

圆锥角对功能梯度壳非线性振动响应的影响

张宇航, 刘文光, 刘超, 吕志鹏

Effects of Cone Angles on Nonlinear Vibration Responses of Functionally Graded Shells

ZHANG Yuhang, LIU Wenguang, LIU Chao, and L Zhipeng

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420273>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

非线性振动分析的均向量场法

An Average Vector Field Method for Nonlinear Vibration Analysis

应用数学和力学. 2019, 40(1): 47-57 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390178>

面内功能梯度三角形板等几何面内振动分析

Isogeometric in-Plane Vibration Analysis of Functionally Graded Triangular Plates

应用数学和力学. 2020, 41(2): 156-170 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400171>

功能梯度梁在热-机械荷载作用下的几何非线性分析

Geometrically Nonlinear Analysis of Functionally Graded Beams Under Thermomechanical Loading

应用数学和力学. 2019, 40(5): 508-517 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390201>

一类含五次非线性恢复力的Duffing系统共振与分岔特性分析

Analysis of Resonance and Bifurcation Characteristics of Some Duffing Systems With Quintic Nonlinear Restoring Forces

应用数学和力学. 2019, 40(10): 1122-1134 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390234>

双功能梯度纳米梁系统振动分析的辛方法

A Symplectic Approach for Free Vibration of Functionally Graded Double-Nanobeam Systems Embedded in Viscoelastic Medium

应用数学和力学. 2018, 39(10): 1159-1171 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390130>

热环境中旋转功能梯度纳米环板的振动分析

Vibration Analysis of Rotating Functionally Gradient Nano Annular Plates in Thermal Environment

应用数学和力学. 2020, 41(11): 1224-1236 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410090>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

圆锥角对功能梯度壳非线性振动响应的影响*

张宇航, 刘文光, 刘超, 吕志鹏

(南昌航空大学航空制造工程学院, 南昌 330063)

摘要: 研究了受外载荷下圆锥角对功能梯度壳的非线性振动的影响. 首先, 根据 Voigt 模型, 在圆锥壳的厚度方向上建立功能梯度材料属性模型. 然后, 考虑一阶剪切变形理论和 von Kármán 非线性, 利用 Hamilton 原理推导了功能梯度圆锥壳的非线性运动方程. 之后, 应用 Galerkin 法对运动方程进行离散化处理, 再根据 Volmir 假设将方程简化为单自由度的非线性微分方程. 最后, 采用谐波平衡法和 Runge-Kutta 法对方程进行求解, 分析了功能梯度圆锥壳的幅频响应特性曲线, 讨论了不同材料分布函数以及陶瓷体积分数指数对圆锥壳幅频响应的影响, 描述了不同锥角下圆锥壳的分岔图 and 不同激励幅值下圆锥壳的时间历程和相图, 进一步通过 Poincaré 图反映了圆锥壳运动状态. 结果表明: 功能梯度圆锥壳呈现“渐硬”弹簧非线性特性; 锥角增大, 功能梯度圆锥壳混沌运动的现象被抑制, 不易产生运动不稳定性; 激励幅值增大, 功能梯度圆锥壳运动呈现周期到多周期再到混沌的过程.

关键词: 非线性振动; 分岔; Poincaré 截面图; 功能梯度; 圆锥壳

中图分类号: O327 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420273

Effects of Cone Angles on Nonlinear Vibration Responses of Functionally Graded Shells

ZHANG Yuhang, LIU Wenguang, LIU Chao, LÜ Zhipeng

(School of Aeronautical Manufacturing Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, P.R. China)

Abstract: The nonlinear vibration responses of functionally graded materials (FGMs) shells with different cone angles under external loads were studied. Firstly, the Voigt model was employed to describe the physical properties along the thickness direction of FGMs conical shells. Then, the motion equations were derived based on the 1st-order shear deformation theory, the von Kármán geometric nonlinearity and Hamilton's principle. Next, the Galerkin method was applied to discretize the motion equations and the governing equations were simplified into a 1DOF nonlinear vibration differential equation under Volmir's assumption. Finally, the nonlinear motion equations were solved with the harmonic balance method and the Runge-Kutta method, and the amplitude frequency response characteristic curves of the FGMs conical shells were obtained. The effects of different material distribution functions and different ceramic volume fraction exponents on the amplitude frequency response curves of conical shells were discussed. The bifurcation diagrams of conical shells with different cone angles, as well as time process diagrams and phase diagrams for different excitation amplitudes, were described. The motion characteristics were characterized by Poincaré maps. The results show that, the FGMs conical

* 收稿日期: 2021-09-09; 修订日期: 2021-10-26

基金项目: 国家自然科学基金(51965042)

作者简介: 张宇航(1998—), 男, 硕士生(E-mail: 1103517976@qq.com);

刘文光(1978—), 男, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: liuwg14@nchu.edu.cn).

引用格式: 张宇航, 刘文光, 刘超, 吕志鹏. 圆锥角对功能梯度壳非线性振动响应的影响[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(8): 857-868.

shells present the nonlinear characteristics of hardening springs. The chaotic motions of the FGMs conical shells are restrained and not prone to motion instability with the increase of the cone angle. The FGMs conical shell present a process from the periodic motion to the multi-periodic motion and then to chaos with the increase of the excitation amplitude.

Key words: nonlinear vibration; bifurcation; Poincaré map; functionally graded materials; conical shell

引言

功能梯度材料 (functionally graded materials, FGMs) 是一种新型复合材料, 通常由金属和陶瓷组成, 并按不同的体积分布函数沿厚度方向呈梯度变化. 这种材料同时具有金属和陶瓷的优点, 能够有效降低结构的应力集中, 在航空航天领域有着广泛的应用前景. 而在飞行器飞行过程中, 振动载荷是不可避免的, 对飞行器结构的安全可靠性影响巨大. 因此, 为了推动 FGMs 在飞行器结构设计上的应用, 深入了解 FGMs 结构的振动特性具有重要意义.

近年来, 研究者们围绕 FGMs 结构的动力学分析做了大量的工作. 基于 Love 薄壳理论, Loy 等求解了采用幂律分布函数的 FGMs 圆柱壳的模态频率, 分析了不同分布函数指数、轴向波数、环向波数对结构模态频率的影响^[1]. 基于小振幅和谐振假设条件, 李世荣等推导了表面粘贴压电层 FGMs 弹性梁的热-力-电耦合动力学方程, 分析了不同载荷下弹性梁的屈曲与自由振动响应^[2]. 通过一阶剪切变形理论, 徐坤等建立了四边简支 FGMs 板的运动微分方程, 探究了体积分布函数对板自由振动和受迫振动的影响^[3]. 除了经典边界条件, 研究者对弹簧模拟 FGMs 结构的任意边界条件开展了研究. 采用改进的 Fourier 级数构造位移容许函数, 李文达等分析了旋转 FGMs 圆柱壳的行波特性, 研究了圆柱壳几何参数、旋转速度对行波频率的影响^[4]. 采用 Rayleigh-Ritz 法, 田宏业等求解了 FGMs 圆锥板的模态频率^[5]. 结合反拉氏变换与微分求积法, Liang 等研究了不同边界、热环境、弹性支撑和几何参数对 FGMs 圆柱壳振动的影响^[6].

由于大变形条件下, FGMs 结构不可避免地产生非线性振动, 使得结构的分岔、非线性模态得到了研究者的广泛关注. 杜长城等围绕 FGMs 圆柱壳的分岔行为, 讨论了调谐参数对分岔的影响^[7]. 考虑到 FGMs 结构服役过程中, 不可避免地受到外部载荷激励作用, 许多研究者讨论了外载荷对结构非线性行为的影响. 基于 Donnell 壳理论, Liu 等研究了弹性支撑下含孔隙 FGMs 层合圆柱壳受点载荷作用下的非线性振动特性, 揭示了壳的多重内共振行为^[8]. 针对不同的 FGMs 幂律分布函数, Hamid 等分析了横向激励下 FGMs 圆锥壳的非线性主共振行为^[9]. 利用 sigmoid 材料分布函数, Singh 等研究了几何尺寸、材料组分对横向载荷下陶瓷金属 FGMs 板非线性振动的影响, 分析了 FGMs 板进入混沌运动的路径^[10]. 考虑气动载荷和面内载荷的耦合作用, Yang 等推导了 FGMs 圆锥壳的非线性运动方程, 求解了圆锥壳的主共振响应和次谐波响应, 讨论了圆锥壳振动的混沌行为^[11]. 随着压电结构在工程中的广泛应用, 陆续有研究者采用压电结构作为控制器对 FGMs 结构进行主动控制. 以外层压电层为作动层, Nguyen 分析了压电功能梯度层合圆柱壳外加电场致非线性振动时域响应^[12]. Moghaddam 等分析了在谐波激励下施加电压对不同材料分布函数压电功能梯度壳非线性响应的影响^[13].

工程实践中, 航空航天领域的很多板壳结构在一定条件下可以简化为圆锥壳模型, 而且这些锥壳结构通常要承受振动冲击和高温高压等载荷的作用, 致使圆锥壳结构产生非线性振动. 为了推进 FGMs 在航空航天结构设计中的应用, 本文以 FGMs 圆锥壳为对象, 考虑 von Kármán 几何非线性推导了 FGMs 圆锥壳的非线性动力学方程, 讨论了不同材料分布以及陶瓷体积分数指数对 FGMs 圆锥壳非线性振动的影响, 研究了在不同激励幅值下锥角对 FGMs 圆锥壳运动形式的影响.

1 FGMs 圆锥壳模型

以图 1 所示的圆锥壳模型为对象, 假设锥角为 $2\alpha_0$, 壳厚为 h , 母线长为 L , 圆锥小端的中面半径为 R_1 , 大端的中面半径为 R_2 . $\alpha_0=0^\circ$ 时, 圆锥壳模型可以转化为圆柱壳; $\alpha_0=90^\circ$ 时, 圆锥壳模型则转化为圆环板. 以圆锥壳的中面为基准, 建立图 1 所示的柱坐标系 $Ox\theta z$. 坐标系中, x 表示圆锥壳的母线方向, θ 表示圆锥壳的圆周方

向, z 表示圆锥壳的厚度方向. 因此, 沿 x 轴上任一点的半径 R 可由 x 表示:

$$R(x) = R_1 + x \sin(\alpha_0). \tag{1}$$

假设 FGMs 圆锥壳受外部横向载荷 F 作用:

$$F(x, \theta, t) = F'(x, \theta) \cos(\Omega t), \tag{2}$$

式中, F' 表示振幅, Ω 表示载荷激励频率.

假设 FGMs 圆锥壳的外表面为纯陶瓷、内表面为纯金属, 而且材料沿厚度方向的分布用 Voigt 模型来描述, 则其物理属性表达式为

$$\begin{cases} P(z) = P_c V_c(z) + P_m V_m(z), \\ V_c + V_m = 1, \end{cases} \tag{3}$$

式中, P_c, P_m 分别表示陶瓷和金属的材料属性 (如弹性模量 E 、密度 ρ 、Poisson 比 ν), V_c, V_m 分别表示陶瓷和金属的体积分数.

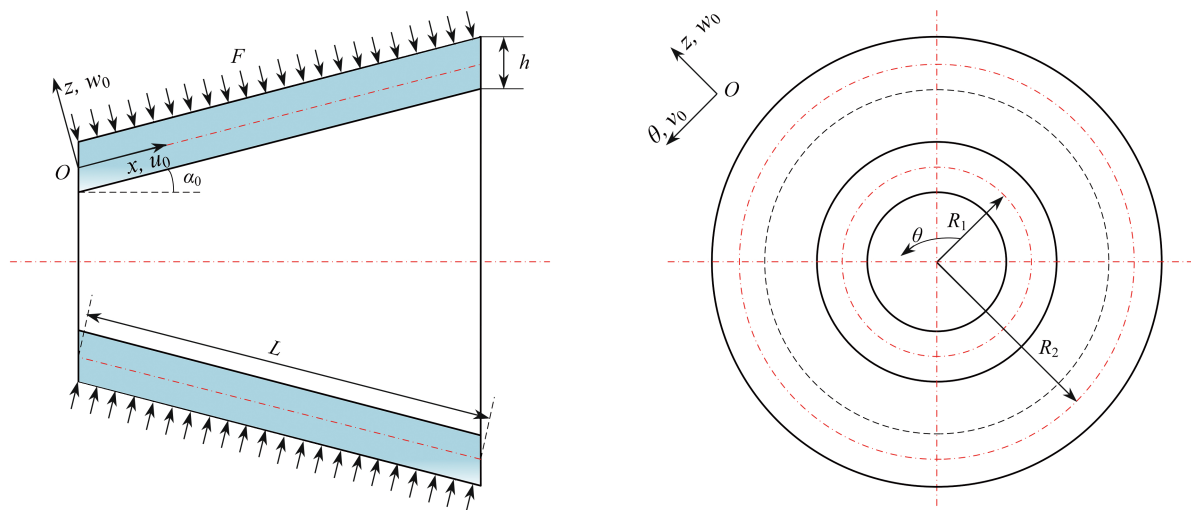


图 1 几何模型
Fig. 1 The geometric model

2 非线性运动方程

由一阶剪切变形理论, 圆锥壳上任意一点的位移沿 x, θ, z 方向的位移分量可由中面位移表示:

$$\begin{cases} u(x, \theta, z, t) = u_0(x, \theta, t) + z\varphi_x(x, \theta, t), \\ v(x, \theta, z, t) = v_0(x, \theta, t) + z\varphi_\theta(x, \theta, t), \\ w(x, \theta, z, t) = w_0(x, \theta, t), \end{cases} \tag{4}$$

式中, t 表示时间; u, v, w 分别表示圆锥壳上沿 x, θ, z 轴任意一点的位移; u_0, v_0, w_0 表示圆锥壳中面上的位移; $\varphi_x, \varphi_\theta$ 分别表示圆锥壳沿轴 x, θ 方向的转角.

考虑 von Kármán 非线性, 圆锥壳的应变与位移的关系表示为

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_\theta^0 &= \frac{1}{R(x)} \left(\sin(\alpha_0) u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + \cos(\alpha_0) w_0 + \frac{1}{2R(x)} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)^2 \right), \\ \gamma_{x\theta}^0 &= \frac{1}{R(x)} \frac{\partial u_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\sin(\alpha_0)}{R(x)} v_0 + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial \theta}, \\ \gamma_{\theta z}^0 &= \varphi_\theta + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - \frac{1}{R(x)} \cos(\alpha_0) v_0, \\ \gamma_{xz}^0 &= \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ \kappa_x &= \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \quad \kappa_\theta = \frac{1}{R(x)} \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{R(x)} \sin(\alpha_0) \varphi_x, \\ \kappa_{x\theta} &= \frac{1}{R(x)} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x} - \frac{1}{R(x)} \sin(\alpha_0) \frac{\partial \varphi_\theta}{\partial x}, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

式中, $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$ 表示任意一点沿 x, θ 方向的正应变, $\gamma_{x\theta}$ 表示 $xO\theta$ 平面内的切应变, γ_{xz} 表示 xOz 平面内的切应变, $\gamma_{\theta z}$ 表示 θOz 平面内的切应变; $\varepsilon_x^0, \varepsilon_\theta^0, \gamma_{x\theta}^0, \gamma_{xz}^0, \gamma_{\theta z}^0$ 表示中面曲面应变分量, $\kappa_x, \kappa_\theta, \kappa_{x\theta}$ 表示中面曲面曲率.

FGMs 圆锥壳的本构关系可表示为

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

式中, σ_x, σ_θ 是任意一点沿 x, θ 方向的正应力, $\tau_{x\theta}$ 是 $xO\theta$ 平面内的切应力, τ_{xz} 是 xOz 平面内的切应力, $\tau_{\theta z}$ 是 θOz 平面内的切应力; 刚度元素 $Q_{ij}(i, j=1, 2, \dots, 6)$ 可以表示为

$$\left\{ \begin{aligned} Q_{11} = Q_{22} &= \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)}, \quad Q_{12} = \frac{\nu(z)E(z)}{1-\nu^2(z)}, \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

FGMs 圆锥壳的应变能可以表示为

$$U = \frac{1}{2} \int_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{\theta z} \gamma_{\theta z}) R(x) dx d\theta dz. \quad (9)$$

FGMs 圆锥壳的动能可以表示为

$$K = \frac{1}{2} \int_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] R(x) dx d\theta dz. \quad (10)$$

横向外载荷所做的功可以表示为

$$W = \iint_S F(x, \theta, t) w R(x) dx d\theta. \quad (11)$$

根据 Hamilton 原理, FGMs 圆锥壳的运动方程可以表示为

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sin(\alpha_0)}{R(x)} (N_x - N_\theta) = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \quad (12a)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{2 \sin(\alpha_0)}{R(x)} N_{x\theta} + \frac{\cos(\alpha_0)}{R(x)} Q_{\theta z} = I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_\theta}{\partial t^2}, \quad (12b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sin(\alpha_0)}{R(x)} Q_{xz} - \frac{\cos(\alpha_0)}{R(x)} N_\theta + \frac{\partial \left(R(x) N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)}{\partial x} + \\ \frac{1}{R(x)} \frac{\partial \left(N_{x\theta} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial \left(N_{x\theta} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2(x)} \frac{\partial \left(N_\theta \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + F = I_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (12c)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sin(\alpha_0)}{R(x)} (M_x - M_\theta) - Q_{xz} = I_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}, \quad (12d)$$

$$\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2 \sin(\alpha_0)}{R(x)} M_{x\theta} - Q_{\theta z} = I_2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2}, \quad (12e)$$

式中, $N_x, N_\theta, N_{x\theta}$ 表示内力, M_x, M_θ 表示弯矩, $M_{x\theta}$ 表示扭矩, I_1, I_2, I_3 为惯性矩, 具体表达式为

$$(I_1 \quad I_2 \quad I_3) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) (1 \quad z \quad z^2) dz, \quad (13)$$

$$\begin{cases} \mathbf{N}_{3 \times 1} = (\mathbf{A}_{3 \times 3} \quad \mathbf{B}_{3 \times 3}) \boldsymbol{\varepsilon}_{0(6 \times 1)}^T, \\ \mathbf{M}_{3 \times 1} = (\mathbf{B}_{3 \times 3} \quad \mathbf{D}_{3 \times 3}) \boldsymbol{\varepsilon}_{0(6 \times 1)}^T, \end{cases} \quad (14)$$

式中, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ 表示应变向量, \mathbf{N} 表示内力矩阵, \mathbf{M} 表示弯矩矩阵, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ 表示刚度矩阵, 表达式分别为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (\varepsilon_x^0 \quad \varepsilon_\theta^0 \quad \gamma_{x\theta}^0 \quad \kappa_x \quad \kappa_\theta \quad \kappa_{x\theta}), \quad (15)$$

$$\begin{cases} \mathbf{N}_{3 \times 1} = (N_x \quad N_\theta \quad N_{x\theta})^T, \\ \mathbf{M}_{3 \times 1} = (M_x \quad M_\theta \quad M_{x\theta})^T, \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & & \\ & A_{22} & \\ & & A_{66} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & & \\ & B_{22} & \\ & & B_{66} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & & \\ & D_{22} & \\ & & D_{66} \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (17)$$

刚度元素 $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} (i, j=1, 2, \dots, 6)$ 的具体表达式为

$$(A_{ij} \quad B_{ij} \quad D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij} (1 \quad z \quad z^2) dz, \quad (18)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{xz} \\ Q_{\theta z} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \kappa_c \begin{pmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{pmatrix} dz, \quad (19)$$

式中, $Q_{xz}, Q_{\theta z}$ 表示剪切刚度, κ_c 表示剪切修正系数^[14], 取 5/6.

3 简支 FGMs 圆锥壳的非线性振动分析

假设 FGMs 圆锥壳两端简支, 满足边界条件的圆锥壳位移函数可以假设为

$$\begin{cases} u_0(x, \theta, t) = u_{mn}(t) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta), \\ v_0(x, \theta, t) = v_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta), \\ w_0(x, \theta, t) = w_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta), \\ \varphi_x(x, \theta, t) = p_{mn}(t) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta), \\ \varphi_\theta(x, \theta, t) = q_{mn}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin(n\theta), \end{cases} \quad (20)$$

式中, $u_{mn}(t), v_{mn}(t), w_{mn}(t), p_{mn}(t), q_{mn}(t)$ 表示关于时间 t 的变量, n, m 分别为环向波数和轴向波数.

假设外部横向载荷可以定义为三角函数形式:

$$F(x, \theta, t) = f \cos(\Omega t) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos(n\theta), \quad (21)$$

式中, f 表示外部横向载荷幅值.

为简化分析, 本文只讨论 FGMs 圆锥壳的横向振动^[15]. 将式 (20) 和 (21) 代入方程 (12), 采用 Galerkin 法可将 FGMs 圆锥壳振动模型简化为非线性单自由度振动系统:

$$M\ddot{w}_{mn} + C\dot{w}_{mn} + K_1 w_{mn} + K_2 w_{mn}^3 = F \cos(\Omega t), \quad (22)$$

式中, M 为广义质量, C 为比例阻尼, K_1 为线性刚度系数, K_2 为非线性刚度系数.

定义以下无量纲量:

$$\begin{cases} \bar{w} = \frac{w_{mn}}{h}, \\ \tau = \omega_0 t. \end{cases} \quad (23)$$

将式 (23) 代入方程 (22) 可得到

$$\ddot{\bar{w}} + 2\xi\dot{\bar{w}} + \bar{w} + \beta\bar{w}^3 = \bar{F}\cos(\omega_r\tau), \quad (24)$$

其中

$$\xi = \frac{C}{2M\omega_0}, \beta = \frac{h^2 K_2}{M\omega_0^2}, \bar{F} = \frac{F}{hM\omega_0^2}, \omega_r = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad (25)$$

式中, ω_0 为 FGMs 圆锥壳的线性频率, 表达式为

$$\omega_0 = \sqrt{K_1/M}. \quad (26)$$

假设方程 (24) 解的 Fourier 形式为

$$\bar{w} = A_1(\tau) \sin(\omega_r\tau) + B_1(\tau) \cos(\omega_r\tau). \quad (27)$$

取一阶截断, 可得

$$\begin{cases} \dot{\bar{w}} = (A_1\omega_r + \dot{B}_1)\cos(\omega_r\tau) + (\dot{A}_1 - B_1\omega_r)\sin(\omega_r\tau), \\ \ddot{\bar{w}} = (2\dot{A}_1 - B_1\omega_r)\omega_r\cos(\omega_r\tau) - (2\dot{B}_1 + A_1\omega_r)\omega_r\sin(\omega_r\tau). \end{cases} \quad (28)$$

将式 (27) 和 (28) 代入方程 (24), 通过忽略高阶谐波项, 同时考虑圆锥壳的稳态响应, 比较 $\cos(\omega_r\tau)$ 和 $\sin(\omega_r\tau)$ 项的系数, 可得

$$\begin{cases} A_1\left(1 - \omega_r^2 + \frac{3}{4}\beta\chi^2\right) - B_1(2\xi\omega_r) = 0, \\ A_1(2\xi_m\omega) + B_1\left(1 - \omega_r^2 + \frac{3}{4}\beta\chi^2\right) = \bar{F}. \end{cases} \quad (29)$$

令

$$\chi^2 = A_1^2 + B_1^2, \quad (30)$$

式中, χ 表示无量纲振动幅值.

方程 (29) 可进一步简化为

$$\chi^2 \left[\left(1 - \omega_r^2 + \frac{3}{4}\beta\chi^2\right)^2 + (2\xi\omega_r)^2 \right] = \bar{F}^2. \quad (31)$$

4 结果分析与讨论

4.1 模型验证

为验证 FGMs 圆锥壳动力学模型的可靠性, 分别将模型退化为 FGMs 圆柱壳和纯金属圆锥壳. 表 1 所示是不锈钢和 Ni 的材料参数. 通过式 (26) 计算线性模态频率, 并与文献 [1] 结果进行对比, 结果如表 2 所示, 其

中 $f=\omega_0/(2\pi)$. 表 3 反映了纯金属圆锥壳模态频率随环向波数的变化情况. 结果表明, 本文模型得到的计算结果和文献 [16-17] 结果比较吻合.

表 1 FGMs 圆柱壳的材料参数
Table 1 Material parameters of FGMs cylindrical shells

material	elastic module E / GPa	Poisson's ratio ν	density ρ / (kg/m ³)
stainless steel	207.788	0.317 7	8 166
Ni	205.098	0.3	8 900

表 2 FGMs 圆柱壳频率对比 ($R_1=1, R_1/h=500, L/R=20, m=1$)
Table 2 Comparison of frequencies of FGMs cylindrical shells ($R_1=1, R_1/h=500, L/R=20, m=1$)

n	f /HZ	
	ref. [1]	present
6	16.455	16.655
7	22.635	22.827
8	29.771	29.952
9	37.862	38.029
10	46.905	47.056

表 3 纯金属圆锥壳频率对比 ($R_2=1, R_2/h=100, L\sin(\gamma_0)/R_2=0.25, \alpha_0=30^\circ, m=1$)
Table 3 Comparison of frequencies of pure metal conical shells ($R_2=1, R_2/h=100, L\sin(\gamma_0)/R_2=0.25, \alpha_0=30^\circ, m=1$)

n	$\Omega=\omega_0 R_2((1-\nu^2)\rho/E)^{1/2}$		
	ref. [16]	ref. [17]	present
2	0.794 3	0.790 4	0.840 2
3	0.708 5	0.727 4	0.741 2
4	0.619 9	0.633 9	0.642 1
5	0.543 7	0.551 4	0.558 6
6	0.489 6	0.493 0	0.499 3
7	0.462 3	0.463 2	0.468 2
8	0.462 7	0.462 3	0.465 4
9	0.488 2	0.487 0	0.488 3

4.2 幅频响应分析

假设 FGMs 圆锥壳的材料组分为 Si₃N₄ 以及 SUS304. 数值分析时, 两种材料的性能分别取: 弹性模量 $E_c=322.27$ GPa, $E_m=207.787 7$ GPa, 密度 $\rho_c=2 470$ kg/m³, $\rho_m=8 166$ kg/m³, Poisson 比 $\nu_c=0.3, \nu_m=0.317 7$. 圆锥壳的几何参数分别为: $L/R_1=4, R_1/h=20, h=0.01$ m, $\alpha_0=15^\circ$. 圆锥壳施加的外部载荷幅值取 $\bar{F}=10$, 频率比 $\omega_r=1$, 阻尼比取 $\xi=0.05$. 圆锥壳的振动模态形式为 $m=1, n=3$. 本文若无特殊说明, 所采用的参数保持不变. 幂律分布 (P-FGM)、指数分布 (E-FGM) 以及 sigmoid 分布 (S-FGM) 是 FGMs 常见的分布模型^[1,5], 对应的陶瓷体积分率表达式为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{P-FGM: } V_c = \left(\frac{h+2z}{2h}\right)^N, \\ \text{E-FGM: } V_c = \frac{e^{\left(\frac{h+2z}{2h}\right)^N} - 1}{e - 1}, \\ \text{S-FGM: } V_c = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{h+2z}{h}\right)^N, & -\frac{h}{2} < z < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{h-2z}{h}\right)^N, & 0 < z < \frac{h}{2}. \end{cases} \end{array} \right. \quad (32)$$

图 2 所示是不同陶瓷体积分率随陶瓷体积分率指数 N 的变化规律. 图 3 探究了不同材料分布函数对

FGMs 圆锥壳非线性振动的影响. 结果表明, FGMs 圆锥壳的材料分布沿厚度方向服从幂律分布和指数分布模型时, 随着陶瓷体积分数指数的增大, FGMs 圆锥壳的幅值增大, 这是因为陶瓷含量减少, 圆锥壳的刚度下降, FGMs 圆锥壳的渐硬弹簧特性减弱. 反之, 采用 sigmoid 分布模型, 随着陶瓷体积分数指数的增大, 渐硬弹簧特性增强.

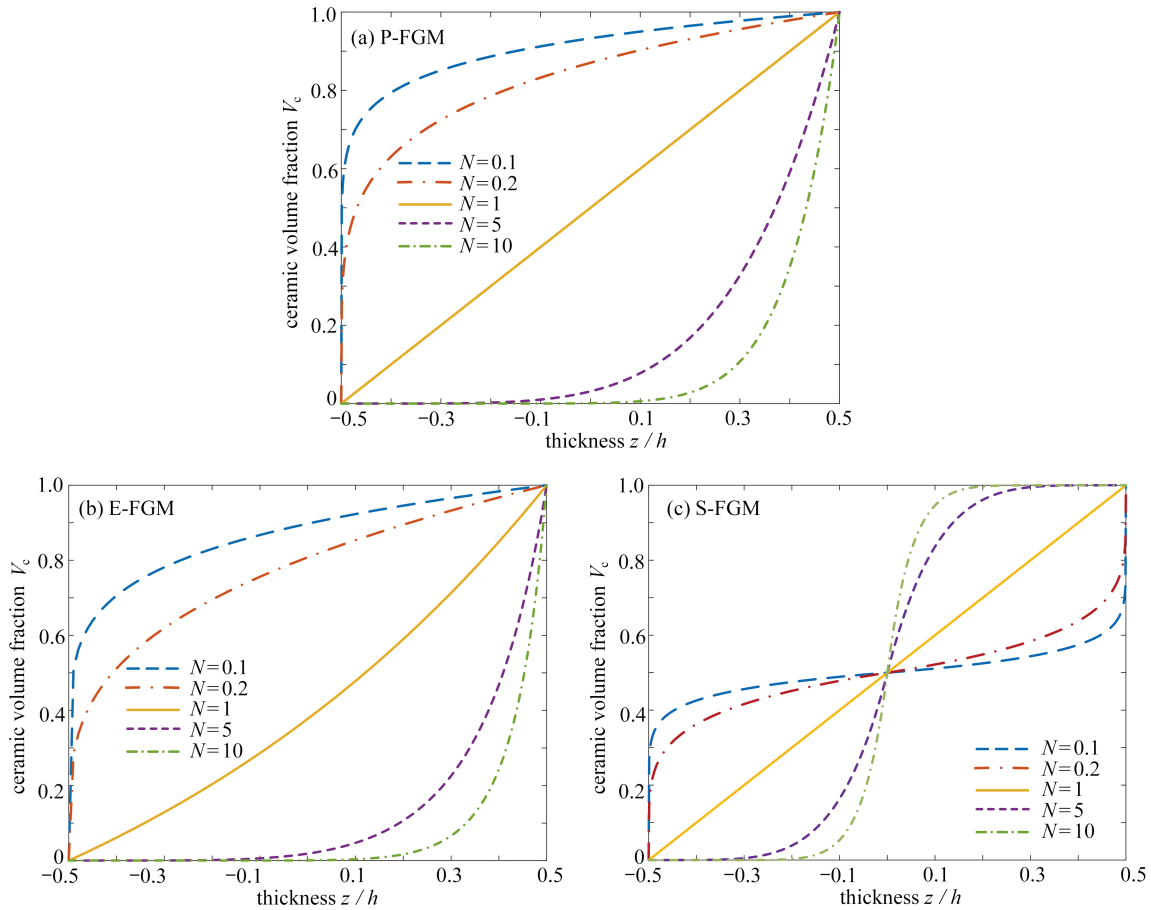
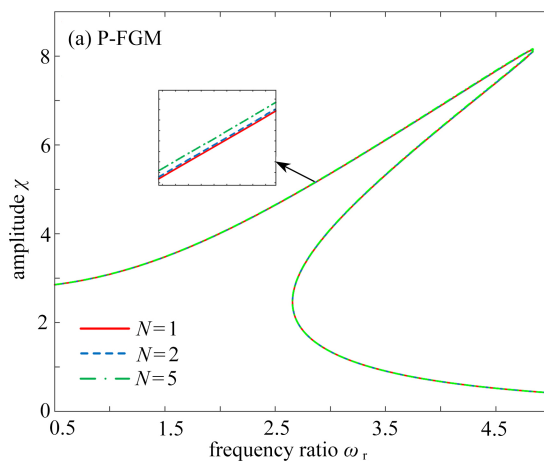


图2 陶瓷体积分数指数沿厚度方向的变化
 Fig. 2 Variations of ceramic volume fraction exponents along the thickness direction

4.3 分岔混沌分析

图3 结果表明, 陶瓷材料分数指数对 FGMs 圆锥壳的非线性振动影响不明显. 考虑到幂律分布在 FGMs 结构加工过程中更易实现, 下面基于幂律分布函数进一步揭示 FGMs 圆锥壳丰富复杂的非线性现象. 计算时, 取分数指数 $N=1$. 图4、图5 讨论了圆锥锥度以及载荷幅值对结构非线性特性的影响.



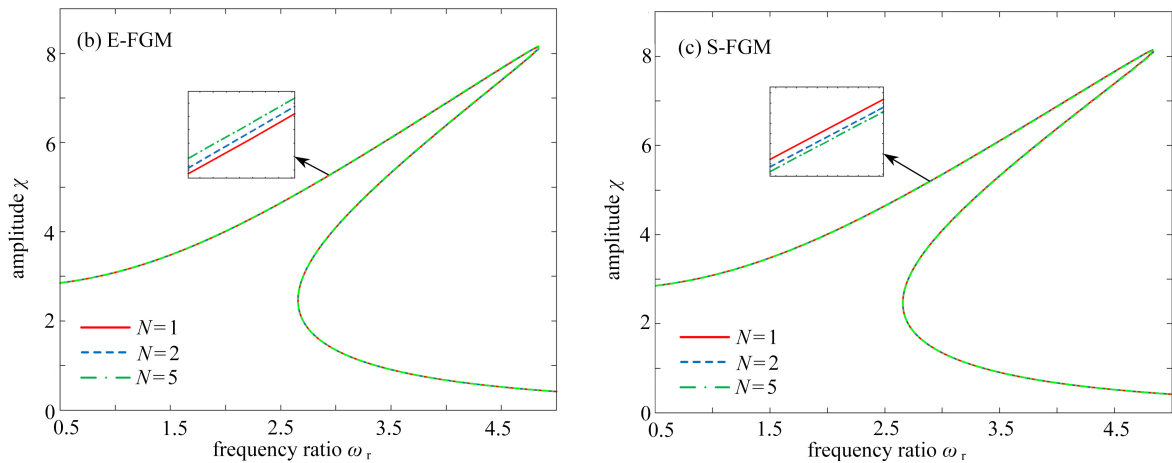


图 3 陶瓷体积分数指数对 FGMs 圆锥壳幅频响应特性曲线的影响

Fig. 3 Effects of ceramic volume fraction exponents on nonlinear amplitude frequency responses of FGMs conical shells

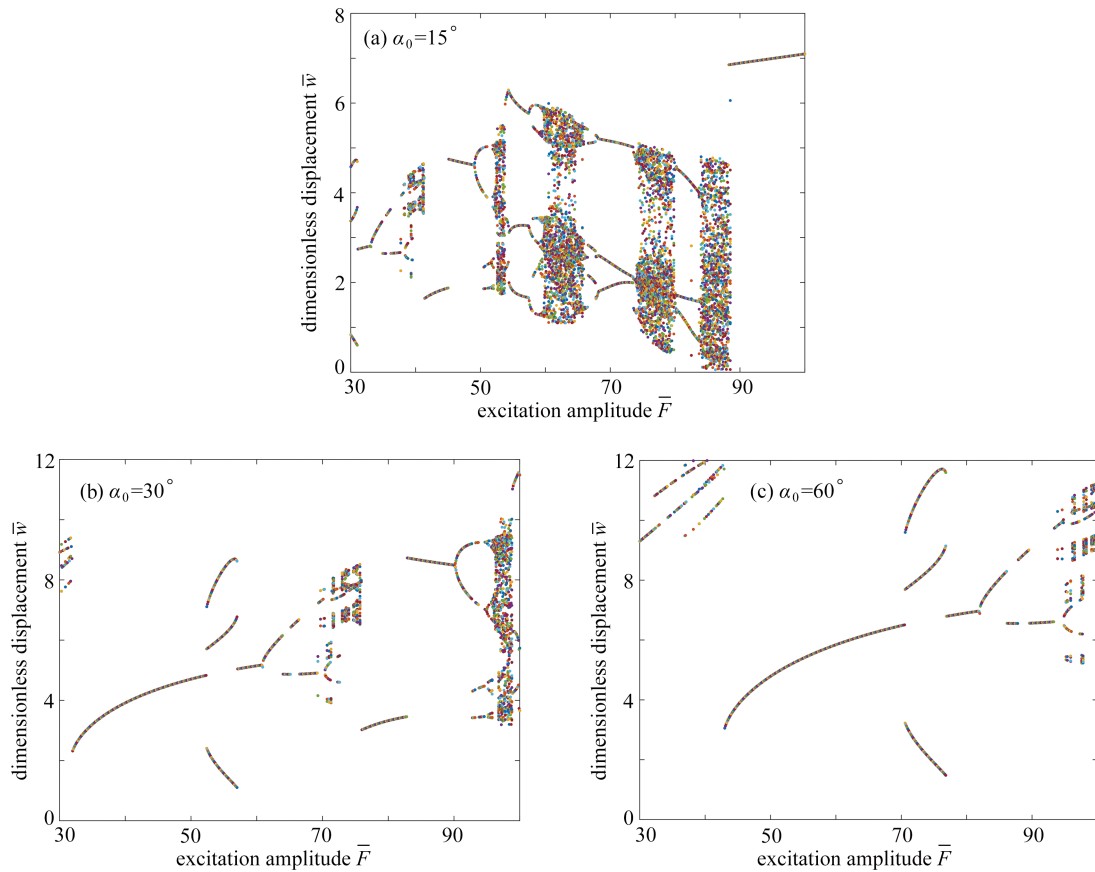
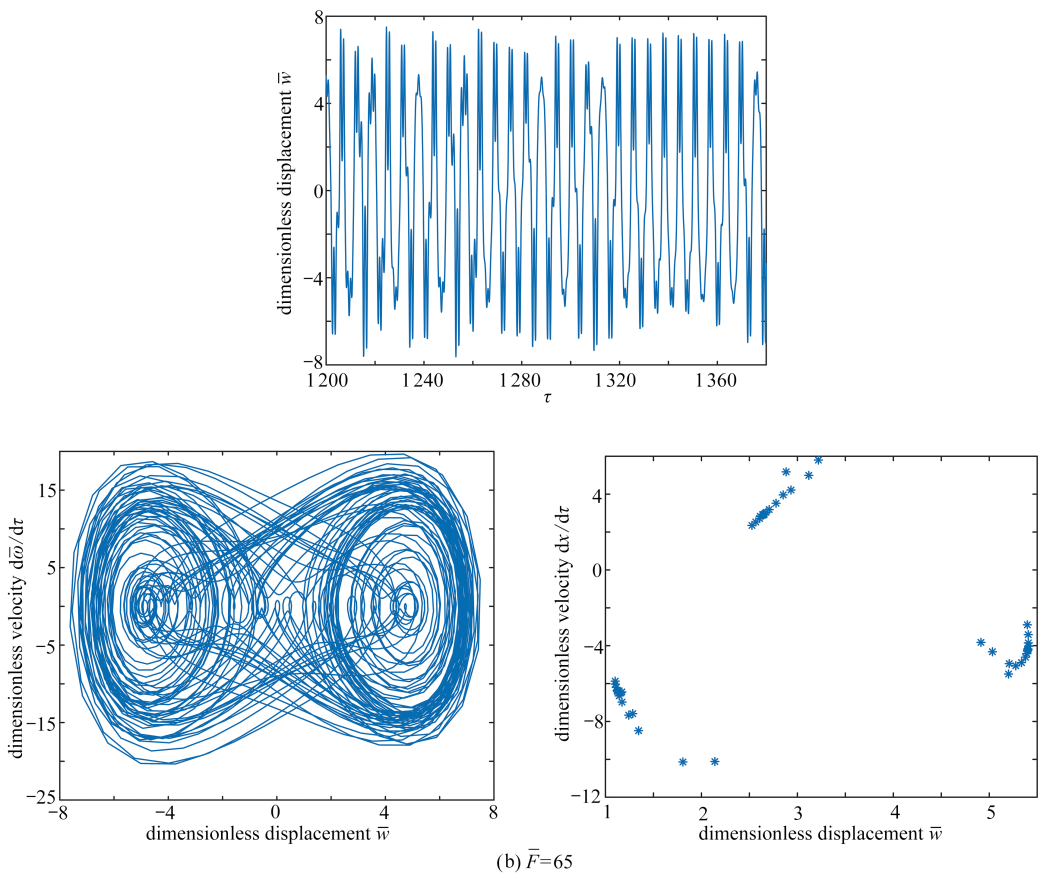
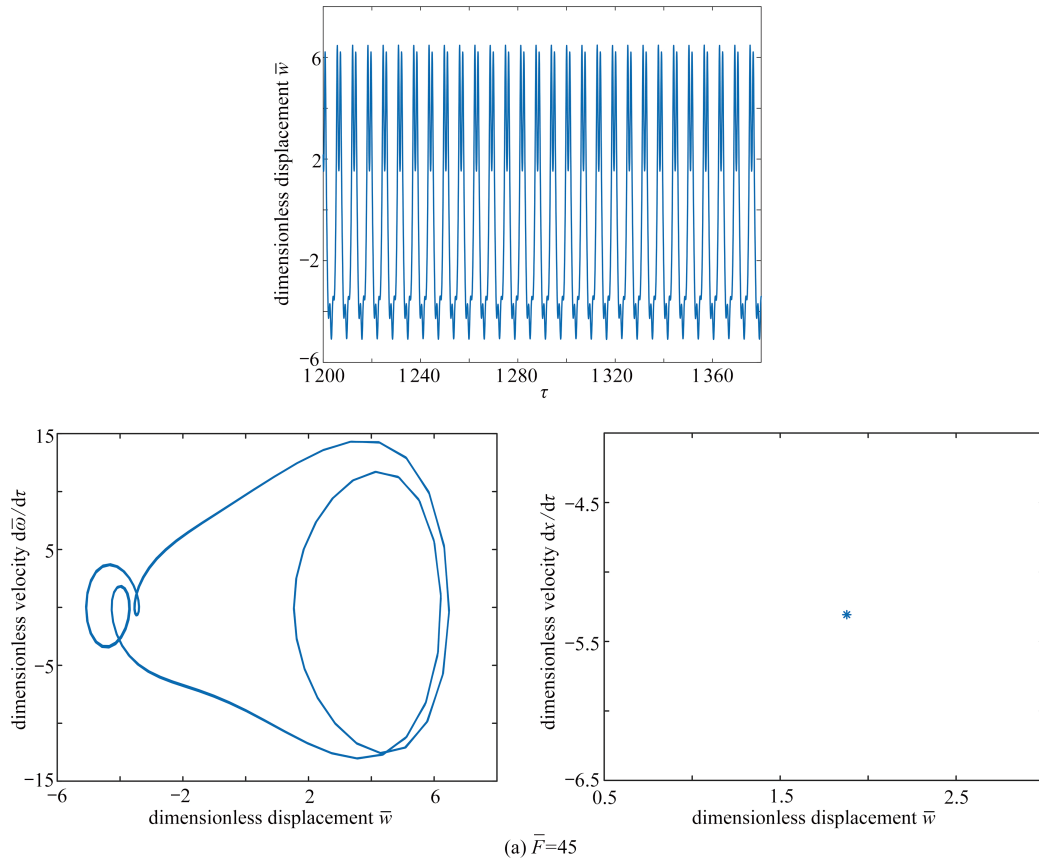


图 4 不同锥度下 FGMs 圆锥壳随激励幅值变化的分岔图

Fig. 4 The bifurcation diagrams of FGMs conical shells for different excitation amplitudes under different cone angles

图 4 表明, 当 $\alpha_0=15^\circ$ 时, 圆锥壳存在多个混沌运动区域, 从周期运动到多周期运动再到混沌运动; 当激励载荷达到 52 ~ 54, 60 ~ 68, 74 ~ 80 以及 84 ~ 88 时, 非线性进入混沌运动. 当 α_0 增大到 30° 时, 圆锥壳的混沌运动只存在一个载荷幅值区间, 混沌产生所需要的激励幅值需要达到 95 ~ 98. 在载荷小于该值范围时, 圆锥壳只表现为周期以及多周期运动. 当 α_0 继续增加到 60° 时, 圆锥壳在 30 ~ 100 的激励幅值区间内不再出现混沌现象. 换句话说, 增大圆锥壳的锥度, 结构的混沌现象将会被延后, 甚至消失.

考虑 $\alpha_0=15^\circ$ 时, FGMs 圆锥壳的分岔现象更为丰富. 以 $\alpha_0=15^\circ$ 为例, 图 5 给出了激励幅值取 45, 65, 72 时, FGMs 圆锥壳相应的时间历程、相图曲线和 Poincaré 截面图, 观察到圆锥壳分别表示为周期、混沌以及多周期运动. 通过增大圆锥壳的锥度可以有效地延缓运动不稳定性的发生.



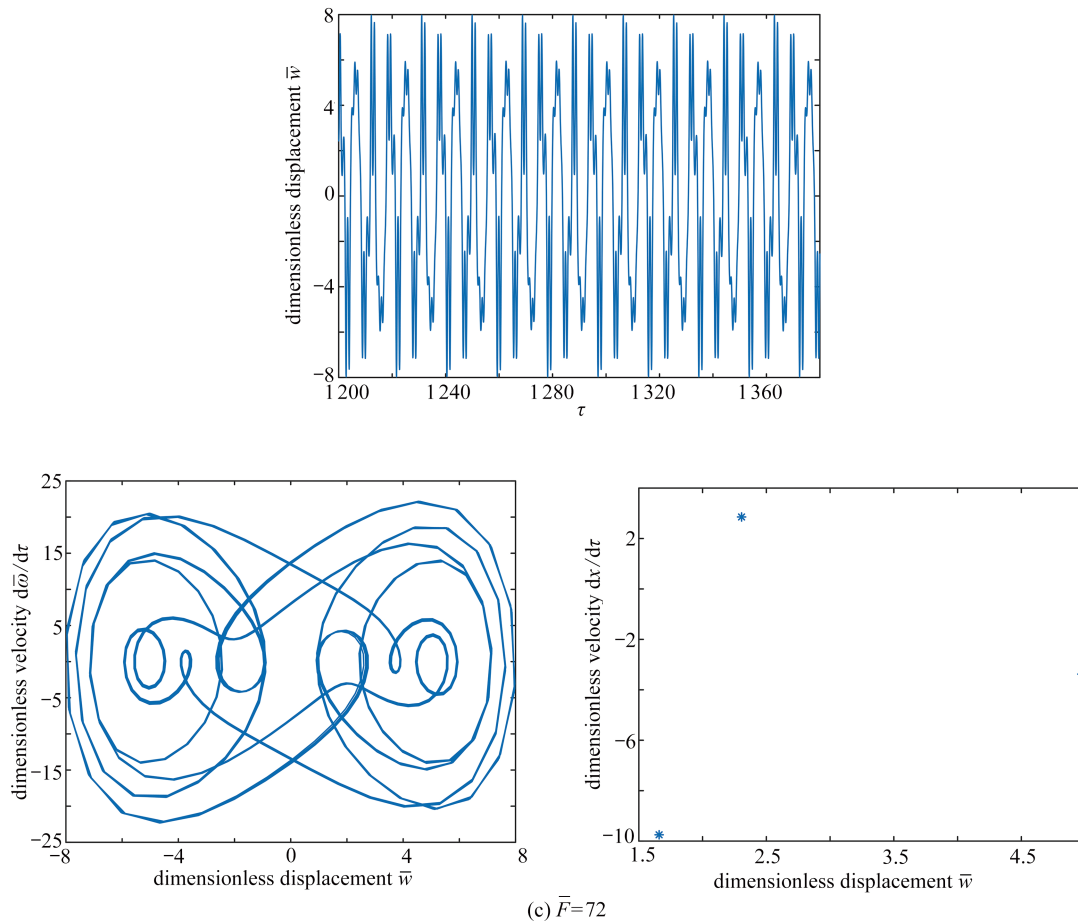


图 5 不同激励幅值下 FGMs 圆锥壳时间历程曲线、速度位移相图以及 Poincaré 截面图 ($\alpha_0=15^\circ$)

Fig. 5 The time history diagrams, phase plots and Poincaré maps of FGMs conical shells under different excitation amplitudes ($\alpha_0=15^\circ$)

5 结 论

本文采用 Hamilton 原理以及 Galerkin 法推导了 FGMs 圆锥壳的运动方程, 利用谐波平衡法求解了 FGMs 圆锥壳的非线性振动幅频响应, 讨论了不同材料分布函数下陶瓷体积分指数对 FGMs 圆锥壳非线性特性的影响, 分析了 FGMs 圆锥壳的分岔现象, 讨论了圆锥角和外部载荷幅值对 FGMs 圆锥壳运动状态的影响. 主要结论如下:

- 1) 材料分布函数对 FGMs 圆锥壳的非线性特性影响不明显, FGMs 圆锥壳的振动特性都呈现渐硬弹簧非线性特性.
- 2) 外部激励幅值的变化导致 FGMs 圆锥壳产生丰富的非线性现象, 结构出现周期、多周期、混沌运动.
- 3) 锥角较小时, FGMs 圆锥壳会出现多个混沌区域, 圆锥壳的运动具有不可预测性; 锥角增大, 混沌区域集中发生在大载荷幅值 95 ~ 100 的范围内, 圆锥壳的混沌运动产生条件更为困难.

参考文献 (References):

- [1] LOY C T, LAM K Y, REDDY J N. Vibration of functionally graded cylindrical shells[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1999, **41**(3): 309-324.
- [2] 李世荣, 苏厚德, 程昌钧. 热环境中粘贴压电层功能梯度材料梁的自由振动[J]. *应用数学和力学*, 2009, **30**(8): 907-918. (LI Shirong, SU Houde, CHENG Changjun. Free vibration of functionally graded material beams with surface-bonded piezoelectric layers in thermal environment[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, **30**(8): 907-918. (in Chinese))
- [3] 徐坤, 陈美霞, 谢坤. 正交各向异性功能梯度材料平板振动分析[J]. *噪声与振动控制*, 2016, **36**(4): 14-20. (XU Kun,

- CHEN Meixia, XIE Kun. Vibration analysis of orthotropic functionally graded plates[J]. *Noise and Vibration Control*, 2016, **36**(4): 14-20.(in Chinese))
- [4] 李文达, 杜敬涛, 杨铁军, 等. 弹性边界约束旋转功能梯度圆柱壳结构自由振动行波特性分析[J]. *应用数学和力学*, 2015, **36**(7): 710-724. (LI Wenda, DU Jingtao, YANG Tiejun, et al. Traveling wave mode characteristics of rotating functional gradient material cylindrical shell structures with elastic boundary constraints[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(7): 710-724.(in Chinese))
- [5] 田宏业, 刘朋, 胡志宽, 等. 基于半解析法的功能梯度圆锥板自由振动特性[J]. *船舶力学*, 2021, **25**(3): 351-359. (TIAN Hongye, LIU Peng, HU Zhikuan, et al. Free vibration characteristics of functionally graded conical panels with complex boundary conditions[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2021, **25**(3): 351-359.(in Chinese))
- [6] LIANG X, ZHA X, YU Y, et al. Semi-analytical vibration analysis of FGM cylindrical shells surrounded by elastic foundations in a thermal environment[J]. *Composite Structures*, 2019, **223**: 110997.
- [7] 杜长城, 李映辉, 金学松. 热环境中功能梯度圆柱壳内共振非线性模态[J]. *振动与冲击*, 2014, **33**(6): 161-164, 178. (DU Changcheng, LI Yinghui, JIN Xuesong. Nonlinear normal modes of functionally graded cylindrical shells with internal resonance in thermal environment[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2014, **33**(6): 161-164, 178.(in Chinese))
- [8] LIU Y F, QIN Z Y, CHU F L. Nonlinear forced vibrations of FGM sandwich cylindrical shells with porosities on an elastic substrate[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, **104**(2): 1007-1021.
- [9] HAMID A, HABIB A. Nonlinear vibration analysis of FGM truncated conical shells subjected to harmonic excitation in thermal environment[J]. *Mechanics Research Communications*, 2020, **104**(12): 103499.
- [10] SINGH S J, HARSHA S P. Nonlinear vibration analysis of sigmoid functionally graded sandwich plate with ceramic-FGM-metal layers[J]. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2020, **8**(1): 67-84.
- [11] YANG S W, ZHANG W, HAO Y X, et al. Nonlinear vibrations of FGM truncated conical shell under aerodynamics and in-plane force along meridian near internal resonances[J]. *Thin-Walled Structures*, 2019, **142**: 369-391.
- [12] NGUYEN D D. Nonlinear thermo- electro-mechanical dynamic response of shear deformable piezoelectric sigmoid functionally graded sandwich circular cylindrical shells on elastic foundations[J]. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 2018, **20**(3): 351-378.
- [13] MOGHADDAM S M F, AHMADI H. Active vibration control of truncated conical shell under harmonic excitation using piezoelectric actuator[J]. *Thin-Walled Structures*, 2020, **151**: 106642.
- [14] 盛国刚. 压电与功能梯度圆柱壳的力学特性研究[D]. 博士学位论文. 上海: 上海交通大学, 2009. (SHENG Guogang. Research on the property of mechanics of piezoelectric and functionally graded cylindrical shells[D]. PhD Thesis. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2009. (in Chinese))
- [15] ZHU C S, FANG X Q, LIU J X, et al. Smart control of large amplitude vibration of porous piezoelectric conical sandwich panels resting on nonlinear elastic foundation[J]. *Composite Structures*, 2020, **246**: 112384.
- [16] NAJAFOV A M, SOFIYEV A H. The non-linear dynamics of FGM truncated conical shells surrounded by an elastic medium[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2013, **66**: 33-44.
- [17] LIEW K M, NG T Y, ZHAO X. Free vibration analysis of conical shells via the element-free kp-Ritz method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, **281**(3/5): 627-645.