

RBF-PU方法求解二维非局部扩散问题和近场动力学问题

张尚元, 聂玉峰, 李义强

The RBF-PU Method for Solving 2D Nonlocal Diffusion and Peridynamic Equations

ZHANG Shangyuan, NIE Yufeng, and LI Yiqiang

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420295>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

考虑混凝土材料非均质特性的近场动力学模型

A Peridynamic Model for Heterogeneous Concrete Materials

应用数学和力学. 2018, 39(8): 913–924 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380274>

具有时空时滞的非局部扩散SIR模型的行波解

Traveling Wave Solutions for Nonlocal Dispersal SIR Models With Spatio-Temporal Delays

应用数学和力学. 2018, 39(5): 611–630 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380118>

一类具有非线性发生率与时滞的非局部扩散SIR模型的临界波的存在性

Existence of Critical Traveling Waves for Nonlocal Dispersal SIR Models With Delay and Nonlinear Incidence

应用数学和力学. 2019, 40(7): 713–727 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390208>

轴对称弹性动力学问题的重构核插值法

A Reproducing Kernel Interpolation Method for Axisymmetric Elastodynamic Problems

应用数学和力学. 2019, 40(8): 938–944 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390242>

二维黏弹性力学问题的无网格自然单元法

A Meshless Natural Element Method for 2D Viscoelastic Problems

应用数学和力学. 2017, 38(5): 605–612 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370300>

非局部时滞反应扩散方程波前解的指数稳定性

Exponential Stability of Traveling Wavefronts for Reaction-Diffusion Equations With Delayed Nonlocal Responses

应用数学和力学. 2018, 39(11): 1300–1312 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380336>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

RBF-PU 方法求解二维非局部扩散问题 和近场动力学问题*

张尚元, 聂玉峰, 李义强

(西北工业大学 数学与统计学院, 西安 710129)

摘要: 采用单位分解径向基函数 (radial basis function partition of unity, RBF-PU) 方法, 数值求解了二维非局部扩散问题和近场动力学问题. 主要思想是对求解区域进行局部划分, 在局部子区域上分别进行函数逼近, 然后加权得到未知函数的全局逼近. 这种基于方程强形式的径向基函数方法在求解非局部问题时, 不需要处理网格与球形邻域求交的问题, 避免了额外的一层积分计算, 实施简便, 计算量小. 数值实验显示计算结果与解析解吻合较好, RBF-PU 方法可以准确有效地求解非局部扩散方程和近场动力学方程.

关键词: 径向基函数插值; 单位分解; 非局部扩散; 近场动力学

中图分类号: O242.2 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420295

The RBF-PU Method for Solving 2D Nonlocal Diffusion and Peridynamic Equations

ZHANG Shangyuan, NIE Yufeng, LI Yiqiang

(School of Mathematics and Statistics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, P.R. China)

Abstract: The radial basis function partition of unity (RBF-PU) method was applied to obtain the numerical solution of 2D nonlocal diffusion and peridynamic problems. The main idea is to partition the original domain into several patches, use the RBF approximation on each local domain, and then give weighting to obtain the global approximation of the unknown function. The radial basis function method based on the strong form of the equation has many advantages, such as avoiding an additional layer of integral calculation, no need to deal with intersections of neighborhoods with the mesh, and easiness of implementation. The numerical results show that, this method can solve nonlocal diffusion equations and peridynamic equations accurately and efficiently.

Key words: RBF interpolation; partition of unity; nonlocal diffusion; peridynamics

引 言

经典的扩散现象和弹性力学问题是通过偏微分方程 (partial differential equation, PDE) 来刻画的, 由于模

* 收稿日期: 2021-09-26; 修订日期: 2021-10-29

基金项目: 国家自然科学基金 (面上项目)(11971386); 国家重点研发计划 (2020YFA0713603)

作者简介: 张尚元 (1995—), 男, 博士生 (E-mail: zhangshangyuan@mail.nwpu.edu.cn);

聂玉峰 (1968—), 男, 教授, 博士, 博士生导师 (通讯作者. E-mail: yfnie@nwpu.edu.cn);

李义强 (1984—), 男, 讲师, 博士 (E-mail: liyiqiang@nwpu.edu.cn).

引用格式: 张尚元, 聂玉峰, 李义强. RBF-PU 方法求解二维非局部扩散问题和近场动力学问题[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(6): 608-618.

型在建立之初就默认解具有一定的连续性, 因此这类经典模型不适用于解具有奇异性情形. 为此, 研究者们提出了非局部扩散模型^[1-2]和近场动力学 (peridynamics, PD) 模型^[3-5], 这两类非局部模型方程都是以有限作用范围的积分形式呈现, 并且不涉及未知量的空间导数, 物体的内力采取非接触的相互作用, 这些特点使得它们在表征材料的损伤以及不连续现象时具有明显的优势, 已经被广泛应用于含裂纹的热扩散问题^[1,6]和固体损伤破坏^[7]领域中.

为推动这类有限作用范围的非局部模型在工程实际问题中的应用, 国内外许多专家尝试了不同数值方法来求解这类方程. 2005 年, Silling 等通过将积分直接近似为有限和, 提出了基于求积的无网格配置点法^[8]. Chen 等在 2011 年使用连续有限元和离散有限元方法求解了一维非局部扩散问题和近场动力学问题, 指出在解不连续的情形下, 使用不连续有限元可以获得更高的精度^[9]. 针对非局部方程计算量大的问题, Wang 和 Tian 等基于刚度矩阵的 Toeplitz 结构, 给出了一维非局部扩散方程的快速配置点法^[10-11], 并在后续工作中推广到了二维问题^[12-13]. 2013 年, Tian 和 Du 通过将非局部算子看成差分算子的加权平均, 提出了基于求积的有限差分方法, 用于一维非局部扩散问题的求解^[14]. 2016 年, Lehoucq 等使用径向基函数 Galerkin 方法求解了二维非局部扩散问题^[15]. 2017 年, Zhao 等使用局部径向基函数伪谱方法求解了二维非局部扩散问题^[16], 并在之后推广到了近场动力学问题^[17]. 2018 年, Pasetto 等将再生核方法应用到二维近场动力学问题的数值求解当中^[18]. 2019 年, Du 和 Yin 给出了非局部扩散问题的一种协调间断 Galerkin 方法^[19]. 2020 年, Zhang 和 Nie 将 POD 降阶方法用于非稳态非局部扩散问题, 加速了非局部离散系统的求解过程^[20]. 2021 年, Liang 等发展了近场动力学问题的边界元方法^[21]. 同年, Lu 和 Nie 发展了具有再生性的局部化径向基函数方法来求解非局部扩散问题, 解决了再生核增强径向基函数方法在求解非局部扩散方程时不收敛的问题^[22].

由于这两类模型方程的非局部特性, 经典的数值方法均面临着算法复杂、难以实现和计算量大的问题. 对于基于网格的方法, 包括分片多项式函数近似的配置点法^[10], 以及连续/不连续有限元方法^[9], 由于非局部相互作用范围是一个有限范围的球形邻域, 因此这些方法在方程离散时, 需要处理网格和球形区域的求交问题, 否则将会降低数值精度. 对于基于方程弱形式的方法 (包括有限元方法^[9]、无网格 Galerkin 方法^[15]等), 由于模型方程积分的特性, 这就导致方程的弱形式会额外嵌套一层积分, 从而在刚度矩阵的形成过程中会出现累次重积分的计算, 给问题的求解带来了较大的计算负担. 然而, 基于径向基函数的无网格方法^[23-24]能够避免处理上述提及的区域求交的问题. 同时, 基于方程强形式的配置点法, 可以避免额外一层积分的计算, 从而可以节省刚度矩阵生成时的计算量. 基于上述分析, 无网格配置点法更适合于这两类非局部模型的数值求解. 值得注意的是, 全局 RBF 方法虽然避免了网格生成, 但是在计算 RBF 插值时, 由于插值矩阵规模较大, 会出现计算量大、插值矩阵条件数过大的问题, 而局部化的 RBF 则会降低插值矩阵的条件数, 故选择局部化的径向基函数插值更为合理. 因此, 本文考虑了一种局部化的径向基函数方法-单位分解径向基函数方法来求解这类方程: 一方面它不同于文献 [15] 中基于方程弱形式的无网格 Galerkin 方法, 是基于方程强形式的无网格配置点法, 节省了额外一层的积分计算; 另一方面, 本文方法不同于有限元方法^[9], 基函数无网格依赖, 免去了区域求交问题. 故本文方法在求解非局部问题时具备实施简便、计算量小的优势.

针对二维非局部扩散问题和近场动力学问题, 本文采用单位分解径向基函数方法来数值求解. 首先概述了 RBF 插值和 RBF-PU 插值方法; 然后给出了 RBF-PU 方法应用于非局部扩散问题和近场动力学问题求解时离散系统形成的基本过程; 最后用数值实验验证了 RBF-PU 方法在求解这两类非局部问题时的有效性.

1 径向基函数插值

1.1 全局径向基函数插值

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有界开集, 记 $X := \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset \Omega$ 为服从非平凡几何分布离散点的集合. 设 ϕ 是严格对称正定的径向基函数, 即对任意 $\mathbf{c} := \{c_1, c_2, \dots, c_N\}^T \in \mathbb{R}^N$, 有 $\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N c_i c_k \phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k) \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. $f(\mathbf{x})$ 是未知函数, 插值问题的核心在于寻找一个具有如下形式的函数:

$$s(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j), \quad (1)$$

满足插值条件

$$s(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

其中插值系数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$ 通过求解下述线性方程组获得:

$$\begin{bmatrix} \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \cdots & \phi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N) \\ \phi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & \phi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2) & \cdots & \phi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_1) & \phi(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_2) & \cdots & \phi(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}_1) \\ f(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ f(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

简记为

$$A\alpha = f. \quad (4)$$

此时 $A = (A_{ij})$ 称为插值矩阵, $A_{ij} = \phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ ($i, j = 1, 2, \dots, N$), $f = (f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \dots, f(\mathbf{x}_N))^T$. 从而

$$s(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) (A^{-1})_{jk} f_k = \sum_{k=1}^N \psi_k(\mathbf{x}) f_k, \quad (5)$$

其中 $\psi_k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) (A^{-1})_{jk}$, f_k 表示 f 的第 k 个分量.

1.2 单位分解径向基函数插值

这一小节将简要介绍一种局部化 RBF 方法, 即 RBF-PU 方法. 其基本过程是通过有限子域覆盖原始区域, 在每个子域上解决小规模局部插值问题, 最后通过单位分解函数 ω 加权得到最终的插值结果.

首先介绍单位分解函数的构造. 假设整个区域 Ω 被 K 个子区域 Ω_j 覆盖, 即 $\Omega \subset \bigcup_{j=1}^K \Omega_j$. 令 $R_j = \text{diam}(\Omega_j) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ 表示区域 Ω_j 的直径. 如果存在一族非负函数 $\{\omega_j\} \subset C^k(\mathbb{R}^d)$ ($m \in \mathbb{N}_0, j = 1, 2, \dots, K$) 满足

- ① $\text{supp}(\omega_j) \subset \Omega_j$, 即函数 ω_j 的支集包含在 Ω_j 中;
- ② $\sum_{j=1}^K \omega_j = 1$;
- ③ $\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$, 而且 $|\alpha| \leq m$, 存在一个常数 $C_\alpha > 0$, 使得 $\|D^\alpha \omega_j\|_{L^\infty(\Omega_j)} \leq C_\alpha R_j^{-|\alpha|}$.

则称单位分解函数 $\{\omega_j\}_{j=1}^K$ 是在覆盖 $\{\Omega_j\}_{j=1}^K$ 上的一个 m 稳定的单位分解^[25].

一般 Ω_j 取为圆形邻域 $B(\mathbf{z}_j, R)$, 半径 R 的大小依赖于无网格点的数量及分布, 具体如图 1 所示. 设 $\varphi_j(\mathbf{x})$ 是一个在 Ω_j 上具有紧支集的非负函数, PU 权重函数 $\omega_j(\mathbf{x})$ 用 Shepard 权重^[26] 来构造, 即

$$\omega_j(\mathbf{x}) = \frac{\varphi_j(\mathbf{x})}{\sum_{k=1}^K \varphi_k(\mathbf{x})}, \quad j = 1, 2, \dots, K. \quad (6)$$

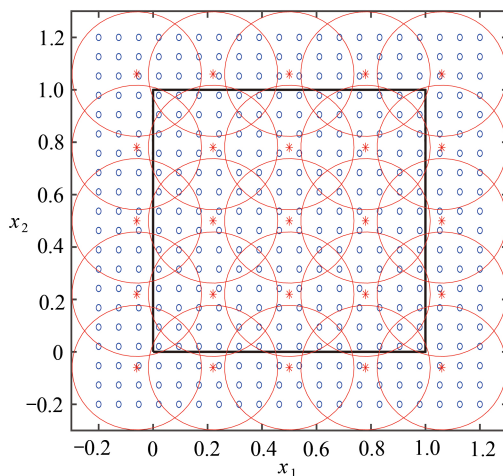


图 1 无网格点和 PU 覆盖示意图

Fig. 1 A set of regular meshless points and a set of circular PU patches

定义指标集 $I(\mathbf{x}) = \{l : \mathbf{x} \in \Omega_l\}$, 则式 (6) 中的求和索引可以用 $k \in I(\mathbf{x})$ 简化. 用 Wendland 函数 $\varphi(r)$ 来构造函数 $\varphi_j(\mathbf{x})$:

$$\varphi_j(\mathbf{x}) = \varphi\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{X}_j\|}{R_j}\right), \quad j = 1, 2, \dots, K, \tag{7}$$

其中

$$\varphi(r) = \begin{cases} (1-r)^4(4r+1), & 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & r > 1, \end{cases} \tag{8}$$

\mathbf{X}_j, R_j 分别为子区域 Ω_j 的中心点和半径. 依据式 (6)、(7) 的定义可知, $\{\omega_j\}_{j \in I(\mathbf{x})}$ 满足单位分解, 即

$$\sum_{j \in I(\mathbf{x})} \omega_j(\mathbf{x}) = 1, \tag{9}$$

且该单位分解是 m 稳定的 ($m \leq 4$). 它能满足非局部扩散和近场动力学模型对解的光滑性要求.

下面给出 RBF-PU 插值的基本过程. 假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 具有有限开覆盖 $\{\Omega_j\}_{j=1}^K$, $\{\omega_j\}_{j=1}^K$ 是 $\{\Omega_j\}_{j=1}^K$ 上的一个 m 稳定的单位分解, $u \in C^m(\Omega)$ 是要逼近的函数. $s_j \in V_j = \text{span}\{\phi(\cdot, \mathbf{x}_k) : \mathbf{x}_k \in \Omega_j\}$ 是 u 在子区域 Ω_j 上的 RBF 近似, 对 $\mathbf{x} \in \Omega_j$, 定义局部近似:

$$s_j(\mathbf{x}) := \sum_{l \in J(\Omega_j)} \alpha_l \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = \sum_{k \in J(\Omega_j)} \sum_{l \in J(\Omega_j)} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) (A^{-1})_{lk} u_k = \sum_{k \in J(\Omega_j)} \psi_k(\mathbf{x}) u_k, \tag{10}$$

其中 $J(\Omega_j)$ 是 Ω_j 中所有无网格点的全局下标集合. 通过 PU 权重将局部近似值 s_j 加权平均, 可以得到 u 在 Ω 上的 RBF-PU 近似 s , 即对 $\mathbf{x} \in \Omega$ 有

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{j \in I(\mathbf{x})} \omega_j(\mathbf{x}) s_j(\mathbf{x}) = \sum_{j \in I(\mathbf{x})} \omega_j(\mathbf{x}) \sum_{k \in J(\Omega_j)} \psi_k(\mathbf{x}) u_k. \tag{11}$$

RBF-PU 近似的误差 $u - s$ 可由局部近似误差 $u - s_j$ 得到. 更准确地说, 文献 [25] 证明局部近似满足

$$\|D^\alpha u - D^\alpha s_j\|_{L^\infty(\Omega_j \cap \Omega)} \leq \varepsilon_j(\alpha) = Ch_{X, \Omega}^{(k+\nu)/2-|\alpha|} \|f\|_{N_\phi(\Omega)}, \quad j = 1, 2, \dots, K. \tag{12}$$

从而 RBF-PU 近似 s 满足

$$|(D^\alpha u - D^\alpha s)(\mathbf{x})| \leq \sum_{j \in I(\mathbf{x})} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_{\alpha-\beta} R_j^{|\alpha|-\beta} \varepsilon_j(\beta), \quad \mathbf{x} \in \Omega, |\alpha| \leq m. \tag{13}$$

2 非局部问题的 RBF-PU 方法

2.1 圆盘上的数值积分

在 PD 的数值计算中, 会大量涉及到圆盘上的数值积分. 为了降低计算复杂度, 通常的做法是将圆盘的积分转化为矩形上的积分 (如图 2), 矩形上的数值积分直接由一维积分的张量积来获得. 对于二维问题, 利用极坐标变换:

$$x_1 = r \cos(\theta), \quad x_2 = r \sin(\theta), \tag{14}$$

则

$$\int_{B(x, \delta)} u(x'_1, x'_2) dx' = \int_0^\delta \int_0^{2\pi} u(x_1 + r \cos(\theta), x_2 + r \sin(\theta)) r dr d\theta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u\left(x_1 + \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}\xi\right) \cos(\pi + \pi\eta), x_2 + \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}\xi\right) \sin(\pi + \pi\eta)\right) \left(\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}\xi\right) \frac{\pi\delta}{2} d\xi d\eta. \tag{15}$$

有了这些基本工具, 下面给出 RBF-PU 方法形成离散系统的过程.

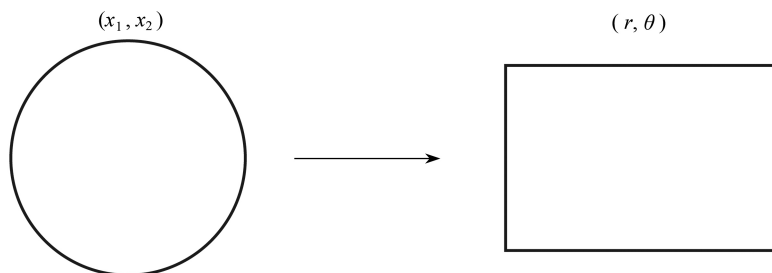


图 2 极坐标变换
Fig. 2 Polar transformation

2.2 非局部扩散方程的RBF-PU方法

二维非局部扩散方程为

$$\begin{cases} \int_{B(\mathbf{x},\delta)} \gamma(\mathbf{x},\mathbf{x}') (u(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}')) d\mathbf{x}' = b(\mathbf{x}), & \text{in } \Omega, \\ u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega_c, \end{cases} \quad (16)$$

其中 γ 为核函数, b 是源项, u 表示物质的浓度. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为有界开区域, $\Omega_c \subset \mathbb{R}^2$ 是围绕 Ω 的带状区域.由RBF-PU方法逼近未知函数 u ,即

$$u(\mathbf{x}) \approx s(\mathbf{x}) = \sum_{j \in I(\mathbf{x})} \omega_j(\mathbf{x}) \sum_{k \in J(\Omega_j)} \Psi_k(\mathbf{x}) u_{x_k}. \quad (17)$$

从而和方程(18)相对应的离散系统为

$$\begin{cases} \sum_{j \in I(\mathbf{x}_i)} \sum_{k \in J(\Omega_j)} \int_{B(\mathbf{x}_i,\delta)} \gamma(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}') [\omega_j(\mathbf{x}_i) \psi_k(\mathbf{x}_i) - \omega_j(\mathbf{x}') \psi_k(\mathbf{x}')] d\mathbf{x}' u_k = b(\mathbf{x}_i), & \text{in } \Omega, \\ u(\mathbf{x}_i) = g(\mathbf{x}_i), & \text{in } \Omega_c, \end{cases} \quad (18)$$

简写为

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (19)$$

方程(18)中的每一项对应矩阵 \mathbf{A} 中的位置为

$$\begin{aligned} A(i, k \in J(\Omega_j)) &\leftarrow \int_{B(\mathbf{x}_i,\delta)} \gamma(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}') [\omega_j(\mathbf{x}_i) \psi_k(\mathbf{x}_i) - \omega_j(\mathbf{x}') \psi_k(\mathbf{x}')] d\mathbf{x}', \quad \forall \mathbf{x}_i \in \Omega, j \in I(\mathbf{x}_i), \\ \mathbf{u} &= (u(\mathbf{x}_1), u(\mathbf{x}_2), \dots, u(\mathbf{x}_N))^T, \\ \mathbf{f} &= (\mathbf{b}, \mathbf{g})^T, \mathbf{b} = (b(\mathbf{x}_1), b(\mathbf{x}_2), \dots, b(\mathbf{x}_N))^T, \mathbf{g} = (g(\mathbf{x}_1), g(\mathbf{x}_2), \dots, g(\mathbf{x}_N))^T. \end{aligned}$$

2.3 近场动力学方程的RBF-PU方法

考虑向量形式的二维近场动力学运动方程:

$$\begin{cases} \int_{B(\mathbf{x},\delta)} \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{y}) (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = \mathbf{b}(\mathbf{x}), & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}), & \text{in } \Omega_c, \end{cases} \quad (20)$$

其中 $\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \gamma_{12}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ \gamma_{21}(\mathbf{x},\mathbf{y}) & \gamma_{22}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \end{pmatrix}$ 为矩阵核函数, $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ 表示位移场, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ 为体积约束边界条件, $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ 是外载荷, Ω 和 Ω_c 的定义同2.2小节.类似地,在子区域 Ω_j 上对未知函数 \mathbf{u} 进行RBF近似.由于位移场 \mathbf{u} 为向量值函数,相应的插值矩阵可以写为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^1 \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

这里

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{x}_1^{[j]}, \mathbf{x}_1^{[j]}) & \phi(\mathbf{x}_1^{[j]}, \mathbf{x}_2^{[j]}) & \dots & \phi(\mathbf{x}_1^{[j]}, \mathbf{x}_n^{[j]}) \\ \phi(\mathbf{x}_2^{[j]}, \mathbf{x}_1^{[j]}) & \phi(\mathbf{x}_2^{[j]}, \mathbf{x}_2^{[j]}) & \dots & \phi(\mathbf{x}_2^{[j]}, \mathbf{x}_n^{[j]}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \phi(\mathbf{x}_n^{[j]}, \mathbf{x}_1^{[j]}) & \phi(\mathbf{x}_n^{[j]}, \mathbf{x}_2^{[j]}) & \dots & \phi(\mathbf{x}_n^{[j]}, \mathbf{x}_n^{[j]}) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

其中 $\mathbf{u}^1 = (u_1(\mathbf{x}_1^{[j]}), u_1(\mathbf{x}_2^{[j]}), \dots, u_1(\mathbf{x}_n^{[j]}))$, $\mathbf{u}^2 = (u_2(\mathbf{x}_1^{[j]}), u_2(\mathbf{x}_2^{[j]}), \dots, u_2(\mathbf{x}_n^{[j]}))$ 分别为位移场 \mathbf{u} 在无网格点上的函数值(未知量).由式(21)、(22)可知,位移场 \mathbf{u} 在区域 Ω_j 上的局部近似为

$$s_j^\zeta(\mathbf{x}) = \sum_{l \in J(\Omega_j)} \lambda_l^\zeta \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l^{[j]}) = \sum_{k \in J(\Omega_j)} \sum_{j \in J(\Omega_j)} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l^{[j]}) (\boldsymbol{\Phi}^{-1})_{lk} u_k = \sum_{k \in J(\Omega_j)} \psi_k(\mathbf{x}) u_k^\zeta, \quad \zeta = 1 \text{ or } 2, \quad (23)$$

其中

$$(\psi_1(\mathbf{x}) \ \psi_2(\mathbf{x}) \ \dots \ \psi_n(\mathbf{x})) = (\phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1^{[j]}) \ \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2^{[j]}) \ \dots \ \phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n^{[j]}) \boldsymbol{\Phi}^{-1}). \quad (24)$$

于是位移场 \mathbf{u} 的 RBF-PU 近似就可以表示为

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{j \in I(\mathbf{x})} \omega_j(\mathbf{x}) s_j^c(\mathbf{x}) = \sum_{j \in I(\mathbf{x})} \omega_j(\mathbf{x}) \sum_{k \in J(\Omega_j)} \psi_k(\mathbf{x}) u_{\mathbf{x}_k}^c, \quad c = 1 \text{ or } 2. \quad (25)$$

将式 (25) 代入方程 (20), 可以得到离散系统:

$$\begin{cases} \int_{B(\mathbf{x}_i, \delta)} \begin{pmatrix} \gamma_{11}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) & \gamma_{12}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) \\ \gamma_{21}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) & \gamma_{22}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{j \in I(\mathbf{x}_i)} \sum_{k \in J(\Omega_j)} u_k^1 (\omega_j(\mathbf{x}_i) \psi_k(\mathbf{x}_i) - \omega_j(\mathbf{y}) \psi_k(\mathbf{y})) \\ \sum_{j \in I(\mathbf{x}_i)} \sum_{k \in J(\Omega_j)} u_k^2 (\omega_j(\mathbf{x}_i) \psi_k(\mathbf{x}_i) - \omega_j(\mathbf{y}) \psi_k(\mathbf{y})) \end{pmatrix} d\mathbf{y} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}_i) \\ f_2(\mathbf{x}_i) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{x}_i) \\ u_2(\mathbf{x}_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}_i) \\ g_2(\mathbf{x}_i) \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (26)$$

由于我们处理的是向量型的近场动力学方程, 所以采用的编号方式为先 \mathbf{x} 方向, 后 \mathbf{y} 方向. 则式 (26) 中的每个积分项对应刚度矩阵 \mathbf{A} 中的位置为

$$\mathbf{A}(i, k \in J(\Omega_j)) \leftarrow \int_{B(\mathbf{x}_i, \delta)} \gamma_{11}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) (\omega_j(\mathbf{x}_i) \psi_k(\mathbf{x}_i) - \omega_j(\mathbf{y}) \psi_k(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad (27)$$

$$\mathbf{A}(i, N+k \in J(\Omega_j)) \leftarrow \int_{B(\mathbf{x}_i, \delta)} \gamma_{12}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) (\omega_j(\mathbf{x}_i) \psi_k(\mathbf{x}_i) - \omega_j(\mathbf{y}) \psi_k(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad (28)$$

$$\mathbf{A}(N+i, k \in J(\Omega_j)) \leftarrow \int_{B(\mathbf{x}_i, \delta)} \gamma_{21}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) (\omega_j(\mathbf{x}_i) \psi_k(\mathbf{x}_i) - \omega_j(\mathbf{y}) \psi_k(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad (29)$$

$$\mathbf{A}(N+i, N+k \in J(\Omega_j)) \leftarrow \int_{B(\mathbf{x}_i, \delta)} \gamma_{22}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) (\omega_j(\mathbf{x}_i) \psi_k(\mathbf{x}_i) - \omega_j(\mathbf{y}) \psi_k(\mathbf{y})) d\mathbf{y}, \quad (30)$$

其中 $J(\Omega_j)$ 是 Ω_j 中无网格点的全局下标集合, $j \in I(\mathbf{x}_i)$, N 是离散点的数量.

3 数值实验

为验证 RBF-PU 方法的有效性和准确性, 我们分别使用 RBF-PU 方法求解了标量形式的非局部扩散方程和向量形式的近场动力学方程. 在所有的算例中, 空间区域 $\Omega = (0, 1)^2$, 体积约束 Ω_c 为 $[-\delta, 1 + \delta]^2 \setminus \Omega$, 径向基函数使用 IMQ 基函数. 精确解用于在边界 Ω_c 上定义 u 的边界值, 由于 f 的具体形式无法解析得到, 所以 f 在每个配置点 \mathbf{x} 处的函数值通过数值积分求得 (计算过程中使用 8×8 的 Gauss 求积点).

整个 RBF-PU 方法使用 MATLAB 编程实现, 并在 8 GB 内存的计算机上完成了所有计算实验. 算例中的线性系统的条件数最高为 10^{11} 量级, 双精度系统有 16~17 位有效数字, 所有系统选用直接法求解. 在无网格方法中通常使用均方根误差 (RMSE) 和相对误差 (RE) 来估计数值近似的误差, 定义为

$$\varepsilon_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - u(\mathbf{x}_i))^2}, \quad (31)$$

$$\varepsilon_{\text{RE}} = \frac{\|u_i - u(\mathbf{x}_i)\|}{\|u(\mathbf{x}_i)\|_2}, \quad (32)$$

其中 N 是区域中配置点的总数, u_i 和 $u(\mathbf{x}_i)$ 分别表示近似解和解析解.

3.1 非局部扩散方程

算例 1 取问题 (16) 的精确解为

$$u(x, y) = x(1-x)y(1-y), \quad (33)$$

核函数为

$$\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}. \quad (34)$$

对区域采用两种离散方式: 一种是在每个方向上均匀离散为 N 份, 均匀离散下离散点的示意图和生成的矩阵结构如图 3 所示; 另一种采用相同数量的 Halton 点进行离散, 离散点的分布和形成的刚度矩阵的结构如图 4 所示. 分别对两种离散形式沿每个方向分别取 10~60 个离散点 (以 10 为增量), 进行数值计算, 均匀离散的

数值结果如表 1 所示.从矩阵条件数看,RBF-PU 方法的条件数在离散点数量为 60×60 时为 $10^{10} \sim 10^{11}$ 量级,而全局 RBF 方法参见文献 [22] 表 7 中的结果为 $10^{14} \sim 10^{15}$ 量级,由此可见,RBF-PU 方法在一定程度上降低了刚度矩阵的条件数.从求解时间上看,RBF-PU 方法在离散点数量为 60×60 时的计算时间约为 25 min,对同等规模的问题,全局 RBF 方法约耗时 10 h 4 min(参见文献 [22] 表 6 中的结果),基于分片线性基函数的配置点法约耗时 14 h 21 min(参见文献 [13] 表 1 中的结果),可以看出 RBF-PU 方法求解时间更短,效率更高.在表 1 最后一行 60×60 离散下的误差反而比 50×50 离散下的误差大,原因有两点:一是影响 RBF-PU 方法精度的参数包括点的分布,PU 块内点的数量,由于 PU 块的大小没有随着离散点的增加而改变,因此导致插值矩阵进一步恶化,导致误差增大.二是由于方程本身的核函数奇异,影响数值积分的精度,由于数值积分点数量固定,在离散点数目较小的时候,数值离散的误差占主导地位,但随着离散点数目增加,数值积分的误差开始占据主导地位,最终导致误差增大,这样的现象在文献 [16] 表 2、3 中也可以观察到.图 5 给出了在 50×50 的情况下数值结果和误差的分布图.Halton点离散下的数值结果如表 2 所示.图 6 给出了 50×50 的情况下的数值结果和误差的分布图.数值实验结果表明,RBF-PU 方法在两种离散方式下在求解非局部扩散方程时都是有效的.

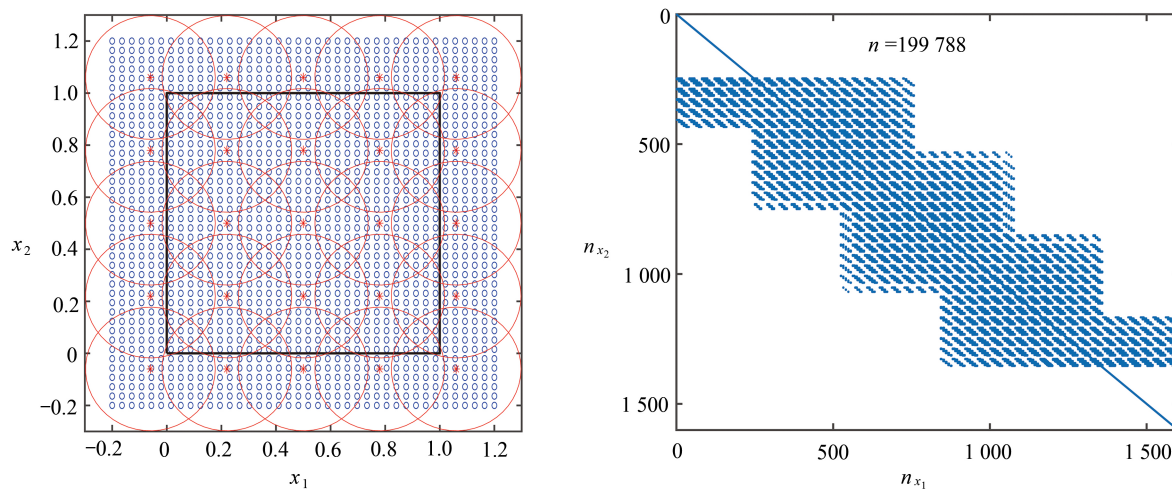


图 3 均匀离散无网格点的分布和非局部扩散方程矩阵结构: (a) 无网格点分布和单位分解划分; (b) 矩阵结构

Fig. 3 The distribution of points and the matrix structure of nonlocal diffusion under uniform discretization: (a) the distribution of meshless points and PU patches; (b) the matrix structure

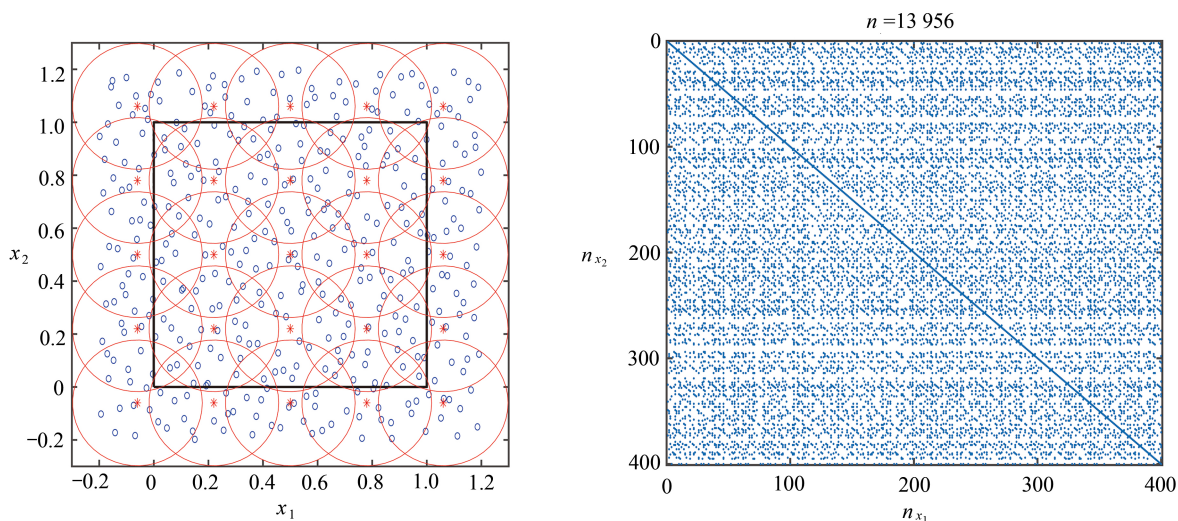


图 4 Halton 离散下点的分布和非局部扩散方程矩阵结构: (a) Halton 点的分布和单位分解划分; (b) 矩阵结构

Fig. 4 The distribution of points and the matrix structure of nonlocal diffusion under Halton discretization: (a) the distribution of Halton points and circular PU patches; (b) the matrix structure

表 1 均匀离散非局部扩散方程数值结果 ($\delta = 0.2$)

Table 1 Numerical results of the nonlocal diffusion equation under uniform discretization ($\delta = 0.2$)

h	ε_{\max}	$\varepsilon_{\text{RMSE}}$	ε_{RE}	N	t/s
1/10	2.392 362E-2	5.340 460E-3	1.596 423E-1	5.103 764E+2	0.46
1/20	3.503 622E-4	1.012 859E-4	3.298 962E-3	2.028 138E+7	3.43
1/30	8.066 769E-6	2.375 277E-6	7.919 804E-5	8.778 054E+10	50.01
1/40	4.408 203E-6	9.530 515E-7	3.211 906E-5	5.302 566E+10	172.58
1/50	4.405 356E-6	1.227 837E-6	4.163 255E-5	2.130 636E+11	605.16
1/60	3.365 385E-5	6.696 457E-6	2.279 511E-4	4.492 236E+11	1 481.48

表 2 离散非局部扩散方程的数值结果 ($\delta = 0.2$)

Table 2 Numerical results of the nonlocal diffusion equation under Halton discretization ($\delta = 0.2$)

h	ε_{\max}	$\varepsilon_{\text{RMSE}}$	ε_{RE}	N	t/s
1/10	2.679 438E-2	6.772 052E-3	2.370 566E-1	3.206 995E+4	0.52
1/20	7.466 535E-4	1.795 671E-4	6.252 326E-3	1.842 649E+8	5.49
1/30	5.920 469E-6	1.175 443E-6	4.070 005E-5	1.805 258E+11	64.71
1/40	1.246 481E-5	2.040 146E-6	7.077 887E-5	8.713 394E+11	173.02
1/50	3.738 273E-6	1.029 311E-6	3.570 744E-5	2.862 032E+11	599.20
1/60	1.798 596E-6	4.251 399E-7	1.472 884E-5	7.453 951E+10	1 511.76

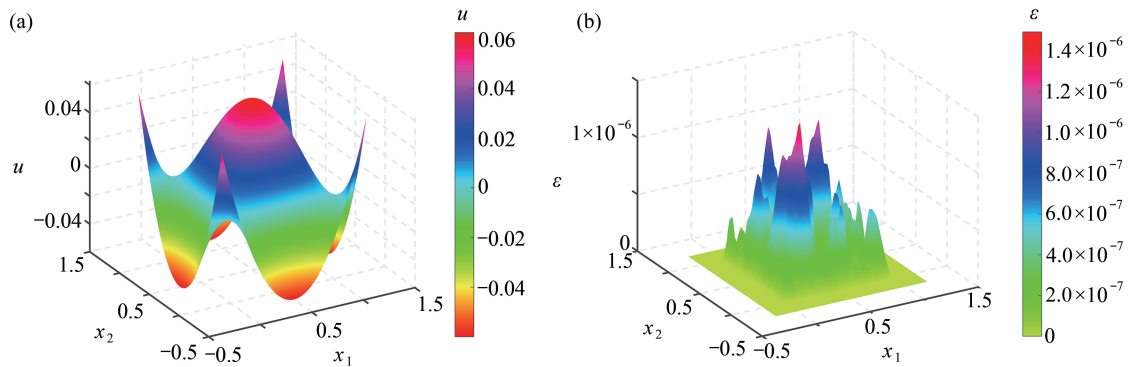


图 5 均匀离散下非局部扩散方程数值解和误差分布: (a) 数值解; (b) 误差分布

Fig. 5 The numerical solution and the error distribution for the nonlocal diffusion equation under uniform discretization: (a) the numerical solution; (b) the error distribution

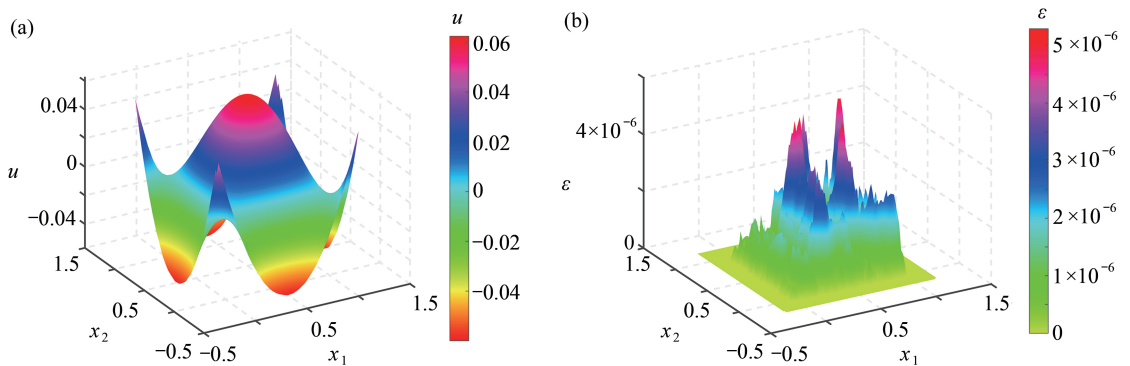


图 6 Halton 离散下非局部扩散方程的数值结果和误差分布图: (a) 数值解; (b) 误差分布

Fig. 6 The numerical solution and the error distribution for the nonlocal diffusion equation under Halton discretization: (a) the numerical solution; (b) the error distribution

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同.

3.2 近场动力学方程

算例2 取二维近场动力学问题 (20) 的精确解为

$$u_1(x_1, x_2) = x_1(1 - x_1)x_2(1 - x_2), u_2(x_1, x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2).$$

核函数为

$$\begin{aligned} \gamma_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{(x'_1 - x_1)^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}, \gamma_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{(x'_1 - x_1)(x'_2 - x_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}, \\ \gamma_{21}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \frac{(x'_1 - x_1)(x'_2 - x_2)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}, \gamma_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{(x'_2 - x_2)^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}. \end{aligned}$$

在均匀离散的情况下对该问题进行了数值实验, 图7给出了均匀离散下点的分布和最终形成的矩阵结构, 计算给出了两个方向的位移场在不同数目的离散点下位移的数值结果, 位移场在x和y方向的数值结果分别如表3和表4所示. 表中数据显示, RBF-PU方法在求解近场动力学方程的时间比相同离散的非局部扩散方程更低, 原因在于在此算例中采取的单位分解划分更小, 导致局部插值矩阵的规模更小, 节省了刚度矩阵生成的时间. 与此同时, 在50×50的离散点下位移和误差的分布如图8和9所示. 计算结果表明, RBF-PU方法在求解向量形式的近场动力学方程时也是有效的.

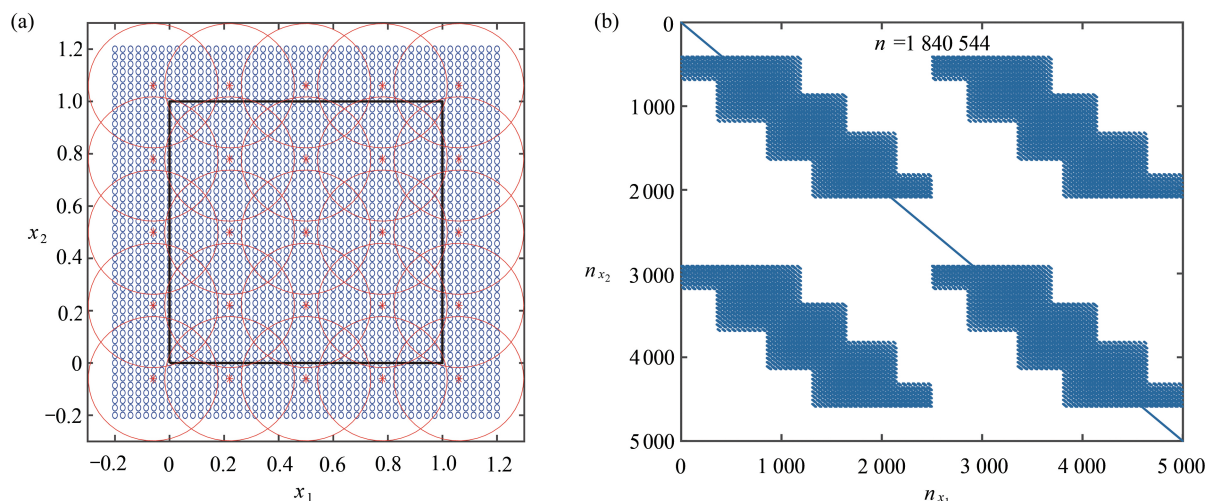


图7 均匀离散下无网格点的分布和近场动力学方程矩阵结构: (a) 无网格点分布和单位分解划分; (b) 矩阵结构

Fig. 7 The distribution of points and the matrix structure for the peridynamic equation under uniform distribution: (a) the distribution of meshless points and circular PU patches; (b) the matrix structure

表3 模型的x方向位移的数值解 $u_1(\delta = 0.2)$

Table 3 Numerical results of displacement in the x direction for the peridynamic model $u_1(\delta = 0.2)$

h	ϵ_{\max}	ϵ_{RMSE}	ϵ_{RE}	N	t/s
1/10	9.242 8E-1	3.507 7E-1	1.048 5E+1	3.56E+4	0.74
1/20	3.084 2E-2	6.767 5E-3	2.204 2E-1	1.00E+6	3.79
1/30	4.183 5E-4	7.338 0E-5	2.446 7E-3	1.89E+10	34.05
1/40	3.455 7E-4	5.556 9E-5	1.872 7E-3	5.38E+11	75.71
1/50	3.072 6E-5	5.480 6E-6	1.858 3E-4	8.93E+10	188.79

表4 模型的y方向位移数值解 $u_2(\delta = 0.2)$

Table 4 Numerical results of displacement in the y direction for the peridynamic model $u_2(\delta = 0.2)$

h	ξ_{\max}	ξ_{RMSE}	ξ_{RE}	N	t/s
1/10	2.674 1E-1	7.270 6E-2	1.551 5E-1	3.56E+4	0.74
1/20	3.168 0E-2	7.372 5E-3	1.583 9E-2	1.00E+6	3.79
1/30	3.069 2E-4	5.738 3E-5	1.235 5E-4	1.89E+10	34.05
1/40	1.803 9E-4	3.851 6E-5	8.302 3E-5	5.38E+11	75.71
1/50	3.037 0E-5	6.134 8E-6	1.323 2E-5	8.93E+10	188.79

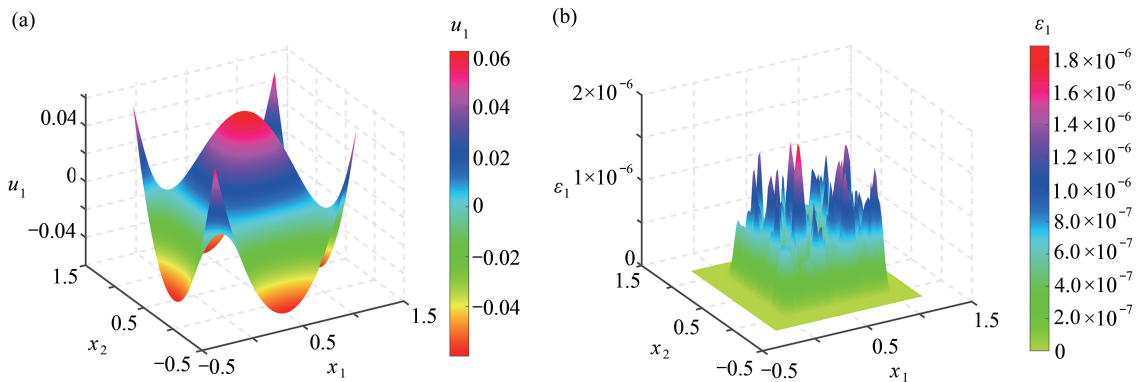


图 8 近场动力学方程 x 方向数值解和误差分布: (a) 数值解; (b) 误差分布

Fig. 8 The numerical solution and the error distribution of the peridynamic equation in the x direction: (a) the numerical solution; (b) the error distribution

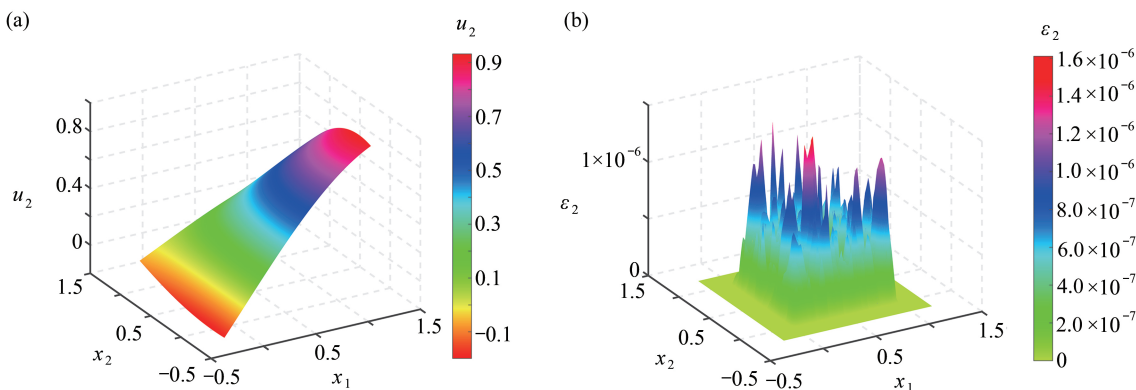


图 9 近场动力学方程 y 方向数值解和误差分布: (a) 数值解; (b) 误差分布

Fig. 9 The numerical solution and the error distribution of the peridynamic equation in the y direction: (a) the numerical solution; (b) the error distribution

4 结 论

本文发展了求解二维非局部扩散和近场动力学问题的 RBF-PU 方法, 该方法无网格依赖性、精度高、易于编程实现. 通过数值算例验证了该方法对此类非局部方程求解的有效性. 基于本文的工作, 可以考虑将此类方法用于更加复杂的非线性、高维近场动力学模型的数值计算当中.

参考文献 (References):

- [1] BOBARU F, MONCHAI D. The peridynamic formulation for transient heat conduction[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, **53**(19/20): 4047-4059.
- [2] DU Q, GUNZBURGER M, LEHOUCQ R B, et al. Analysis and approximation of nonlocal diffusion problems with volume constraints[J]. *SIAM Review*, 2012, **54**(4): 667-696.
- [3] SILLING S A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2000, **48**(1): 175-209.
- [4] SILLING S A, EPTON M, WECKER O, et al. Peridynamic states and constitutive modeling[J]. *Journal of Elasticity*, 2007, **88**(2): 151-184.
- [5] 黄丹, 章青, 乔丕忠, 等. 近场动力学方法及其应用[J]. *力学进展*, 2010, **40**(4): 61-70. (HUANG Dan, ZHANG Qin, QIAO Pizhong, et al. A review on peridynamics(PD) method and its application[J]. *Advances in Mechanics*, 2010, **40**(4): 61-70.(in Chinese))
- [6] GU X, ZHANG Q, MADENCI E. Refined bond-based peridynamics for thermal diffusion[J]. *Engineering Computations*, 2019, **36**(8): 2557-2587.
- [7] 李天一, 章青, 夏晓舟, 等. 考虑混凝土材料非均质特性的近场动力学模型[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(8): 913-924. (LI Tianyi, ZHANG Qing, XIA Xiaozhou, et al. A peridynamic model for heterogeneous concrete

- materials[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(8): 913-924.(in Chinese))
- [8] SILLING S A, ASKARI E. A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics[J]. *Computers and Structures*, 2005, **83**(17/18): 1526-1535.
- [9] CHEN X, GUNZBURGER M. Continuous and discontinuous finite element methods for a peridynamics model of mechanics[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, **200**(9/12): 1237-1250.
- [10] WANG H, TIAN H. A fast Galerkin method with efficient matrix assembly and storage for a peridynamic model[J]. *Journal of Computational Physics*, 2012, **231**(23): 7730-7738.
- [11] TIAN H, WANG H, WANG W. An efficient collocation method for a nonlocal diffusion model[J]. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 2013, **10**(4): 815-825.
- [12] WANG C, WANG H. A fast collocation method for a variable-coefficient nonlocal diffusion model[J]. *Journal of Computational Physics*, 2017, **330**: 114-126.
- [13] WANG H, TIAN H. A fast and faithful collocation method with efficient matrix assembly for a two-dimensional nonlocal diffusion model[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, **273**: 19-36.
- [14] TIAN X C, DU Q. Analysis and comparison of different approximations to nonlocal diffusion and linear peridynamic equations[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2013, **51**(6): 3458-3482.
- [15] LEHOUCQ R B, ROWE S T. A radial basis function Galerkin method for inhomogeneous nonlocal diffusion[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, **299**: 366-380.
- [16] ZHAO W, HON Y C, STOLL M. Localized radial basis functions-based pseudo-spectral method (LRBF-PSM) for nonlocal diffusion problems[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2017, **75**(5): 1685-1704.
- [17] ZHAO W, HON Y C. An accurate and efficient numerical method for solving linear peridynamic models[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, **74**: 113-131.
- [18] PASETTO M, LENG Y, CHEN J, et al. A reproducing kernel enhanced approach for peridynamic solutions[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, **340**: 1044-1078.
- [19] DU Q, YIN X B. A conforming DG method for linear nonlocal models with integrable kernels[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2019, **80**(3): 1913-1935.
- [20] ZHANG S Y, NIE Y F. A POD-based fast algorithm for the nonlocal unsteady problems[J]. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 2020, **17**(6): 858-871.
- [21] LIANG X, WANG L J, XU J F, et al. The boundary element method of peridynamics[R/OL]. 2021(2021-06-16) [2021-10-29].<https://arxiv.org/abs/2009.08008>.
- [22] LU J X, NIE Y F. A collocation method based on localized radial basis functions with reproducibility for nonlocal diffusion models[J]. *Computational and Applied Mathematics*, 2021, **40**(8): 271-294.
- [23] 洪文强, 徐绩青, 许锡宾, 等. 求解Bratu型方程的径向基函数逼近法[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(6): 617-625. (HONG Wenqiang, XU Jiqing, XU Xibin, et al. The radial basis function approximation method for solving Bratu-type equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(6): 617-625.(in Chinese))
- [24] 李怡, 吴林键, 舒丹, 等. 基于Gauss全局径向基函数的近岸浅水变形波高数值计算新方法[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(8): 903-912. (LI Yi, WU Linjian, SHU Dan, et al. A new method to calculate the wave height of deformed shallow water based on the gauss global radial basis function[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(8): 903-912.(in Chinese))
- [25] WENDLAND H. *Scattered Data Approximation*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [26] SHEPARD D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data[C]//*Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference (ACM 68)*. New York: Association for Computing Machinery, 1968: 517-524.