

基于简化的应变梯度理论下Kirchhoff板模型边值问题的提法及其应用

徐晓建, 邓子辰

Boundary Value Problems of a Kirchhoff Type Plate Model Based on the Simplified Strain Gradient Elasticity and the Application

XU Xiaojian and DENG Zichen

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420286>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

[一类指定应力问题的变分原理与应用](#)

A Variational Principle and Applications for a Class of Specified Stress Problems

应用数学和力学. 2021, 42(4): 331-341

[基于非局部应变梯度理论功能梯度纳米板的弯曲和屈曲研究](#)

Bending and Buckling of Functionally Graded Nanoplates Based on the Nonlocal Strain Gradient Theory

应用数学和力学. 2021, 42(1): 15-26

[基于改进Chebyshev级数的层合结构-振动分析新理论](#)

A New Layerwise Theory for Vibration Analysis of Laminated Structures Based on Modified Chebyshev Polynomials

应用数学和力学. 2019, 40(1): 58-74

[热环境中旋转功能梯度纳米环板的振动分析](#)

Vibration Analysis of Rotating Functionally Gradient Nano Annular Plates in Thermal Environment

应用数学和力学. 2020, 41(11): 1224-1236

[有限位移理论线弹性力学二类和三类混合变量的变分原理及其应用](#)

Variational Principles for Dual and Triple Mixed Variables of Linear Elasticity With Finite Displacements and the Application

应用数学和力学. 2017, 38(11): 1251-1268

[新型轻质复合材料夹芯结构振动阻尼性能研究进展](#)

Progresses in the Study on Vibration Damping Properties of Novel Lightweight Composite Sandwich Structures

应用数学和力学. 2017, 38(4): 369-398



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

基于简化的应变梯度理论下 Kirchhoff 板模型 边值问题的提法及其应用*

徐晓建^{1,2}, 邓子辰²

(1. 长安大学 公路学院 特殊地区公路工程教育部重点实验室, 西安 710064;
2. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072)

(本刊编委邓子辰来稿)

摘要: 考虑应变梯度和速度梯度的影响, 建立薄板控制微分方程及给出其边值问题的提法, 修正了前人给出的薄板角点条件. 采用 Levy 法, 给出受分布力作用下简支板的挠度及自由振动频率的解析解. 通过与文献中分子动力学数据对比, 验证了该文模型的有效性并提出校核材料参数的一种方法. 研究表明, 增大弹性地基和应变梯度参数可以有效提高板的等效刚度, 而速度梯度参数则相反. 该文提出的板的边值问题为研究薄板在复杂支撑边界及外荷载等条件提供了理论依据. 同时, 有望为其有限元法、有限差分法和基于能量原理的 Galerkin 法等数值方法提供理论依据.

关键词: 板; 振动; 位移; 应变梯度理论; 变分原理

中图分类号: TB383; O342 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420286

Boundary Value Problems of a Kirchhoff Type Plate Model Based on the Simplified Strain Gradient Elasticity and the Application

XU Xiaojian^{1,2}, DENG Zichen²

(1. Key Laboratory for Special Area Highway Engineering of Ministry of Education,
School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, P.R.China;

2. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China)

(Contributed by DENG Zichen, M. AMM Editorial Board)

Abstract: A new type of thin plate model and the related nonclassical boundary value problems were established within the framework of strain gradient and velocity gradient elasticity. The closed-form solutions of deflections and free vibrational frequencies of a simply supported plate resting on an elastic foundation were obtained. The results of the present model agree well with those predicted by the molecular dynamics. Numerical results show that, the elastic foundation and the strain gradient parameter have a stiffness-hardening effect, while the velocity gradient parameter has a stiffness-softening effect. The proposed boundary value problems are of great significance to the study of the mechanical behaviors of plates

* 收稿日期: 2021-09-16; 修订日期: 2021-10-13

基金项目: 国家自然科学基金 (12072266); 中央高校基本科研业务费 (300102219315); 陕西省自然科学基金基础研究计划 (2020JQ-337)

作者简介: 徐晓建 (1986—), 男, 副教授, 博士 (E-mail: xuxiaojian@mail.nwpu.edu.cn);

邓子辰 (1964—), 男, 教授, 博士生导师 (通讯作者. E-mail: dweifan@nwpu.edu.cn).

引用格式: 徐晓建, 邓子辰. 基于简化的应变梯度理论下 Kirchhoff 板模型边值问题的提法及其应用[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(4): 363-373.

under complex boundary conditions and external loadings. Furthermore, it will be useful for developing effective numerical methods such as the finite element method, the finite difference method and the Galerkin method.

Key words: plate; vibration; deflection; strain gradient theory; variational principle

引言

板结构广泛应用于航空航天、土木、机械等领域,在几乎所有工程科学中广泛存在.因此,对板结构的经典理论力学的研究一直是前沿课题.然而,随着科技的快速发展,尤其是纳米技术的革新,人们发现,越来越多工程结构的力学行为用经典结构力学理论预测会得到很大的误差^[1-2].例如,Lam等^[3]的微梁弯曲实验结果表明,梁的归一化刚度与其厚度有密切联系;而传统梁模型的归一化刚度却与梁厚度无关.Chen等^[4]研究表明,ZnO结构的弹性模量具有尺寸效应.随着研究的进一步深入,人们发现,材料所表现出的尺寸效应随着材料/结构尺寸的减小逐渐明显^[5-6].

因此,如何建立能够准确表征结构/材料尺寸效应的力学模型,近年来一直是力学工作者研究的关键科学问题和热点问题^[7].基于此,Wang等^[8-9]采用分子动力学和力学模型研究发现,碳纳米管具有尺寸效应的波动行为,可由应变梯度模型较好地预测.Ansari等^[10]研究了薄板振动问题,并给出了非经典板模型与分子动力学结果吻合得很好的结论.Khakalo等^[11]研究了具有三维三角形结构的蜂窝板结构的力学模型,并利用均匀化方法给出了非经典材料参数.王碧蓉等^[12]通过修正剪力非局部参数,研究了双臂碳纳米管的波传播特性.

近年来,研究者们广泛关注板挠度的解析解及数值解的研究^[13-14].然而,基于简化的应变梯度理论的薄板模型的研究还较少.为弥补这一不足,本文提出一种新型薄板理论,并构建其边值问题.以弹性地基板为例,研究了尺寸效应参数对薄板挠度解及自由振动频率的影响.

1 应变梯度理论及 Kirchhoff 板模型

1.1 应变梯度理论

根据简化的应变梯度理论^[15-16],体积为 V 、平面域为 Ω 的线弹性体的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \tau_{ijk} \eta_{ijk}) dV, \quad (1)$$

式中

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

$$\eta_{ijk} = \varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2} (u_{i,jk} + u_{j,ik}) \quad (3)$$

分别为应变张量和应变梯度张量(不失一般性,本文中符号均符合张量的符号约定);高阶应力张量 τ_{ijk} 为

$$\tau_{ijk} = l_2^2 \sigma_{ijk}, \quad (4)$$

其中, l_2 为表征由于应变梯度引起的材料尺度效应的参数.

根据文献^[17],外力功为

$$W = \int_V \hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} + \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{u}_{,n}) d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} ds + \sum_{c=1}^{N_c(V)} \hat{\mathbf{F}}_c \cdot \mathbf{u}_c, \quad (5)$$

式中, $\hat{\mathbf{b}}$, $\hat{\mathbf{t}}$, $\hat{\mathbf{m}}$, $\hat{\mathbf{f}}$, $\hat{\mathbf{F}}_c$ 和 Γ 分别为体力、面内合力、面内弯矩、边界线力、角点力和边界线.

系统的总动能包括经典动能和速度梯度引起的动能,即

$$T = \frac{1}{2} \int_V (\rho \dot{u}_i^2 + \rho l_1^2 \dot{u}_{i,j}^2) dV, \quad (6)$$

式中, ρ , l_1 和 $\dot{u}_{i,j}$ 分别为体密度、表征速度梯度的材料参数和速度梯度.

系统的总势能由动能、应变能和外力功三个部分组成,其表达式为

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_V (\rho \dot{u}_i^2 + \rho l_1^2 \dot{u}_{i,j}^2) dV - \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \tau_{ijk} \eta_{ijk}) dV + \int_V \hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{u} dV + \\ & \int_{\Omega} (\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} + \hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{u}_{,n}) d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} ds + \sum_{c=1}^{N_c(V)} \hat{\mathbf{F}}_c \cdot \mathbf{u}_c. \end{aligned} \quad (7)$$

1.2 薄板方程及边界条件

考虑一各向同性的线弹性均质材料, 厚度为 h , 在 xOy 平面内所围成的平面域为 Ω , 该域边界为分段光滑曲线 Γ , 切线方向为 s , 外法线方向为 n , 如图 1 所示. 规定 n 到 s 的转向与 x 轴到 y 轴的转向相同时为正, 并且 n 和坐标 x 的夹角为 θ . 假定薄板承受一横向载荷 p_3 、边界弯矩 \hat{M}_{nm} 、高阶边界弯矩 \hat{M}_{nmn} 和边界力 \hat{Q}_n 的作用, 横向位移为 $w(x, y)$.

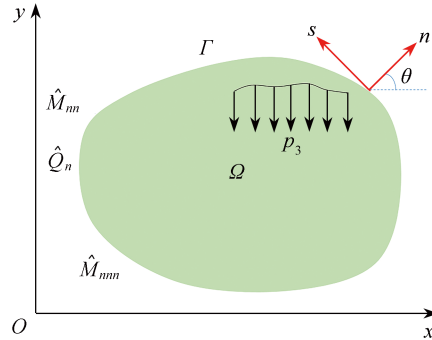


图 1 板边界及荷载
Fig. 1 Boundary conditions and loadings

由薄板的假定, 得以下几何关系:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -zw_{,\alpha\beta}. \quad (8)$$

本文中, 下标中的希腊字母仅取 x, y .

在平面应力状态下的各向同性薄板的本构方程为

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\mu^2} [\mu\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + (1-\mu)\varepsilon_{\alpha\beta}], \quad (9)$$

式中, E, μ 和 δ 分别为板的弹性模量、Poisson 比和 δ 函数.

令 $R_{\alpha\beta}$ 和 $M_{\alpha\beta}$ 分别为厚度引起的单位宽度广义力和经典弯矩, 定义如下物理量:

$$\begin{cases} R_{\alpha\beta} = l_2^2 \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta,z} dz, \\ M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} z dz. \end{cases} \quad (10)$$

则以位移 w 表示的弯矩为

$$\begin{cases} M_{xx} = -D(w_{,xx} + \mu w_{,yy}), \\ M_{yy} = -D(w_{,yy} + \mu w_{,xx}), \\ M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\mu)w_{,xy}, \end{cases} \quad (11)$$

式中, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ 为板的抗弯刚度.

由式 (9) 和 (10) 可知, 由厚度引起的广义力与弯矩存在如下关系:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{12l_2^2}{h^2} M_{\alpha\beta}. \quad (12)$$

在平面应力状态下, 可以忽略所有带有 z 指标的应力, 如 $\sigma_{\alpha z} = 0$. 但由式 (3) 和 (8) 可知, $\eta_{\alpha\beta z} = \varepsilon_{\alpha\beta,z} = -w_{,\alpha\beta} \neq 0$. 因此, 文献 [18] 简单地忽略 $\eta_{\alpha\beta z}$ 对应变能的影响, 会产生较大的误差.

根据式 (1)、(3) 和 (4), 应变能的一阶变分为

$$\delta U = \int_V (\sigma_{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta\gamma} \delta \eta_{\alpha\beta\gamma} + \tau_{\alpha\beta z} \delta \eta_{\alpha\beta z}) dV = \int_{\Omega} \int_z (\sigma_{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + l_2^2 \sigma_{\alpha\beta,\gamma} \delta \varepsilon_{\alpha\beta,\gamma} + l_2^2 \sigma_{\alpha\beta,z} \delta \varepsilon_{\alpha\beta,z}) dz d\Omega. \quad (13)$$

结合式(8)和式(13),并考虑到式(10)中弯矩的定义,可以改写式(13).随后对所得方程的指标 γ 进行一次分部积分后,式(13)最终可改写为如下三个积分之和:

$$\delta U = \underbrace{\int_{\Omega} (-M_{\alpha\beta} + l_2^2 M_{\alpha\beta,\gamma\gamma}) \delta w_{,\alpha\beta} d\Omega}_{I_1} + \underbrace{\int_{\Omega} -R_{\alpha\beta} \delta w_{,\alpha\beta} d\Omega}_{I_2} + \underbrace{l_2^2 \int_{\Omega} (-M_{\alpha\beta,\gamma} \delta w_{,\alpha\beta})_{,\gamma} d\Omega}_{I_3}. \quad (14)$$

将指标依次代入,式(14)中 I_1 可展开为如下分量形式:

$$I_1 = -\mathcal{L}_2 \int_{\Omega} (M_{xx} \delta w_{,xx} + M_{yy} \delta w_{,yy} + 2M_{xy} \delta w_{,xy}) d\Omega. \quad (15)$$

如无特殊说明,本文公式中的偏微分算子 \mathcal{L}_2 仅作用于弯矩,且 $\mathcal{L}_2(\cdot) = 1 - l_2^2(\cdot)_{,\gamma\gamma}$.

式(15)可通过使用两次 Gauss 散度定理,最后结果为

$$-\mathcal{L}_2 \int_{\Omega} (M_{xx} \delta w_{,xx} + M_{yy} \delta w_{,yy} + 2M_{xy} \delta w_{,xy}) d\Omega = -\mathcal{L}_2 \int_{\Omega} [(M_{xx} \delta w_{,x} - M_{xx,x} \delta w)_{,x} + M_{xx,xx} \delta w] d\Omega - \mathcal{L}_2 \int_{\Omega} [(M_{yy} \delta w_{,y} - M_{yy,y} \delta w)_{,y} + M_{yy,yy} \delta w] d\Omega - \mathcal{L}_2 \int_{\Omega} 2[(M_{xy} \delta w_{,x})_{,y} - (M_{xy,y} \delta w)_{,x} + M_{xy,xy} \delta w] d\Omega. \quad (16)$$

令任意函数 $f_1=f_1(x,y)$ 和 $f_2=f_2(x,y)$,将 Stokes 公式

$$\int_{\Omega} (f_{1,x} - f_{2,y}) d\Omega = \int_{\Gamma} (f_1 \cos \theta - f_2 \sin \theta) ds$$

代入式(16),可将面积分转化为线积分.随后,利用附录 A 并经过繁琐的推导,得以下线积分表达式:

$$I_1 = -\mathcal{L}_2 \int_{\Omega} (M_{xx,xx} + M_{yy,yy} + 2M_{xy,xy}) \delta w d\Omega + \int_{\Gamma} Q_{n1} \delta w ds - \int_{\Gamma} M_{mn1} \delta w_{,n} ds + \int_{\Gamma} M_{ns} \delta w_{,s} ds, \quad (17)$$

其中

$$Q_{n1} = \mathcal{L}_2(Q_x \cos \theta + Q_y \sin \theta), \quad (18)$$

$$M_{mn1} = \mathcal{L}_2(M_{xx} \cos^2 \theta + M_{yy} \sin^2 \theta + 2M_{xy} \sin \theta \cos \theta), \quad (19)$$

$$M_{ns} = \mathcal{L}_2(M_{xx} \sin \theta \cos \theta - M_{yy} \sin \theta \cos \theta - M_{xy} \cos(2\theta)), \quad (20)$$

式中, Q_{n1} , M_{mn1} 和 M_{ns} 分别为仅考虑 x,y 影响的非经典剪力、法向弯矩和切向弯矩.

利用式(11),式(18)~(20)可以改写为直角坐标系下 xOy 的结果.随后,利用附录 A,式(18)~(20)可进一步改写成局部坐标系 (n,s) 的形式,结果为

$$\begin{cases} Q_{n1} = -D \mathcal{L}_2 \nabla^2 w_{,n}, \\ M_{mn1} = -D \mathcal{L}_2 (w_{,nn} + \mu w_{,ss}), \\ M_{ns} = (1 - \mu) D \mathcal{L}_2 w_{,ns}. \end{cases} \quad (21)$$

式(17)等号右端最后一个积分项 $\int_{\Gamma} M_{ns} \delta w_{,s} ds$ 代表等效剪力项,可以通过分部积分进一步化简为

$$\int_{\Gamma} M_{ns} \delta w_{,s} ds = \sum_k [M_{ns}]_k \delta w - \int_{\Gamma} M_{ns,s} \delta w ds, \quad (22)$$

式中, $[M_{ns}]_k$ 为第 k 个角点的弯矩.

对于光滑边界, $\sum_k [M_{ns}]_k \delta w$ 为零,这样式(22)变成 $\int_{\Gamma} M_{ns} \delta w_{,s} ds = -\int_{\Gamma} M_{ns,s} \delta w ds$.为简化推导,本文先考虑光滑边界,随后考虑分段光滑边界的角点条件.经过类似的推导过程,并注意到式(12)间的关系,我们很容易就得到 I_2 的表达式,即只需要将 I_1 所得关系式中的 \mathcal{L}_2 替换成 $12l_2^2/h^2$ 即可.

相似地,通过繁琐的推导,式(14)中 I_3 为

$$\begin{aligned}
 I_3 = & -l_2^2 \int_{\Gamma} (M_{xx,x} \cos \theta + M_{xx,y} \sin \theta) \delta w_{,xx} ds - l_2^2 \int_{\Gamma} (M_{yy,x} \cos \theta + M_{yy,y} \sin \theta) \delta w_{,yy} ds - \\
 & 2l_2^2 \int_{\Gamma} (M_{xy,x} \cos \theta + M_{xy,y} \sin \theta) \delta w_{,xy} ds = \\
 & -l_2^2 \int_{\Gamma} (Q_{n2} \delta w + M_{nn2} \delta w_{,n} + M_{nnn} \delta w_{,nn}) ds, \tag{23}
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{cases} Q_{n2} = -D(\mu w_{,nn} + w_{,ss})_{,nss}, \\ M_{nn2} = 2D(1-\mu)w_{,nsss}, \\ M_{nnn} = -D(w_{,nnn} + \mu w_{,nss}). \end{cases} \tag{24}$$

式(23)的第一个等号利用了 Stokes 公式, 第二个等号利用了附录 A 中的转换关系和两次对 s 的分部积分.

结合式 (17)、(23) 和 I_2 , 应变能式 (14) 的一阶变分为

$$\begin{aligned}
 \delta U = & -\left(\mathcal{L}_2 + \frac{12l_2^2}{h^2}\right) \int_{\Omega} (M_{xx,xx} + M_{yy,yy} + 2M_{xy,xy}) \delta w d\Omega + \\
 & \int_{\Gamma} Q_n^* \delta w ds - \int_{\Gamma} M_{nn}^* \delta w_{,n} ds - l_2^2 \int_{\Gamma} M_{nnn} \delta w_{,nn} ds, \tag{25}
 \end{aligned}$$

式中

$$Q_n^* = Q_{n1} - \frac{12l_2^2}{h^2} D \nabla^2 w_{,n} - M_{ns,s} - (1-\mu) \frac{12l_2^2}{h^2} D w_{,nss} - l_2^2 Q_{n2}, \tag{26}$$

$$M_{nn}^* = M_{nn1} - \frac{12l_2^2}{h^2} D (w_{,nn} + \mu w_{,ss}) + l_2^2 M_{nn2} \tag{27}$$

分别为非经典总等效剪力和总法向弯矩.

利用式 (21) 和 (24), 式 (26) 和 (27) 可以改写为如下位移形式:

$$Q_n^* = -\left(1 + \frac{12l_2^2}{h^2}\right) D [w_{,nnn} + (2-\mu)w_{,nss}] + l_2^2 D [w_{,nnnnn} + (3-\mu)w_{,nssss} + 3w_{,nnnss}], \tag{28}$$

$$M_{nn}^* = -\left(1 + \frac{12l_2^2}{h^2}\right) D (w_{,nn} + \mu w_{,ss}) + l_2^2 D [w_{,nnnn} + (3-\mu)w_{,nnss} + \mu w_{,ssss}]. \tag{29}$$

需要指出的是, 在经典板理论中 (令式 (25) 中 $l_2^2 = 0$), 总应变能变分式中对应虚位移 δw 的为等效剪力, 对应法向转角 $\delta w_{,n}$ 的为弯矩. 然而, 对于应变梯度板来讲, 式 (25) 附加一虚曲率项 $\delta w_{,nn}$ 对应的为高阶弯矩 $-l_2^2 M_{nnn}$. 可以看到, 当 $l_2^2 = 0$ 时, 以上边界条件与经典理论得到的结果完全一致^[19], 这间接证明了推导边界条件的有效性.

由式 (25), 可知外力虚功的形式为

$$\delta W = \int_{\Omega} p_3 \delta w d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{Q}_n \delta w ds - \int_{\Gamma} \hat{M}_{nn} \delta w_{,n} ds - \int_{\Gamma} \hat{M}_{nnn} \delta w_{,nn} ds. \tag{30}$$

考虑到式 (6), 可得动能在时间间隔 $[t_0, t_1]$ 的一阶变分为

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = & \frac{1}{2} \rho h \delta \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} [\dot{w}^2 + (l_1^2 \dot{w}_{,x}^2 + l_1^2 \dot{w}_{,y}^2)] d\Omega dt = \\
 & -\rho h \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_1 \ddot{w} \delta w d\Omega dt + \rho h \int_{\Omega} [\dot{w} \delta w + l_1^2 \dot{w}_{,x} \delta w_{,x} + l_1^2 \dot{w}_{,y} \delta w_{,y}] \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} d\Omega - \\
 & \rho h l_1^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} (\ddot{w}_{,x} \cos \theta + \ddot{w}_{,y} \sin \theta) \delta w ds dt = -\rho h \int_{\Omega} \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_1 \ddot{w} \delta w d\Omega dt + \\
 & \rho h \int_{\Omega} [\dot{w} \delta w + l_1^2 \dot{w}_{,x} \delta w_{,x} + l_1^2 \dot{w}_{,y} \delta w_{,y}] \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} d\Omega - \rho h l_1^2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{\Gamma} \ddot{w}_{,n} \delta w ds dt, \tag{31}
 \end{aligned}$$

式中, $\mathcal{L}_1(\cdot) = 1 - l_1^2(\cdot)_{,yy}$. 值得一提的是, 当薄板的位形在初始时刻 $t = t_0$ 和最终时刻 $t = t_1$ 给定时, 式 (31) 最后结果中等号右端第二项为零.

利用 Hamilton 原理, 有

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U + W) dt = 0. \tag{32}$$

将式 (25)、(30) 和 (31) 代入到式 (32) 并考虑到式 (11), 得承受横向分布载荷下的薄板控制方程为

$$\left(\mathcal{L}_2 + \frac{12I_2^2}{h^2} \right) D \nabla^2 \nabla^2 w + \rho h \mathcal{L}_1 \dot{w} = p_3, \tag{33}$$

边界条件为

$$Q_n^* + \rho h l_1^2 \dot{w}_{,n} = \hat{Q}_n \quad \text{or} \quad w = \hat{w}, \tag{34}$$

$$M_{nn}^* = \hat{M}_{nn} \quad \text{or} \quad w_{,n} = \hat{w}_{,n}, \tag{35}$$

$$l_2^2 M_{nnn} = \hat{M}_{nnn} \quad \text{or} \quad w_{,nn} = \hat{w}_{,nn}, \tag{36}$$

式中, Q_n^* , M_{nn}^* 和 M_{nnn} 分别由式 (28)、(29) 和 (24) 给出; \hat{w} , $\hat{w}_{,n}$ 和 $\hat{w}_{,nn}$ 为给定边界. 为了同经典薄板的边界条件对应, 本文仍称式 (34) 和 (35) 为经典边界条件, 称式 (36) 为非经典边界条件.

显然, 当应变梯度参数和速度梯度参数都取零时, 式 (33) 退化为经典薄板的控制方程, 式 (34) 和 (35) 退化为经典薄板的边界条件, 式 (36) 将自动满足. 对于一般梯度薄板来讲, 式 (34)~(36) 给出了光滑平面域内的非经典边界条件. 当不考虑 z 方向的微分 (即令 $I_2=0$) 和速度梯度影响时, 式 (33) 退化成文献 [18] 的结果.

本小节将讨论工程中常见非经典薄板的边界条件:

(i) 对于周边固支圆板, 其周向挠度和法向转角为零. 因此, 式 (34) 给出的经典边界条件为 $w = 0$, 式 (35) 给出的经典边界条件为 $w_{,n} = 0$. 由于边界高阶弯矩不为零, 式 (36) 给出的非经典高阶边界条件为 $w_{,nn} = 0$.

(ii) 对于周边简支圆板, 其周向挠度和弯矩为零. 因此, 式 (34) 给出的经典边界条件为 $w = 0$, 式 (35) 给出的经典边界条件为 $M_{nn}^* = \hat{M}_{nn} = 0$. 由于边界存在高阶弯矩或法向曲率不为零的情况, 式 (36) 给出的非经典高阶边界条件为 $M_{nnn} = 0$ 或 $w_{,nn} = 0$.

对于矩形薄板, 以边界线法向为 x 轴正向为例, 此时有 $\theta = 0$, 且 (n, s) 与 (x, y) 坐标系重合. 这表明, 可以简单地把边界条件 (34)~(36) 中的 n, s 分别替换为 x, y . 因此, 3 种常见薄板的边界条件列于表 1 中.

表 1 矩形薄板 3 种常见的边界条件
Table 1 Three common boundary conditions (BCs) for a rectangular plate

boundary condition	BC1	BC2	BC3
clamped	$w=0$	$w_{,x}=0$	$M_{xxx}=0$ or $w_{,xx}=0$
simply support	$w=0$	$M'_{xx}=0$	$M_{xxx}=0$ or $w_{,xx}=0$
free	$Q_x^* + \rho h l_1^2 \dot{w}_{,x} = 0$	$M'_{xx}=0$	$M_{xxx}=0$ or $w_{,xx}=0$

1.3 角点条件

本小节将考虑板边界为分段光滑边界的角点问题. 在推导边界条件时, 角点条件由以下五部分组成.

第一部分由式 (17) 等号右边最后一项产生, 为

$$F_{CC1} = \|(1 - \mu) D \mathcal{L}_2 w_{,ns} \delta w\|. \tag{37}$$

第二部分由 I_2 产生, 为

$$F_{CC2} = \frac{12I_2^2}{h^2} \|(1 - \mu) D w_{,ns} \delta w\|. \tag{38}$$

第三部分由式 (23) 第一个等号右边第一项产生, 为

$$F_{CC3} = -l_2^2 (\| -M_{xx,ns} \sin^2 \theta \delta w \| + \| M_{xx,n} \sin^2 \theta \delta w_{,s} \| + \| -M_{xx,n} \sin(2\theta) \delta w_{,n} \|). \tag{39}$$

第四部分由式 (23) 第一个等号右边第二项产生, 为

$$F_{CC4} = -l_2^2 (\| -M_{yy,ns} \cos^2 \theta \delta w \| + \| M_{yy,n} \cos^2 \theta \delta w_{,s} \| + \| M_{yy,n} \sin(2\theta) \delta w_{,n} \|). \tag{40}$$

第五部分由式 (23) 第一个等号右边第三项产生, 为

$$F_{CC5} = -l_2^2 (\| M_{xy,ns} \sin(2\theta) \delta w \| + \| -M_{xy,n} \sin(2\theta) \delta w_{,s} \| + \| 2M_{xy,n} \cos(2\theta) \delta w_{,n} \|). \tag{41}$$

叠加上五式, 得以位移表示的角点条件为

$$F_{CC} = \sum_{i=1}^5 F_{CCi} = \left(1 + \frac{12l_2^2}{h^2}\right) \|(1-\mu)Dw_{,ns}\delta w\| - l_2^2 D \{ \| [w_{,nms} + (2-\mu)w_{,nsss}] \delta w \| - \| (\mu w_{,nmn} + w_{,nss}) \delta w_{,s} \| + 2 \| (\mu-1)w_{,nms} \delta w_{,n} \| \}. \quad (42)$$

值得一提的是, 转化为本文符号后, 文献 [18] 通过变分原理导出的角点条件为

$$F_{CC} = \|(1-\mu)Dw_{,ns}\delta w\| + l_2^2 D \{ \| [(3-\mu)w_{,nsss}] \delta w \| + \| \mu(w_{,sss} - w_{,nms}) \delta w_{,n} \| \}. \quad (43)$$

显然, 文献 [18] 中把 $\delta w_{,s}$ 项遗漏了. 与文献 [18] 不同, 本文的创新性体现在以下几个方面: 1) 考虑了速度梯度影响, 即在总动能式 (6) 中考虑了含有 l_1 的微分项; 2) 考虑了沿厚度方向的微分对板有效抗弯刚度的贡献, 即考虑了由厚度引起的广义力方程 (12) 对板刚度的影响.

2 弹性地基上的周边简支矩形板

考虑一放置于弹性地基上的均质等厚度各向同性薄板, 其长宽高分别为 a, b 和 h , 如图 2 所示. 弹性地基符合 Winkler 地基模型, 则地基反力为 $-Kw(x, y)$, K 为地基刚度系数.

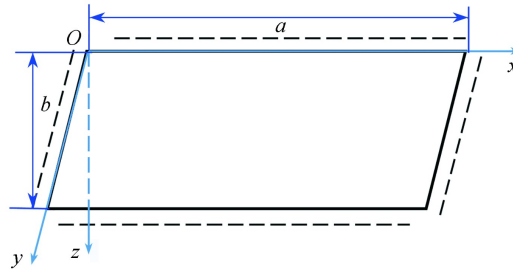


图 2 弹性地基上的周边简支矩形板
Fig. 2 A fully simply supported rectangular plate resting on an elastic foundation

2.1 静位移分析

首先考虑一承受横向均布荷载为 p 的四边简支薄板的静位移问题. 此时板的控制微分方程 (33) 改写为

$$\left(\hat{\mathcal{L}}_2 + \frac{12l_2^2}{h^2}\right) D \nabla^2 \nabla^2 w + Kw = p. \quad (44)$$

挠度可用双三角级数表示为

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y), \quad (45)$$

式中, w_{mn} 为待求参数, $\lambda_m = m\pi/a, \lambda_n = n\pi/b$.

均布荷载 p 可用双三角级数表示为

$$p = \sum_m \sum_n P_m \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y), \quad (46)$$

式中 $P_m = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p \sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y) dx dy = \frac{16p}{mn\pi^2}$.

将式 (45) 和 (46) 同时代入式 (44), 可得 w_{mn} 的表达式. 再将该表达式回代入式 (45), 得挠度解为

$$w = \frac{16p}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin(\lambda_m x) \sin(\lambda_n y)}{mn \left[\left(1 + l_2^2(\lambda_m^2 + \lambda_n^2) + \frac{12l_2^2}{h^2}\right) (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2 D + K \right]}. \quad (47)$$

当 l_2 不存在时, 上式可退化成经典文献^[19] 的结果.

2.2 自由振动分析

其次考虑一周边简支薄板的自由振动问题. 此时式 (33) 可改写为以下频域方程:

$$\left(\mathcal{L}_2 + \frac{12l_2^2}{h^2}\right) D \nabla^2 \nabla^2 w - \rho h \omega_{mn}^2 \mathcal{L}_1 w = 0. \quad (48)$$

将式 (45) 代入式 (48), 可得板固有频率解为

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{\left(1 + l_2^2(\lambda_m^2 + \lambda_n^2) + \frac{12l_2^2}{h^2}\right)(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2 D + K}{\rho h[1 + l_1^2(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)]}}. \quad (49)$$

如令 $l_1 = l_2 = 0$, 即不考虑应变梯度和速度梯度参数的影响时, 式 (49) 可退化为经典结果^[19].

3 结果和讨论

为研究梯度参数和地基参数对板结构力学行为的影响, 本节分别选取板的静位移和固有频率进行研究. 根据经典板理论, 引入以下无量纲化位移及无量纲化固有频率参数:

$$\bar{w} = 1000 \times w / (pa^4 / D), \quad \Omega_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{\frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}}. \quad (50)$$

如无特殊说明, 板为正方形板, 边长为 a , 且计算参数为

$$\mu = 0.3, \quad \bar{K} = Ka^4 / D.$$

3.1 有效性验证

当不考虑地基影响时, Ansari 等^[10] 利用分子动力学(MD)的方法研究了 zigzag 型方形石墨烯的自由振动频率问题. 为验证本文模型的有效性, 本小节将对他们的结果. 文献 [10] 中板的计算参数为

$$D = 3.361 \times 10^{-18} \text{ Pa} \cdot \text{m}^3, \quad \rho = 2250 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \quad h = 0.34 \text{ nm}, \quad (51)$$

式中, D, ρ, h 分别为板的抗弯刚度、体密度和厚度.

将以上材料参数代入到式 (49), 并令 $m=n=1, K=0$, 得到拟合函数. 利用拟合函数拟合文献 [10] 中的数据, 得尺寸效应参数为

$$(l_1, l_2) = (1.467, 0.034) \text{ nm}. \quad (52)$$

需要说明的是, 式 (52) 中的材料参数仅适用于文献 [10] 中拟合石墨烯 MD 的结果. 对于碳纳米管等结构来说, 基于应变梯度和速度梯度理论的材料参数 l_1 和 l_2 也可通过类似的方法通过拟合得到, 如文献 [20] 给出的拟合结果为 $l_2=0.0355 \text{ nm}, l_1/l_2=2.5$.

不失一般性, 后文采用式 (52) 的材料参数计算.

图 3 给出了基频随方形板边长的变化关系. 可以看到, 本文结果与 MD 方法得到的结果吻合得很好, 而经典薄板解却不能很好地预测板振动频率随其边长的变化, 尤其当边长 $a < 15 \text{ nm}$ 时. 同时, 当不考虑速度梯度影响时(即令 $l_1=0$), 得到的基频频率与文献 [10] 中的结果差异较大. 这些间接地证明了本文模型的精确性及在工程实践中预测微纳米板结构力学行为的必要性.

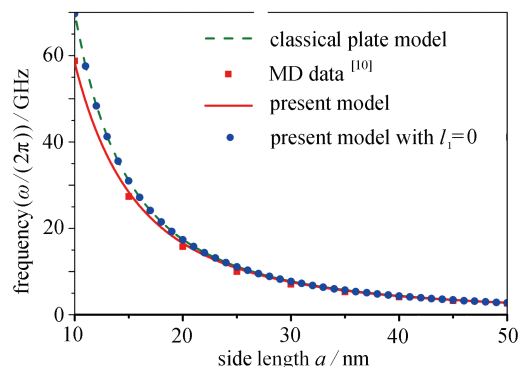


图 3 周边简支方形板的基频与其边长的关系

Fig. 3 The fundamental frequency vs. the side length of a simply supported square plate

3.2 地基刚度参数的影响

图 4 显示了 $y=a/2$ 方形截面上地基参数对沿 x 方向位移的影响. 由该图可知, 板位移随着地基刚度参数的增加而减小, 并且跨中取得最大挠度. 这表明, 地基参数使板的等效刚度变大.

图 5 给出了不同地基参数下板无量纲基频随其边长的变化关系. 由该图可知, 随着边长的增加, 其无量纲基频逐渐增大. 同时, 板的无量纲基频随地基刚度参数的增加而增加. 这表明, 材料梯度参数和地基参数均使板的等效刚度变大.

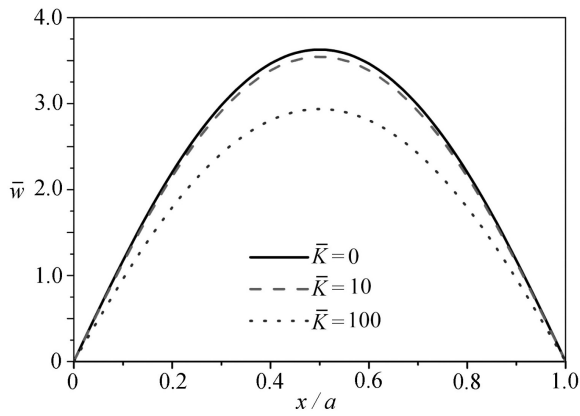


图 4 地基刚度系数对周边简支方板位移形状的影响

Fig. 4 Effects of the foundation stiffness on the displacement of a simply supported square plate for $y=a/2$

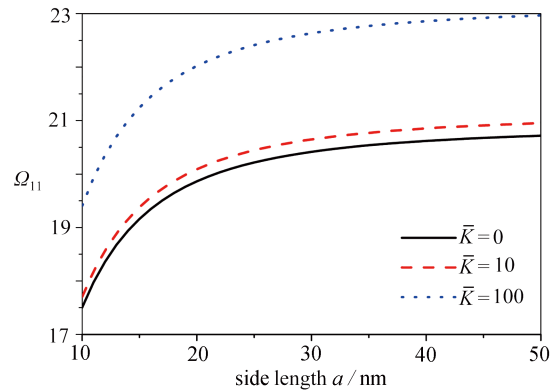


图 5 地基刚度系数对周边简支方板基频的影响

Fig. 5 Effects of the foundation stiffness on the fundamental frequency of a simply supported square plate

3.3 应变梯度 l_2 的影响

图 6 和图 7 给出了应变梯度参数 l_2 对方形板挠度和基频的影响. 由图可知, 位移随 l_2 的增大而迅速减小, 而基频却相反. 这表明, l_2 对板等效刚度有很大的影响, 因而在工程应用中不可忽略.

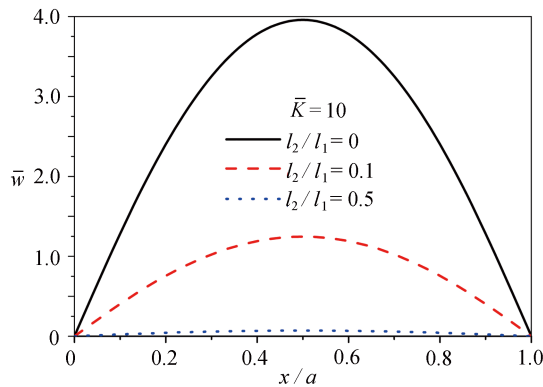


图 6 应变梯度参数 l_2 对周边简支方板位移形状的影响

Fig. 6 Effects of strain gradient parameter l_2 on the displacement of a simply supported square plate for $y=a/2$

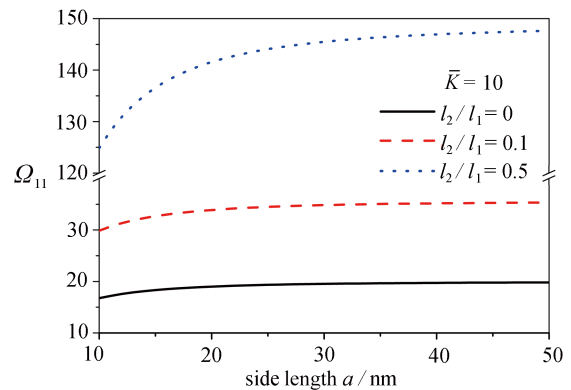


图 7 应变梯度参数 l_2 对周边简支方板基频的影响

Fig. 7 Effects of strain gradient parameter l_2 on the fundamental frequency of a simply supported square plate

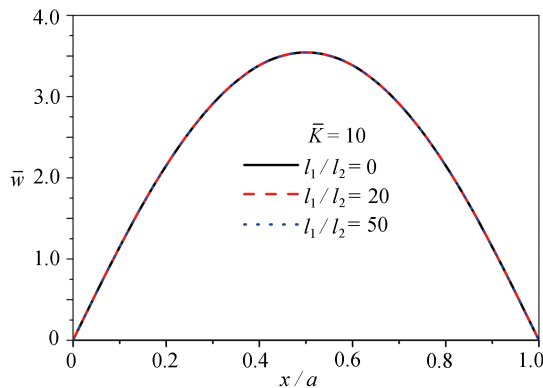


图 8 速度梯度参数 l_1 对周边简支方板位移形状的影响

Fig. 8 Effects of velocity gradient parameter l_1 on the displacement of a simply supported square plate for $y=a/2$

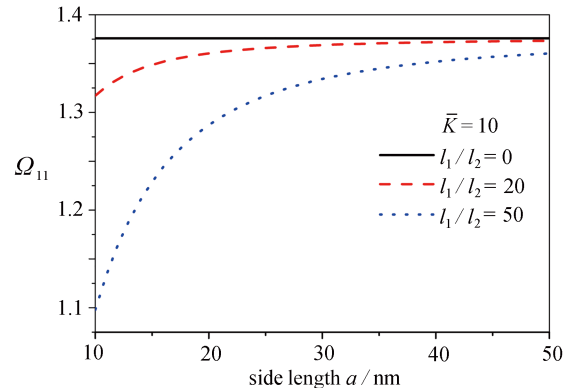


图 9 速度应变梯度参数 l_1 对周边简支方板基频的影响

Fig. 9 Effects of velocity gradient parameter l_1 on the fundamental frequency of a simply supported square plate

3.4 速度梯度 l_1 的影响

速度梯度参数 l_1 对方形板挠度和基频的影响分别如图 8 和图 9 所示. 由图可知, 速度梯度参数 l_1 对方形板挠度无影响, 这可由式 (47) 进行验证. 随着 l_1 的增大, 基频越来越小. 这表明, l_1 的增大减少了板的等效刚度, 因而在工程应用中应充分考虑, 以得到准确的结果.

4 结 论

基于应变梯度理论, 本文提出了考虑 z 轴梯度影响下的薄板边值问题, 给出了其变分自洽的角点条件. 以周边简支薄板为例, 研究了承受均布荷载作用下弹性地基板的静挠度和自由振动频率, 所得结论如下:

- 1) 本模型可有效捕捉经典板模型在预测其分子动力学结果方面的不足.
- 2) 增大地基刚度参数和应变梯度参数可有效提高板的等效刚度.
- 3) 增大速度梯度参数则会减少板的等效刚度.

本文得到的板的能量方程及边界条件问题的提出, 不仅对于构造其相应的数值方法提供理论依据, 而且对其应用于土木工程、机械系统等领域提供一定的参考.

附 录 A

图 A1 显示了 (n, s) 坐标系和 (x, y) 坐标系, 以及板边界 Γ , 以逆时针为正, x 轴正向到 n 轴正向夹角为 θ . 则任一函数对坐标 x, y 和 n, s 的偏导数之间存在如下关系:

$$(\cdot)_{,x} = \cos \theta (\cdot)_{,n} - \sin \theta (\cdot)_{,s}, \quad (\text{A1})$$

$$(\cdot)_{,y} = \sin \theta (\cdot)_{,n} + \cos \theta (\cdot)_{,s}, \quad (\text{A2})$$

$$(\cdot)_{,xx} = \cos^2 \theta (\cdot)_{,nn} - \sin(2\theta) (\cdot)_{,ns} + \sin^2 \theta (\cdot)_{,ss}, \quad (\text{A3})$$

$$(\cdot)_{,xy} = \sin \theta \cos \theta (\cdot)_{,nn} + \cos(2\theta) (\cdot)_{,ns} - \sin \theta \cos \theta (\cdot)_{,ss}, \quad (\text{A4})$$

$$(\cdot)_{,yy} = \sin^2 \theta (\cdot)_{,nn} + \sin(2\theta) (\cdot)_{,ns} + \cos^2 \theta (\cdot)_{,ss}, \quad (\text{A5})$$

$$(\cdot)_{,xxx} = \cos^3 \theta (\cdot)_{,nnn} + (-\sin \theta \cos^2 \theta - \cos \theta \sin(2\theta)) (\cdot)_{,nns} + (\sin \theta \sin(2\theta) + \cos \theta \sin^2 \theta) (\cdot)_{,nss} - \sin^3 \theta (\cdot)_{,sss}, \quad (\text{A6})$$

$$(\cdot)_{,xxy} = \sin \theta \cos^2 \theta (\cdot)_{,nnn} + (\cos^3 \theta - \sin \theta \sin(2\theta)) (\cdot)_{,nns} + (-\cos \theta \sin(2\theta) + \sin^3 \theta) (\cdot)_{,nss} + \sin^2 \theta \cos \theta (\cdot)_{,sss}, \quad (\text{A7})$$

$$(\cdot)_{,xyy} = \cos \theta \sin^2 \theta (\cdot)_{,nnn} + (-\sin^3 \theta + \cos \theta \sin(2\theta)) (\cdot)_{,nns} + (-\sin \theta \sin(2\theta) + \cos^3 \theta) (\cdot)_{,nss} - \sin \theta \cos^2 \theta (\cdot)_{,sss}, \quad (\text{A8})$$

$$(\cdot)_{,yyy} = \sin^3 \theta (\cdot)_{,nnn} + (\cos \theta \sin^2 \theta + \sin \theta \sin(2\theta)) (\cdot)_{,nns} + (\cos \theta \sin(2\theta) + \sin \theta \cos^2 \theta) (\cdot)_{,nss} + \cos^3 \theta (\cdot)_{,sss}. \quad (\text{A9})$$

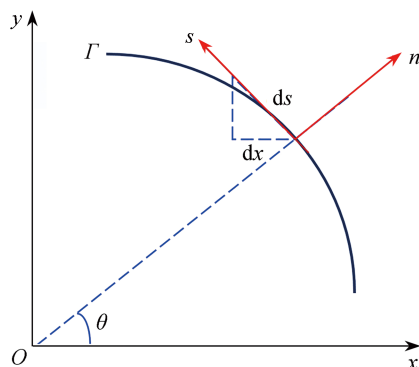


图 A1 坐标系 (x, y) 和 (n, s) 及板边界 Γ

Fig. A1 Coordinate systems (x, y) and (n, s) at a piecewise smooth plate boundary Γ

参考文献 (References):

- [1] 周剑秋, 黄连军, 王英. 基于应变梯度位错理论的纳晶-无定形态层状复合材料的力学性能研究[J]. 工程力学, 2014, 31(1): 224-228. (ZHOU Jianqiu, HUANG Lianjun, WANG Ying. Mechanical behaviors of crystalline-amorphous nanolaminates based on strain gradient dislocation theory[J]. Engineering Mechanics, 2014, 31(1): 224-228. (in Chinese))
- [2] 王学滨. 考虑应变梯度及刚度劣化的剪切带局部变形分析[J]. 工程力学, 2006, 23(10): 101-106. (WANG Xuebin.

- Analysis of localized deformation in shear band considering degraded stiffness based on gradient-dependent plasticity[J]. *Engineering Mechanics*, 2006, **23**(10): 101-106.(in Chinese))
- [3] LAM D C C, YANG F, CHONG A C M, et al. Experiments and theory in strain gradient elasticity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, **51**(8): 1477-1508.
- [4] CHEN C Q, SHI Y, ZHANG Y S, et al. Size dependence of Young's modulus in ZnO nanowires[J]. *Physical Review Letters*, 2006, **96**(7): 075505.
- [5] EOM K, PARK H S, YOON D S, et al. Nanomechanical resonators and their applications in biological/chemical detection: nanomechanics principles[J]. *Physics Reports*, 2011, **503**(4/5): 115-163.
- [6] 秦江, 黄克智, 黄永刚. 采用特征线方法对混合硬化情况下基于变形机制的应变梯度工程塑性理论的研究[J]. 工程力学, 2009, **26**(9): 176-185. (QIN Jiang, HWANG Kehchih, HUANG Yonggang. A study on the conventional theory of mechanism-based strain gradient plasticity for mixed hardening by the method of characteristics[J]. *Engineering Mechanics*, 2009, **26**(9): 176-185.(in Chinese))
- [7] ASKES H, AIFANTIS E C. Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2011, **48**(13): 1962-1990.
- [8] WANG L, HU H. Flexural wave propagation in single-walled carbon nanotubes[J]. *Physical Review B*, 2005, **71**(19): 195412.
- [9] WANG L, HU H, GUO W. Validation of the non-local elastic shell model for studying longitudinal waves in single-walled carbon nanotubes[J]. *Nanotechnology*, 2006, **17**(5): 1408-1415.
- [10] ANSARI R, SAHMANI S, ARASH B. Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered graphene sheets[J]. *Physics Letters A*, 2010, **375**(1): 53-62.
- [11] KHAKALO S, NIIRANEN J. Anisotropic strain gradient thermoelasticity for cellular structures: plate models, homogenization and isogeometric analysis[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020, **134**: 103728.
- [12] 王碧蓉, 邓子辰, 徐晓建, 等. 剪力非局部因子对双壁碳纳米管中弯曲波频散特性的影响[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(5): 478-486. (WANG Birong, DENG Zichen, XU Xiaojian, et al. Effects of nonlocal shear factor on flexural wave dispersion in double-walled carbon nanotubes[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(5): 478-486.(in Chinese))
- [13] 郑晓静, 周又和. 集中载荷作用下弹性地基圆薄板大挠度问题的精确解[J]. 力学学报, 1988, **20**(2): 161-172. (ZHENG Xiaojing, ZHOU Youhe. On the exact solution to large deflection problem of circular plate on elastic foundation under a concentrated load[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1988, **20**(2): 161-172.(in Chinese))
- [14] 陈玲玲, 杨旭, 刘洋, 等. 全应变梯度挠曲电纳米梁有限单元法研究[J]. 计算力学学报, 2020, **37**(5): 545-552. (CHEN Lingling, YANG Xu, LIU Yang, et al. Research on finite element method of nanobeam considering flexoelectricity based on general strain gradient elasticity theory[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2020, **37**(5): 545-552.(in Chinese))
- [15] MINDLIN R D. Micro-structure in linear elasticity[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, **16**(1): 51-78.
- [16] ASKES H, SUIKER A S J, SLUYS L J. A classification of higher-order strain-gradient models-linear analysis[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2002, **72**(2): 171-188.
- [17] POLIZZOTTO C. A second strain gradient elasticity theory with second velocity gradient inertia, part I: constitutive equations and quasi-static behavior[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, **50**(24): 3749-3765.
- [18] PAPARGYRI-BESKOU S, GIANNAKOPOULOS A E, BESKOS D E. Variational analysis of gradient elastic flexural plates under static loading[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, **47**(20): 2755-2766.
- [19] VENTSEL E, KROUTHAMMER T. *Thin Plate and Shells*[M]. New York: Marcel Dekker, 2001.
- [20] XU X J, DENG Z C. Effects of strain and higher order inertia gradients on wave propagation in single-walled carbon nanotubes[J]. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 2015, **72**: 101-110.