_h$	natural death rate of human beings
$d_m$	natural death rate of mosquitoes
$\beta_h$	D infection rate of human beings bitten by W-free mosquitoes
$e_m$	rate at which exposed mosquitoes become infectious
$\bar{\beta}_h = q\beta_h$	D infection rate of human beings bitten by W-infected mosquitoes ( $q < 1$ , which reflects the inhibition effect of W)
$\beta_m$	D infection rate of mosquitoes biting D-infected human beings
$\gamma_h$	recovery rate of infectious human beings

定义

$$D = \{(S_{mi}, S_{mu}, E_{mi}, E_{mu}, I_{mi}, I_{mu}, S_h, I_h) \in \mathbb{R}_+^8 | N_m \leq b_m/d_m, N_h \leq w/d_h\}.$$

关于模型 (1) 的适定性, 有如下结果.

**定理 1** 模型 (1) 的解非负且在  $D$  内是有界的. 进一步地,  $D$  是模型 (1) 的正不变集.

**证明** 由于系统 (1) 的初值非负, 易知模型 (1) 的解非负, 故只需证明  $N_m$  和  $N_h$  是有界的.

分别将系统 (1) 中的前六个方程和后两个方程相加, 可以得到

$$\dot{N}_m(t) = b_m N_m - d_m N_m^2 - b_m \frac{N_{mi}}{N_m} N_{mu} - u_2(t) N_m \leq b_m N_m - d_m N_m^2 = N_m (b_m - d_m N_m),$$

$$\dot{N}_h(t) = w - d_h N_h.$$

积分可得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} N_m \leq b_m/d_m, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} N_h \leq w/d_h.$$

得证.

## 2 常数控制分析

令  $u_1(t) = u_1, u_2(t) = u_2$ , 其中  $u_1, u_2$  为常数. 下考虑常数控制对模型 (1) 基本再生数的影响.

在系统 (1) 中令  $E_{mi} = 0, I_{mi} = 0, E_{mu} = 0, I_{mu} = 0, I_h = 0$ , 则得到如下子系统:

$$\begin{cases} \dot{S}_{mi}(t) = b_m S_{mi} - d_m (S_{mi} + S_{mu}) S_{mi} - u_2 S_{mi} \triangleq f(S_{mi}, S_{mu}), \\ \dot{S}_{mu}(t) = b_m \left(1 - \frac{S_{mi}}{S_{mi} + S_{mu}}\right) S_{mu} - d_m (S_{mi} + S_{mu}) S_{mu} - u_2 S_{mu} \triangleq g(S_{mi}, S_{mu}), \\ \dot{S}_h(t) = w - d_h S_h \triangleq v(S_h). \end{cases} \quad (2)$$

定义  $g(0,0) = 0$ , 则系统 (2) 被连续延拓到  $(0,0)$ . 分别令  $f(S_{mi}, S_{mu}) = 0, g(S_{mi}, S_{mu}) = 0, v(S_h) = 0$ , 通过计算模

型 (2) 的平衡态可知模型 (1) 最多存在三个无病平衡态  $(S_{mi}^*, S_{mu}^*, 0, 0, 0, 0, S_h^*, 0)$ , 分别为

$$E_{01} = \left( \frac{b_m - u_2}{d_m}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{w}{d_h}, 0 \right), E_{02} = \left( 0, \frac{b_m - u_2}{d_m}, 0, 0, 0, 0, \frac{w}{d_h}, 0 \right), E_{00} = \left( 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{w}{d_h}, 0 \right).$$

由解对初值的连续依赖性可知  $E_{00}$  是不稳定的. 记  $E_{01}$  和  $E_{02}$  对应的基本再生数分别为  $R_{01}$  和  $R_{02}$ , 使用下一代矩阵方法可以计算得到

$$R_{01} = \sqrt{\frac{(1 - u_1)^2 \beta_m \bar{\beta}_h w e_m (b_m - u_2)}{b_m d_m d_h (d_h + \gamma_h) (b_m + e_m)}}, R_{02} = \sqrt{\frac{(1 - u_1)^2 \beta_m \beta_h w e_m (b_m - u_2)}{b_m d_m d_h (d_h + \gamma_h) (b_m + e_m)}}.$$

通过计算系统 (1) 在  $E_{0i} (i = 1, 2)$  处的 Jacobi 矩阵对应特征多项式的特征根, 可以得到: 当  $R_{01} < 1$  时,  $E_{01}$  是局部渐近稳定的; 当  $R_{02} < 1$  时,  $E_{02}$  是局部渐近稳定的.

比较  $R_{01}$  和  $R_{02}$  的表达式, 其区别在于参数  $\bar{\beta}_h$  和  $\beta_h$ , 由表 2 可知,  $\bar{\beta}_h < \beta_h$ , 故有  $R_{01} < R_{02}$ . 所以 Wolbachia 有助于降低登革热的传播力度和规模.

下面分析  $R_{0i} (i = 1, 2)$  对控制参数  $u_1$  和  $u_2$  的敏感性, 以  $R_{01}$  为例.

在此采用 Chitnis 等<sup>[9]</sup> 定义的标准正向灵敏度指数  $\gamma_u^P := \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{u}{P}$  衡量变量  $P$  对参数  $u$  的敏感性. 结合  $R_{01}$  的表达式, 通过计算可以得到

$$\gamma_{u_1}^{R_{01}} = -\frac{u_1}{1 - u_1}, \gamma_{u_2}^{R_{01}} = -\frac{u_2}{2(b_m - u_2)}.$$

可以看出,  $R_{01}$  与  $u_1$  和  $u_2$  均为负相关的, 即增大常数控制参数  $u_1$  和  $u_2$ , 均会使得  $R_{0i} (i = 1, 2)$  减小, 进而减少登革热的感染人数. 又  $\partial |\gamma_{u_1}^{R_{01}}| / \partial u_1 = 1 / (1 - u_1)^2 > 0, \partial |\gamma_{u_2}^{R_{01}}| / \partial u_2 = b_m / 2(b_m - u_2)^2 > 0$ , 所以  $u_1$  和  $u_2$  越大,  $R_{01}$  与它们的相关性越强.

图 1 为当  $R_{0i} (i = 1, 2) > 1$  时, 控制参数  $u_1$  和  $u_2$  对登革热感染人数的影响. 参数取值为:  $b_m = 0.8, d_m = 4E-2, \beta_m = 0.0015, e_m = 0.05, w = 2, d_h = 4E-5, \gamma_h = 0.002, \beta_h = 0.0001, q_3 = 0.9$ . 从图中可以看出: 控制参数取值越大, 登革热感染人数越少, 且病例数呈显著上升趋势所需的时间越长.

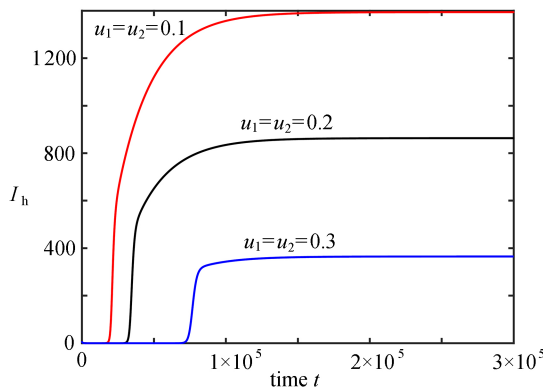


图 1 常数控制对登革热感染人数的影响  
Fig. 1 Effects of constant control on the number of dengue infections

### 3 最优控制分析

由于 Wolbachia 主要是通过抑制登革热病毒在蚊子体内的复制, 进而达到抑制登革热传播的目的, 对于蚊子种群属于内部控制, 控制效果与最初的投放量有关, 故在此仅研究自我保护和杀虫剂两种外部控制措施的最优综合控制策略.

首先建立如下目标泛函:

$$J(u_1(t), u_2(t)) = \int_0^T \left( AI_h(t) + \frac{B_1}{2} u_1^2(t) + \frac{B_2}{2} u_2^2(t) \right) dt, \tag{3}$$

其中  $(u_1(t), u_2(t)) \in K$ , 这里的  $K$  为控制集, 定义为

$$K = \{u_i(\cdot) \in L^\infty[0, T] \mid 0 \leq u_i(t) \leq 1 (i = 1, 2), \forall t \in [0, T]\},$$

$A$  表示由携带登革热病毒的病人造成的人均损失,  $B_1$  和  $B_2$  分别表示人的自我保护和灭蚊工作相关的成本,  $T$  表示控制的终端时间. 假设时间区间为  $[0, T]$ , 我们需要寻找最优的  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  使得目标泛函  $J(u_1(t), u_2(t))$  达到最小.

为了研究系统 (1) 在目标泛函 (3) 下的最优控制策略, 现在给出最优控制的存在性结论如下.

**定理 2** 对于模型 (1), 存在最优控制  $u_1^*(t), u_2^*(t)$ , 使得

$$J(u_1^*(t), u_2^*(t)) = \min\{J(u_1(t), u_2(t)), (u_1(t), u_2(t)) \in K\}.$$

**证明** 易知目标函数  $J(u_1(t), u_2(t))$  中的被积函数关于  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$  是凸函数. 由定理 1 知系统 (1) 的解是有界的, 故系统关于变量  $S_{mi}(t), S_{mu}(t), E_{mi}(t), E_{mu}(t), I_{mi}(t), I_{mu}(t), S_h(t), I_h(t)$  满足 Lipschitz 性质, 进而存在最优的二元组  $(u_1^*(t), u_2^*(t))$ , 得证.

关于动力系统的最优控制方法很多, 动力系统类型不同, 求解最优控制的方法也不同<sup>[10-11]</sup>. 模型 (1) 为一个高维 ODE 系统, 可以采用 Pontryagin 极值原理<sup>[12]</sup> 寻找具体的最优控制  $(u_1^*(t), u_2^*(t))$ .

首先构造 Hamilton 函数  $H$  如下:

$$H = AI_h(t) + \frac{B_1}{2}u_1^2(t) + \frac{B_2}{2}u_2^2(t) + \lambda_1\dot{S}_{mi}(t) + \lambda_2\dot{S}_{mu}(t) + \lambda_3\dot{E}_{mi}(t) + \lambda_4\dot{E}_{mu}(t) + \lambda_5\dot{I}_{mi}(t) + \lambda_6\dot{I}_{mu}(t) + \lambda_7\dot{S}_h(t) + \lambda_8\dot{I}_h(t),$$

其中  $\lambda_i(t) (i = 1, 2, \dots, 8)$  称为协态变量, 满足下面的伴随方程:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) &= -\frac{\partial H}{\partial S_{mi}} = -\lambda_1[d_m(N_m + S_{mi}) + (1 - u_1)\alpha\beta_m I_h + u_2 - b_m] - \lambda_2\left(\frac{b_m N_{mu}^2 + d_m S_{mu} N_m^2}{N_m^2}\right) - \lambda_3(d_m E_{mi} - (1 - u_1)\alpha\beta_m I_h) - \lambda_4 d_m E_{mu} - \lambda_5 d_m I_{mi} - \lambda_6 d_m I_{mu}, \\ \dot{\lambda}_2(t) &= -\frac{\partial H}{\partial S_{mu}} = -\lambda_1 d_m S_{mi} - \lambda_2\left(d_m(N_m + S_{mu}) + (1 - u_1)\alpha\beta_m I_h + u_2 - \frac{b_m(N_{mi} + N_m)N_{mu}}{N_m^2}\right) - \lambda_3 d_m E_{mi} - \lambda_4(d_m E_{mu} - (1 - u_1)\alpha\beta_m I_h) - \lambda_5 d_m I_{mi} - \lambda_6 d_m I_{mu}, \\ \dot{\lambda}_3(t) &= -\frac{\partial H}{\partial E_{mi}} = -\lambda_1(d_m S_{mi} - b_m) - \lambda_2\left(\frac{b_m N_{mu}^2 + d_m S_{mu} N_m^2}{N_m^2}\right) - \lambda_3[d_m(N_m + E_{mi}) + e_m + u_2] - \lambda_4 d_m E_{mu} - \lambda_5(d_m I_{mi} - e_m) - \lambda_6 d_m I_{mu}, \\ \dot{\lambda}_4(t) &= -\frac{\partial H}{\partial E_{mu}} = -\lambda_1 d_m S_{mi} - \lambda_2\left(d_m S_{mu} - \frac{b_m(N_{mi} + N_m)N_{mu}}{N_m^2}\right) - \lambda_3 d_m E_{mi} - \lambda_4[d_m(N_m + E_{mu}) + e_m + u_2] - \lambda_5 d_m I_{mi} - \lambda_6(d_m I_{mu} - e_m), \\ \dot{\lambda}_5(t) &= -\frac{\partial H}{\partial I_{mi}} = -\lambda_1(d_m S_{mi} - b_m) - \lambda_2\left(\frac{b_m N_{mu}^2 + d_m S_{mu} N_m^2}{N_m^2}\right) - \lambda_3 d_m E_{mi} - \lambda_4 d_m E_{mu} - \lambda_5[d_m(N_m + I_{mi}) + u_2] - \lambda_6 d_m I_{mu} - \lambda_7(1 - u_1)\alpha\bar{\beta}_h S_h + \lambda_8(1 - u_1)\alpha\bar{\beta}_h S_h, \\ \dot{\lambda}_6(t) &= -\frac{\partial H}{\partial I_{mu}} = -\lambda_1 d_m S_{mi} - \lambda_2\left(d_m S_{mu} - \frac{b_m(N_{mi} + N_m)N_{mu}}{N_m^2}\right) - \lambda_3 d_m E_{mi} - \lambda_4 d_m E_{mu} - \lambda_5 d_m I_{mi} - \lambda_6[d_m(N_m + I_{mu}) + u_2] - \lambda_7(1 - u_1)\alpha\beta_h S_h + \lambda_8(1 - u_1)\alpha\beta_h S_h, \\ \dot{\lambda}_7(t) &= -\frac{\partial H}{\partial S_h} = -\lambda_7[d_h + (1 - u_1)\alpha(\bar{\beta}_h I_{mi} + \beta_h I_{mu})] + \lambda_8(1 - u_1)\alpha(\bar{\beta}_h I_{mi} + \beta_h I_{mu}), \\ \dot{\lambda}_8(t) &= -\frac{\partial H}{\partial I_h} = A - \lambda_1(1 - u_1)\alpha\beta_m S_{mi} - \lambda_2(1 - u_1)\alpha\beta_m S_{mu} + \lambda_3(1 - u_1)\alpha\beta_m S_{mi} + \lambda_4(1 - u_1)\alpha\beta_m S_{mu} + \lambda_7\gamma_h - \lambda_8(d_h + \gamma_h). \end{aligned} \right. \quad (4)$$

横截条件为

$$\lambda_i(T) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (5)$$

利用 Hamilton 函数, 我们将状态方程 (1)、目标泛函 (3) 和伴随方程 (4) 联立起来构成一个最优控制系统. 由最优条件  $\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0$  和  $\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0$  可得



$$\begin{cases} u_1^c(t) = \frac{(\lambda_3^*(t) - \lambda_1^*(t))\alpha\beta_m S_{mi}^*(t)I_h^*(t) + (\lambda_4^*(t) - \lambda_2^*(t))\alpha\beta_m S_{mu}^*(t)I_h^*(t)}{B_1} + \\ \frac{(\lambda_8^*(t) - \lambda_7^*(t))\alpha S_h^*(t)(\beta_h I_{mi}^*(t) + \beta_h I_{mu}^*(t))}{B_1}, \\ u_2^c(t) = \frac{\lambda_1^*(t)S_{mi}^*(t) + \lambda_2^*(t)S_{mu}^*(t) + \lambda_3^*(t)E_{mi}^*(t) + \lambda_4^*(t)E_{mu}^*(t) + \lambda_5^*(t)I_{mi}^*(t) + \lambda_6^*(t)I_{mi}^*(t)}{B_2}, \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $S_{mi}^*(t), S_{mu}^*(t), E_{mi}^*(t), E_{mu}^*(t), I_{mi}^*(t), I_{mu}^*(t), S_h^*(t), I_h^*(t)$  分别是相应状态变量的最优解;  $\lambda_i^*(t) (i = 1, 2, \dots, 8)$  是系统 (4) 在条件 (5) 下的解.

综上, 关于最优控制的具体形式有如下结果.

**定理 3** 在控制集  $K$  上使得  $J(u_1(t), u_2(t))$  取得最小值的最优控制  $(u_1^*(t), u_2^*(t))$  为

$$u_1^*(t) = \max\{0, \min(1, u_1^c(t))\}, u_2^*(t) = \max\{0, \min(1, u_2^c(t))\}.$$

## 4 数值模拟

本部分采用四阶 Runge-Kutta 前推回代法计算最优控制和状态值<sup>[13]</sup>. 记状态变量向量为

$$\mathbf{x} = (S_{mi}, S_{mu}, E_{mi}, E_{mu}, I_{mi}, I_{mu}, S_h, I_h),$$

协态变量向量为

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8),$$

控制变量向量为

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2).$$

其基本算法步骤如下:

步 1 在时间范围  $[0, T]$  内对  $\mathbf{u}$  进行初步估计.

步 2 使用初始条件和估计的  $\mathbf{u}$  值, 依据系统 (1) 关于时间向前求解  $\mathbf{x}$ .

步 3 使用横截条件 (5) 和  $\mathbf{u}, \mathbf{x}$  的值, 依据系统 (4) 关于时间向后求解  $\boldsymbol{\lambda}$ .

步 4 通过最优控制的表征 (6) 中输入新的  $\mathbf{x}$  和  $\boldsymbol{\lambda}$  值来更新  $\mathbf{u}$ .

步 5 检查收敛性. 重复前面的步骤, 直到当前的状态值、伴随值和控制值充分收敛.

取参数值为:  $b_m = 0.8, d_m = 4E-5, \beta_m = 0.0015, e_m = 0.05, w = 2, d_h = 4E-5, \gamma_h = 0.002, \beta_h = 0.001, q_3 = 0.9$ . 本组参数值使得无控制系统的基本再生数为 232.5204, 也即登革热会在人群中流行. 控制的终端时间  $T = 30$ . 初值取为:  $S_{mi}(0) = 1000, S_{mu} = 1000, E_{mi} = 100, E_{mu} = 100, I_{mi} = 20, I_{mu} = 20, S_h = 100, I_h = 5$ .

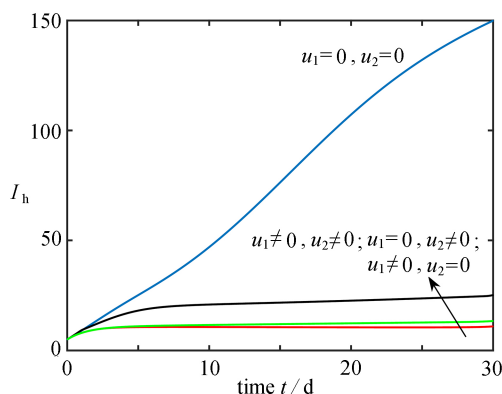


图 2 控制策略对登革热感染人数的影响

Fig. 2 Effects of the control strategy on the number of dengue infections

控制策略对登革热感染人数的影响见图 2, 权重取值为:  $A=1, B_1=1, B_2=1$ . 可以看出, 通过采取控制措施, 在一个月被感染人数有了显著降低, 且最优综合控制策略的效果最好, 蚊子捕杀的控制效果优于人的自我保护的控制效果. 这充分说明直接对传播媒介本身采取例如捕杀等控制措施是非常有必要的.

最优综合控制与单一控制的比较见图 3, 权重取值为:  $A = 1, B_1 = 1, B_2 = 1$ . 由图 3(a) 可知, 对于人的自我保

护, 如果同时还对蚊子进行捕杀, 在前 2 d, 人的自我保护在控制下界, 之后大约需要在上界持续 12 d 左右, 随后逐渐下降到控制下界; 如果只有人的自我保护, 没有捕杀蚊子, 可以发现几乎在整个模拟周期内人的自我保护都要维持在上界. 由图 3(b) 可知, 对于蚊子的捕杀, 如果同时还有人的自我保护, 对蚊子的捕杀最开始就要在控制上界, 而且要持续 24 d 左右, 之后再缓慢下降到控制下界; 如果只捕杀蚊子, 没有人的自我保护, 对蚊子的捕杀要在控制上界持续 27 d 左右. 总之, 相比综合控制策略, 单一控制策略在上界的时间要长.

不同权重对控制变量的影响见图 4.  $B_1$  和  $B_2$  取值越大表示对应控制的成本越高,  $A$  取值越大表示感染登革热造成的损失越大. 从图 4(a)、(b) 可以发现, 随着控制成本增大, 两种控制措施的控制力度都在减小. 从图 4(c)、(d) 可以发现, 随着疾病造成的损失增大, 人的自我保护力度要增大到最大.

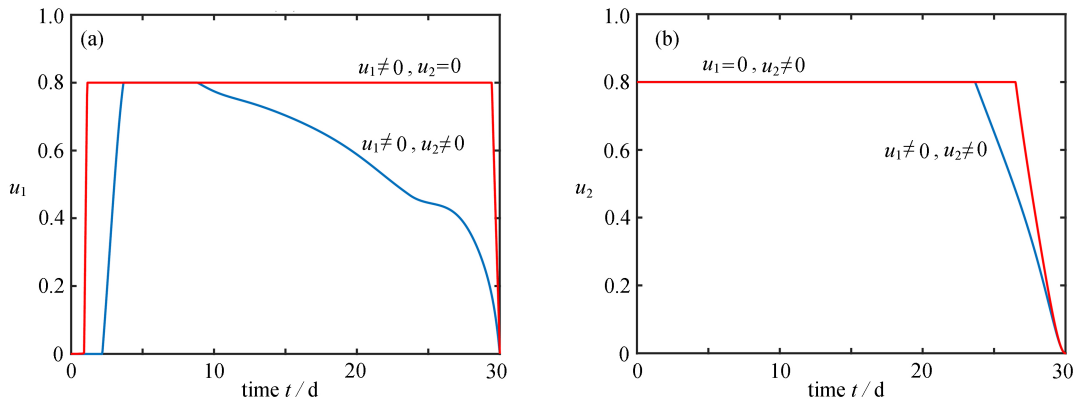


图 3 最优综合控制与单一控制的比较: (a) 两种控制策略下  $u_1$  的变化图; (b) 两种控制策略下  $u_2$  的变化图

Fig. 3 Comparison between the optimal integrated control and the single control: (a) the variation diagram of  $u_1$  under 2 control strategies; (b) the variation diagram of  $u_2$  under 2 control strategies

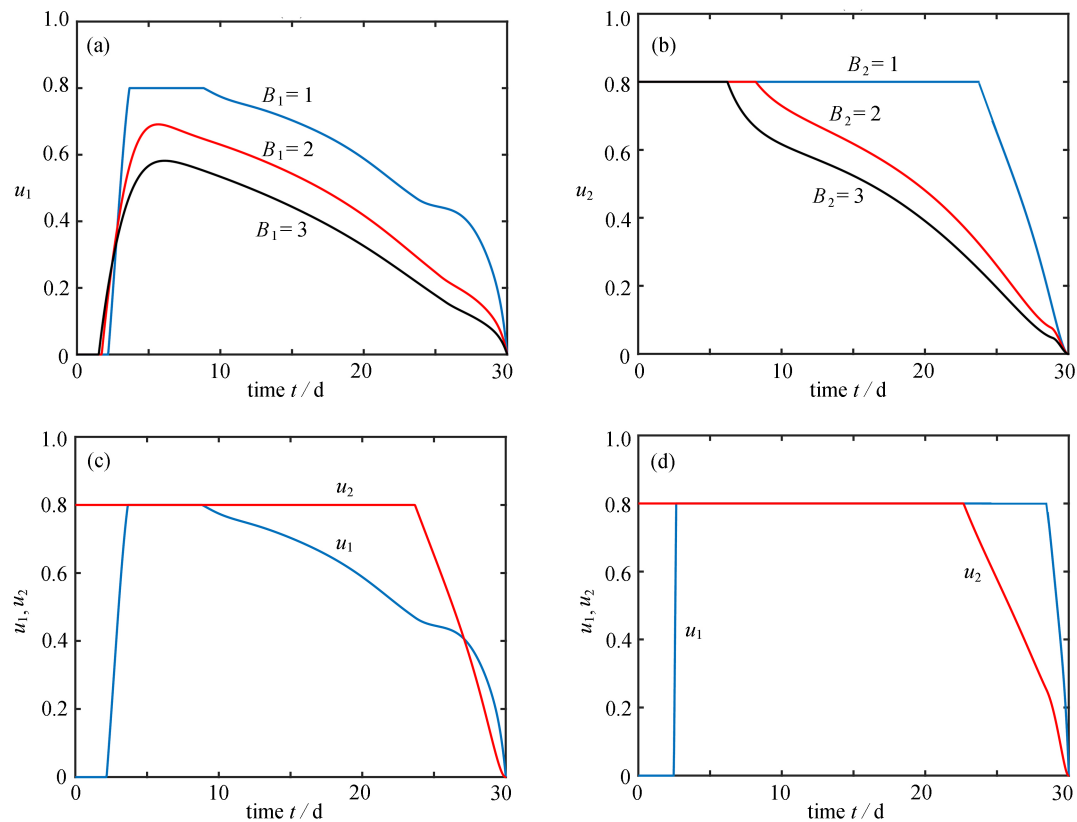


图 4 不同权重对控制变量的影响: (a) 改变  $B_1$  对  $u_1$  的影响,  $A = 1, B_2 = 1$ ; (b) 改变  $B_2$  对  $u_2$  的影响,  $A = 1, B_1 = 1$ ;

(c)  $A = 1$  时,  $u_1, u_2$  的变化图,  $B_1 = 1, B_2 = 1$ ; (d)  $A = 5$  时,  $u_1, u_2$  的变化图,  $B_1 = 1, B_2 = 1$

Fig. 4 The influences of different weights on control variables: (a) the influence of  $B_1$  on  $u_1$ ,  $A = 1, B_2 = 1$ ; (b) the influence of  $B_2$  on  $u_2$ ,  $A = 1, B_1 = 1$ ; (c) the variation diagram of  $u_1$  and  $u_2$ ,  $A = 1, B_1 = 1, B_2 = 1$ ; (d) the variation diagram of  $u_1$  and  $u_2$ ,  $A = 5, B_1 = 1, B_2 = 1$



## 5 结 语

本文建立了一个 SEI-SIS 模型描述登革热在人和蚊子之间的传播,加入了 Wolbachia、人的自我保护和蚊子捕杀三种控制措施,研究最优综合控制策略,并采用数值模拟探讨控制策略对登革热感染人数的影响,对比综合控制策略与单一控制策略,对比权重对控制策略的影响.在实际中,登革热的控制方法有多种,可以根据实际情况,对不同的控制方法进行组合来研究最优综合控制策略.

### 参考文献(References):

- [1] World Health Organization. Dengue and severe dengue: treatment[EB/OL]. [2021-09-15]. [https://www.who.int/health-topics/dengue-and-severe-dengue#tab=tab\\_3](https://www.who.int/health-topics/dengue-and-severe-dengue#tab=tab_3).
- [2] World Health Organization. Dengue and severe dengue: symptoms[EB/OL]. [2021-09-15]. [https://www.who.int/health-topics/dengue-and-severe-dengue#tab=tab\\_2](https://www.who.int/health-topics/dengue-and-severe-dengue#tab=tab_2).
- [3] AGUSTO F B, KHAN M A. Optimal control strategies for dengue transmission in Pakistan[J]. *Mathematical Biosciences*, 2018, **305**: 102-121.
- [4] PRASETYO T A, SARAGIH R, HANDAYANI D. Optimal control on the mathematical models of dengue epidemic by giving vaccination and repellent strategies[J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, **1490**(1): 012034.
- [5] XUE L, REN X, MAGPANTAY F, et al. Optimal control of mitigation strategies for dengue virus transmission[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2021, **83**(2): 8.
- [6] FISTER K R, MCCARTHY M L, OPPENHEIMER S F, et al. Optimal control of insects through sterile insect release and habitat modification[J]. *Mathematical Biosciences: an International Journal*, 2013, **244**(2): 201-212.
- [7] MASUD M A, KIM B N, KIM Y. Optimal control problems of mosquito-borne disease subject to changes in feeding behavior of Aedes mosquitoes[J]. *Biosystems*, 2017, **156/157**: 23-39.
- [8] DORIGATTI I, MCCORMACK C, NEDJATI-GILANI G, et al. Using Wolbachia for dengue control: insights from modelling[J]. *Trends in Parasitology*, 2018, **34**(2): 102-113.
- [9] CHITNIS N, HYMAN J M, CUSHING J M. Determining important parameters in the spread of malaria through the sensitivity analysis of a mathematical model[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2008, **70**: 1272-1296.
- [10] 王小娥, 蔺小林, 李建全. 具有Holling IV型功能反应捕食系统的状态反馈控制[J]. *应用数学和力学*, 2021, **41**(12): 1369-1380. (WANG Xiaoe, LIN Xiaolin, LI Jianquan. State feedback control of predator-prey systems with holling IV functional responses[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **41**(12): 1369-1380.(in Chinese))
- [11] 王昕炜, 彭海军, 钟万勰. 具有潜伏期时滞的时变SEIR模型的最优疫苗接种策略[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(7): 701-712. (WANG Xinwei, PENG Haijun, ZHONG Wanxie. Optimal vaccination strategies for a time-varying SEIR epidemic model with latent delay[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(7): 701-712.(in Chinese))
- [12] PONTRYAGIN L S, BOLTYANSKII V G, GAMKRELIDZE R V, et al. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*[M]. New Jersey: Willey, 1962.
- [13] LENHART S, WORKMAN J. *Optimal Control Applied to Biological Models*[M]. Florida: CRC Press, 2007.