

裂纹面分布加载裂尖SIFs分析的广义参数Williams单元

徐华, 曹政, 邹云鹏, 杨绿峰

Williams Elements With Generalized Degrees of Freedom for Crack Tip SIFs Analysis Under Crack Surface Distributed Loading

XU Hua, CAO Zheng, ZOU Yunpeng, and YANG L ü feng

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420317>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

裂纹面局部均布荷载下 I 型裂纹有限宽板应力强度因子

The Stress Intensity Factor of a Finite Width Plate With a Mode- I Center Crack Subjected to Uniform Stress on the Crack Surface Near the Crack Tip

应用数学和力学. 2020, 41(10): 1083-1091 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410130>

八次对称二维准晶 II 型单边裂纹的动力学问题

Dynamic Problems of Mode II Cracks in 2D Octagonal Quasicrystals

应用数学和力学. 2018, 39(10): 1180-1188 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380272>

带复合型摩擦裂纹的圆盘动态断裂实验有限元分析

Finite Element Analysis on Mixed-Mode Dynamic Fracture Experiments of Centrally Cracked Brazilian Disks With Crack Face Contact

应用数学和力学. 2021, 42(7): 704-712 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410349>

尖锐V型切口混凝土梁的应力强度因子研究

Study on Stress Intensity Factors of Concrete Beams With Sharp V Notches

应用数学和力学. 2018, 39(3): 300-310 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380159>

改进的非协调广义混合单元及性能分析

Improved Noncompatible Generalized Mixed Elements and Performance Analysis

应用数学和力学. 2019, 40(5): 518-526 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390146>

一维正交准晶中具有四条裂纹的椭圆孔口问题的解析解

Analytical Solutions to Problems of Elliptical Holes With 4 Edge Cracks in 1D Orthorhombic Quasicrystals

应用数学和力学. 2019, 40(2): 210-222 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390032>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

裂纹面分布加载裂尖 SIFs 分析的 广义参数 Williams 单元*

徐 华^{1,2}, 曹 政^{1,2}, 邹云鹏³, 杨绿峰^{1,2}

- (1. 广西大学 土木建筑工程学院 工程防灾与结构安全教育部重点实验室, 南宁 530004;
2. 广西大学 土木建筑工程学院 广西防灾减灾与工程安全重点实验室, 南宁 530004;
3. 广西桂能工程咨询集团有限公司, 南宁 530015)

摘要: 带裂缝服役是工程结构的常态, 由于流体侵入到裂缝内部, 裂纹面直接受荷, 使得裂缝进一步扩展, 甚者影响结构的安全性. 广义参数 Williams 单元 (简记 W 单元) 在分析断裂问题中, 利用 Williams 级数建立裂尖奇异区的位移场, 通过求解广义刚度方程可直接获得应力强度因子 (stress intensity factors, SIFs), 具有高精高效性; 但 W 单元需满足奇异区内裂纹面自由的边界条件, 故在分析裂纹面加载的问题中受限. 该文基于 SIFs 互等, 在等效奇异区范围中, 将裂纹面的荷载等效为奇异区外围边界裂纹面上的集中力, 避免奇异区内裂纹面受荷, 故采用 W 单元即可简便计算. 算例分析表明: 等效奇异区尺寸取裂纹长度的 1/20, 等效荷载系数 P 建议取 2.0, W 单元计算精度均满足 1% 的误差限, 证明该文在奇异区裂纹面受荷等效处理方法上具有合理性、通用性, 克服了 W 单元在分析裂纹面加载问题的局限性.

关键词: 裂纹面加载; 荷载等效; 应力强度因子; Williams 单元; 广义参数

中图分类号: O346.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420317

Williams Elements With Generalized Degrees of Freedom for Crack Tip SIFs Analysis Under Crack Surface Distributed Loading

XU Hua^{1,2}, CAO Zheng^{1,2}, ZOU Yunpeng³, YANG Lüfeng^{1,2}

- (1. Key Laboratory of Disaster Prevention and Structural Safety of Ministry of Education, School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, P.R.China;
2. Guangxi Key Laboratory of Disaster Prevention and Engineering Safety, School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, P.R.China;
3. Guangxi G-Energy Engineering Consulting Group Co. Ltd., Nanning 530015, P.R.China)

Abstract: Service with cracks is the normal state of engineering structures. Due to the fluid invading into the crack, the crack surface is loaded directly, which makes the crack further expand, and even affects the safety of the structure. In the analysis of fracture problems, according to the Williams element with generalized degrees of freedom (W element), the Williams series was used to establish the displacement field of the singular zone around the crack tip, and the stress intensity factors (SIFs) can be directly obtained by solving the generalized stiffness equation with high precision and high efficiency. However, the W element needs to satisfy the free boundary condition of the crack surface in the singular zone, so

* 收稿日期: 2021-10-25; 修订日期: 2021-12-20

基金项目: 国家自然科学基金(重点项目)(51738004); 广西自然科学基金(2019GXNSFAA245012)

作者简介: 徐华(1979—), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: xuhua@gxu.edu.cn).

引用格式: 徐华, 曹政, 邹云鹏, 杨绿峰. 裂纹面分布加载裂尖 SIFs 分析的广义参数 Williams 单元[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(7): 752-760.

it is limited in the analysis of crack surface loading. Based on the SIFs reciprocity, the loading on the crack surface is equivalent to the concentrated force on the crack surface at the periphery of the equivalent singular zone, so the loading on the crack surface in the singular zone can be avoided, and the W element can be easily used for calculation. The numerical examples show that, the size of the equivalent singular zone is 1/20 of the crack length, the suggested equivalent load coefficient P is 2.0, and the calculation accuracy of the W element meets the error limit of 1%. The equivalent treatment method for the analysis of crack surface loading in the singular zone is reasonable and universal, and overcomes the limitation on the W element in analysis of the loading problem on crack surface.

Key words: loading on the crack; load equivalence; stress intensity factor; Williams element; generalized degrees of freedom

引 言

工程结构通常是带裂缝工作的, 如水文环境中的混凝土坝、海洋工程、地下工程和压力容器等, 其结构表面的裂缝易遭受流体侵入, 有可能加速裂缝扩展与连通, 引起结构的局部强度和整体承载力降低, 甚至引发结构失效破坏, 这些重大工程一旦破坏将引起难以估量的损失. 因此, 对裂纹面受荷的工程结构断裂行为研究具有十分重要的现实意义.

裂纹面受荷时, 其裂尖附近应力场和位移场较复杂, 难以定量描述, 通常仍以 SIFs 作为裂尖附近应力-应变场强弱程度的度量, 并可据此进一步判断结构的安全性. 基于此, 国内外学者围绕裂纹面加载的裂尖 SIFs 开展了大量研究工作. 刘钧玉等^[1-2]、Zhong 等^[3] 和陈白斌等^[4] 基于比例边界有限元法, 分别对裂纹面受拉伸荷载的单边裂纹、多裂纹和界面裂纹的裂尖 SIFs 进行了分析, 该方法相较于普通有限单元法, 需引入多个系数矩阵, 增加了计算工作量. 李亚等^[5] 采用线场分析方法, 对无限大板中心裂纹面受均布荷载的应力场进行修正, 进而得到了有限宽板中心裂纹的裂尖 SIFs, 但不同的裂纹模型均需相对应的应力函数. Fett 等^[6] 利用 ABAQUS 有限元软件拟合半无限大板边界斜裂纹面上受集中力的权函数, 以此求解了裂尖复合型 SIFs. 文献 [5-6] 针对不同的裂纹模型, 均需找到相对应的函数才能求解 SIFs, 不具有通用性. Li 等^[7] 采用柔度法求解有限宽板边界裂纹面受分布荷载的裂尖 SIFs, 需通过叠加法对原始模型进行拆分处理, 不能直接求解. Walters 等^[8] 针对三维模型中裂纹面受荷的平面裂纹 SIFs, 基于相互作用积分法分离出独立的裂纹面荷载积分项, 提高了计算精度. Muthu 等^[9] 提出了一种基于扩展无网格 Galerkin 法的裂纹闭合积分理论, 通过求解应变能释放率获得裂尖 SIFs 的方法. 在实际工程方面, 贾金生等^[10] 基于断裂力学理论估算了重力坝坝踵水平裂缝中含高压水的裂尖 SIFs, 但基本假设较为粗略, 与实际结果存在较大误差. 唐世斌等^[11] 建立了在土压力、裂纹面和井筒内水压耦合作用下的射孔裂尖 SIFs 计算方程. 综上所述, 当前的裂纹面受荷问题仍以有限单元法为主, 但该方法本身仍存在较大的改进空间. 广义参数有限元法^[12] 是有限单元法的一个分支, 该方法通过整体控制方程求解出与 SIFs 直接相关的广义参数, 避免了线性外推拟合等繁琐的后处理过程引起的二次误差, 从而具有很高的精度. 但该方法建立的 W 单元需满足奇异区内裂纹面自由的边界条件, 即 $\sigma_\varphi = 0$, $\tau_{r\varphi} = 0$ ($\varphi = \pm\pi$), 而裂纹面受荷时不满足该边界条件, 仍需改进.

针对同样不满足边界条件的曲线裂纹^[13], 课题组在裂尖建立等效区, 将等效区内的曲线转换为折线以满足 W 单元的边界条件, 受此思想启发, 对裂纹面直接受荷模型, 本文提出了一种基于 SIFs 互等的裂纹面裂尖奇异区荷载等效处理方法, 即将奇异区内的分布荷载等效为奇异区边界的集中荷载, 避免奇异区裂纹面受荷而无法使用 W 单元求解, 充分发挥了 W 单元求解 SIFs 的高精高效优势. 同时, 通过算例分析, 给定荷载类型等效系数建议值, 为裂纹面受荷求解裂尖 SIFs 提供了新的思路.

1 裂尖局部分布荷载的等效处理

以一含边界裂纹的矩形板为例, 其板高为 $2H$, 板宽为 W , 裂纹长度为 a , 在裂纹张口处建立整体坐标系 XOY , 取裂尖局部等效区边长为 $2c$, 裂纹面受到分布压力 $\sigma(X) = \sigma_0|1 - X/a|^2$, σ_0 为 O 点处压力值, 如图 1 所示.

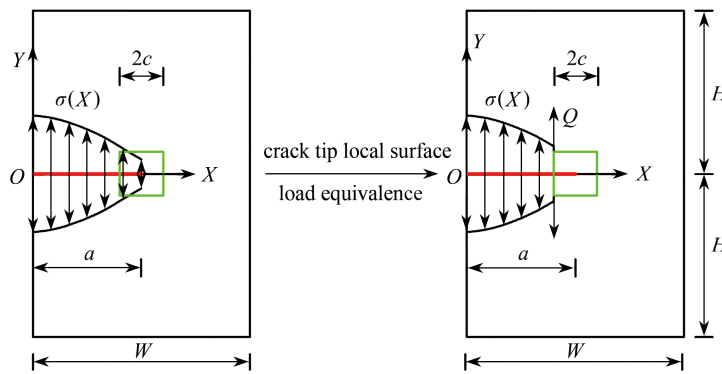


图1 裂尖局部面荷载等效

Fig. 1 Crack tip local surface load equivalence

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同.

笔者尝试推导整个裂纹面加载时裂尖应力场和位移场的 Williams 级数表达式, 即裂纹面为非自由面, 此时, 因边界条件较难处理, 其表达式异常复杂. 根据《应力强度因子手册》^[14], 裂尖局部加载和裂纹面上作用集中力情况均有高精度的参考解. 基于此, 现提出利用 SIFs 互等, 即将裂尖局部分布力等效为裂纹面上一对集中力 Q , 如图 1 所示. 以 $\lambda=0$ 为例, 裂尖局部均布荷载 σ_0 和裂纹面集中荷载 Q 作用时, 其裂尖 I 型 SIFs 表达式为

$$\begin{cases} K_I = p\sigma_0 \sqrt{\pi a}, \\ K'_I = p' \frac{Q}{\sqrt{\pi a}}, \end{cases} \quad (1)$$

式中, K_I, K'_I 分别表示仅裂尖局部受分布压力和裂纹面受一对集中压力的 I 型 SIFs; p, p' 分别表示裂尖局部加载和裂纹面作用集中力时的荷载系数, 详见文献 [14].

假定 $K_I = K'_I$, 则集中力 Q 与裂尖局部荷载 σ_0 有如下关系:

$$Q = \frac{p}{p'} \pi \sigma_0 a. \quad (2)$$

由此, 可得到裂纹面局部受均布荷载的等效公式. 同理, 可以推导裂纹面裂尖局部长度 c 上受分布荷载 $\sigma(X)$ 的等效公式, 即

$$Q = P \int_{a-c}^a \sigma(X) dX, \quad (3)$$

式中, P 表示等效荷载系数, $P = \frac{p}{p'} \pi$.

综上所述, 只需根据荷载类型即可得出 $\int_{a-c}^a \sigma(X) dX$ 与 $\sigma_0 a$ 的关系式, 并根据《应力强度因子手册》^[14] 查询荷载系数 p 与 p' , 确定等效荷载系数 P , 进而获得等效集中力 Q .

2 基于 W 单元确定裂纹面受荷的 SIFs

2.1 裂纹面奇异区受荷的 W 单元模型

如图 1 所示, 绿色正方形区域为裂尖奇异区, 其外围为常规区, 因 W 单元对奇异区尺寸不敏感, 假定本文选取的奇异区尺寸等于上节中的裂尖局部尺寸. 奇异区内采用 W 单元, 外围常规区选用四边形 8 节点等参单元; 常规区网格可通过 ANSYS 有限元软件进行自由离散, 奇异区的网格划分规则如下: 将奇异区均分为 8 个三角形条元, 各条元离散为 n 个基于径向离散比例因子 α 自相似的梯形子单元和一个裂尖三角形微单元, 因裂尖三角形微单元极小, 可忽略其刚度贡献, 则将内部 n 个位移场由 Williams 级数控制的子单元集成的梯形条元定义为 W 单元. W 单元最外层子单元因其一条边 (图 2 中的绿色边界) 为奇异区与常规区的交界, 保留边界上 3 个实节点, 内部 5 个节点转化为虚节点, 称该单元为过渡单元. 奇异区内分布荷载 $\sigma(X)$ 可通过等效处理为奇异区边界一对集中力 Q , 如图 2 所示.

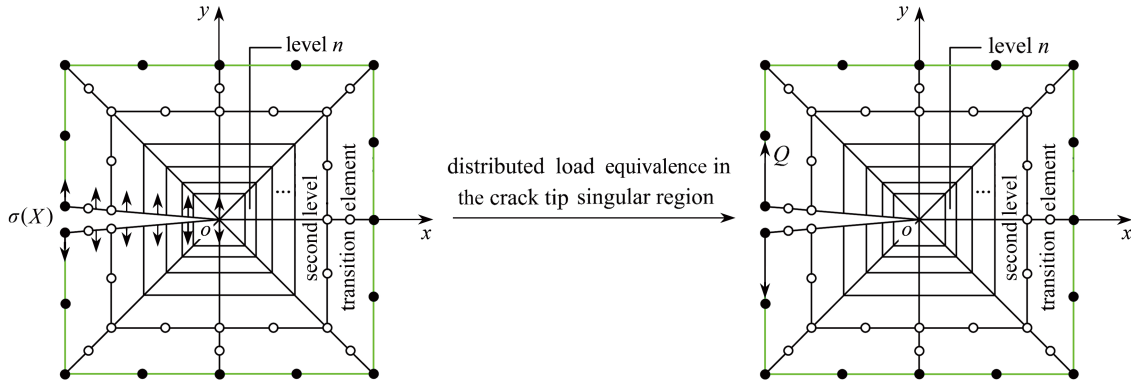


图 2 裂尖奇异区网格划分及分布荷载等效

Fig. 2 Discretization and distributed load equivalence in the crack tip singular region

以裂尖为局部坐标原点 o , 建立局部直角坐标系 xoy , 如图 2 所示. 以 Williams 级数表示裂尖奇异区位移场, 并取级数的前 $m + 1$ 项:

$$\begin{cases} u = \sum_{l=0}^m \rho^{\frac{l}{2}} [a_l f_{l,11}(\varphi) + b_l f_{l,12}(\varphi)], \\ v = \sum_{l=0}^m \rho^{\frac{l}{2}} [a_l f_{l,21}(\varphi) + b_l f_{l,22}(\varphi)], \end{cases} \quad (4)$$

式中, u, v 分别表示裂尖局部直角坐标系下 x, y 轴对应的位移分量; ρ, φ 分别表示裂尖局部极坐标系下的极径和极角分量, $f_{l,11}(\varphi), f_{l,12}(\varphi), f_{l,21}(\varphi), f_{l,22}(\varphi)$ 为三角函数, 具体取值可参考文献 [12].

2.2 奇异区刚度方程集成

以任一 W 单元为例, 根据四边形 8 节点等参单元理论, 该条元内任意第 k 层子单元的刚度方程可表示为

$$\bar{\mathbf{K}}^{(k)} \mathbf{w}^{(k)} = \bar{\mathbf{p}}^{(k)}, \quad (5)$$

式中, $\bar{\mathbf{K}}^{(k)}$ 为第 k 层子单元刚度矩阵; $\mathbf{w}^{(k)}$ 为第 k 层子单元节点位移列阵, 平面问题每个节点具有 2 个自由度, 即 $\mathbf{w}^{(k)} = [u_1^{(k)} \quad v_1^{(k)} \quad \cdots \quad u_8^{(k)} \quad v_8^{(k)}]^T$; $\bar{\mathbf{p}}^{(k)}$ 为第 k 层子单元节点荷载列阵, 其中奇异区裂纹面的荷载需等效至边界, 即奇异区内所有虚节点荷载为 0, 故当 $k=2 \sim n$ 时, $\bar{\mathbf{p}}^{(k)} = \mathbf{0}$.

结合式 (4), 将任意第 k 层子单元位移列阵表示为矩阵形式:

$$\mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)} \boldsymbol{\phi}, \quad (6)$$

$$\mathbf{T}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{0,1}^{(k)} & \mathbf{F}_{1,1}^{(k)} & \cdots & \mathbf{F}_{m,1}^{(k)} \\ \mathbf{F}_{0,2}^{(k)} & \mathbf{F}_{1,2}^{(k)} & \cdots & \mathbf{F}_{m,2}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{F}_{0,8}^{(k)} & \mathbf{F}_{1,8}^{(k)} & \cdots & \mathbf{F}_{m,8}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{F}_{m,i}^{(k)} = (\rho^{(k)})^{\frac{m}{2}} \begin{bmatrix} f_{m,11}(\varphi^{(k)}) & f_{m,12}(\varphi^{(k)}) \\ f_{m,21}(\varphi^{(k)}) & f_{m,22}(\varphi^{(k)}) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\phi} = [a_0, b_0, a_1, b_1, \cdots, a_m, b_m]^T, \quad (9)$$

式中, $\mathbf{T}^{(k)}$ 表示第 k 层子单元转换矩阵; $\boldsymbol{\phi}$ 表示广义参数列阵.

将式 (5) 等号两边同时左乘 $\mathbf{T}^{(k)T}$ 得

$$\mathbf{T}^{(k)T} \bar{\mathbf{K}}^{(k)} \mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{T}^{(k)T} \bar{\mathbf{K}}^{(k)} \mathbf{T}^{(k)} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{T}^{(k)T} \bar{\mathbf{p}}^{(k)}, \quad (10)$$

并可改写为

$$\mathbf{K}^{(k)} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{p}^{(k)}, \quad (11)$$

式中, $\mathbf{K}^{(k)}, \mathbf{p}^{(k)}$ 分别为第 k 层子单元的广义刚度矩阵和广义荷载列阵, 且当 $k=2 \sim n$ 时, $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{0}$.

根据式(11)可知,各层子单元刚度矩阵大小相同,且存在相同乘数 ϕ ,故可将条元内第2~ n 层子单元刚度方程进行叠加:

$$\sum_{k=2}^n \mathbf{K}^{(k)} \phi = \sum_{k=2}^n \mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{0}, \quad (12)$$

即 $\mathbf{K}_{ss} \phi = \mathbf{0}$, \mathbf{K}_{ss} 表示第2~ n 层子单元广义刚度矩阵之和.

奇异区最外层的过渡单元,即W单元中第1层子单元,有3个实节点位于常规区与奇异区交界处,5个虚节点位于奇异区内部.根据节点所在区域不同,将过渡单元的位移向量分块表示为

$$\mathbf{w}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_b^{(1)} \\ \mathbf{w}_s^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{6 \times 6} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{10 \times 2(m+1)}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_b^{(1)} \\ \phi \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

式中, $\mathbf{w}_b^{(1)}$ 表示过渡单元的实节点位移列阵; $\mathbf{w}_s^{(1)}$ 表示过渡单元的虚节点位移列阵; $\mathbf{T}_{10 \times 2(m+1)}^{(1)}$ 表示过渡单元的转换矩阵 $\mathbf{T}_{16 \times 2(m+1)}^{(1)}$ 的后10行,下角标 $10 \times 2(m+1)$ 表示该矩阵大小.

将过渡单元的广义刚度方程按照虚、实节点分块表示,并与第2~ n 层子单元的刚度方程进行叠加,因此可得一个W单元的刚度方程:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{bb}^{(1)} & \mathbf{K}_{bs}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{sb}^{(1)} & \mathbf{K}_{ss} + \mathbf{K}_{ss}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_b^{(1)} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

式中, $\mathbf{K}_{bs}^{(1)} = \bar{\mathbf{K}}_{bs}^{(1)} \mathbf{T}_{10 \times 2(m+1)}^{(1)}$, $\mathbf{K}_{sb}^{(1)} = \mathbf{T}_{10 \times 2(m+1)}^{(1)T} \bar{\mathbf{K}}_{sb}^{(1)}$, $\mathbf{K}_{ss}^{(1)} = \mathbf{T}_{10 \times 2(m+1)}^{(1)T} \bar{\mathbf{K}}_{ss}^{(1)} \mathbf{T}_{10 \times 2(m+1)}^{(1)}$.由于过渡单元实节点无外加荷载,故其荷载列阵为 $\mathbf{0}$.

根据式(14),将8个W单元刚度方程进行集成,并将奇异区边界的裂纹面等效荷载 Q 叠加至相应节点可得到奇异区的整体刚度方程:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{bb} & \hat{\mathbf{K}}_{bs} \\ \hat{\mathbf{K}}_{sb} & \hat{\mathbf{K}}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_b \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_Q \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

式中, $\hat{\mathbf{K}}_{bb}$ 表示奇异区边界实节点的刚度矩阵; $\hat{\mathbf{K}}_{ss}$ 表示奇异区内部虚节点的广义刚度矩阵; $\hat{\mathbf{K}}_{bs}$, $\hat{\mathbf{K}}_{sb}$ 为奇异区边界实节点与内部虚节点的关联刚度矩阵; \mathbf{w}_b 表示奇异区边界实节点的位移列阵; $\bar{\mathbf{p}}_Q$ 表示奇异区边界实节点等效荷载 Q 的荷载列阵.

2.3 整体刚度方程的集成

将常规区所有单元的刚度方程进行集成,并以奇异区外围节点为界,分块表示为

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{rr} & \bar{\mathbf{K}}_{rb} \\ \bar{\mathbf{K}}_{br} & \bar{\mathbf{K}}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_r \\ \mathbf{w}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_r \\ \bar{\mathbf{p}}_b \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

式中, $\bar{\mathbf{K}}_{rr}$ 表示常规区节点的刚度矩阵; $\bar{\mathbf{K}}_{bb}$ 表示常规区与奇异区交界节点的刚度矩阵; $\bar{\mathbf{K}}_{rb}$, $\bar{\mathbf{K}}_{br}$ 表示常规区与奇异区交界节点的关联刚度矩阵; \mathbf{w}_r , $\bar{\mathbf{p}}_r$ 分别表示常规区节点的位移列阵与荷载列阵.

计算模型分为常规区和奇异区两个部分,即将式(15)和(16)的刚度方程进行集成,得到整个模型的刚度方程:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{rr} & \bar{\mathbf{K}}_{rb} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{K}}_{br} & \bar{\mathbf{K}}_{bb} + \hat{\mathbf{K}}_{bb} & \hat{\mathbf{K}}_{bs} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{K}}_{sb} & \hat{\mathbf{K}}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_r \\ \mathbf{w}_b \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_r \\ \bar{\mathbf{p}}_b + \bar{\mathbf{p}}_Q \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (17)$$

2.4 SIFs 求解

通过引入模型的应力、位移边界条件,对整体刚度方程式(17)进行求解,即可获得裂尖奇异区的广义参数列阵 ϕ .将列阵中的广义参数 a_1 , b_1 分别代入式(18),计算获得裂尖应力强度因子:

$$\begin{cases} K_{\text{I}} = \sqrt{2\pi}a_1, \\ K_{\text{II}} = \sqrt{2\pi}b_1. \end{cases} \quad (18)$$

3 算例分析

3.1 裂纹面受均布压力

例 1 如图 1 所示的边界裂纹矩形板, 其板高为 $2H$, 宽为 W , 且有 $W = 2H = 100$ cm, 裂纹长度为 a , 板厚 t 取单位厚度, 奇异区范围取边长为 $2c$ 的正方形. 裂纹面施加均布压力 ($\lambda = 0$), $\sigma_0 = 1$ kN/cm², 弹性模量 $E = 3 \times 10^4$ MPa, Poisson 比 $\nu = 0.3$. 因篇幅所限, 本文先研究此方法在 I 型裂纹中的适用性, II 型裂纹另做研究.

取 $a/W = 0.3$ 的模型为例, 根据前期研究成果建议奇异区尺寸取 $c = a/20$, 使用 ANSYS 有限元软件对模型常规区进行网格自由离散, 此时离散为 146 个单元, 501 个节点, 如图 3 所示. 将常规区的单元、节点信息以及约束等导入自编的 FORTRAN 程序, 通过求解模型整体刚度方程以获得裂尖 SIFs.

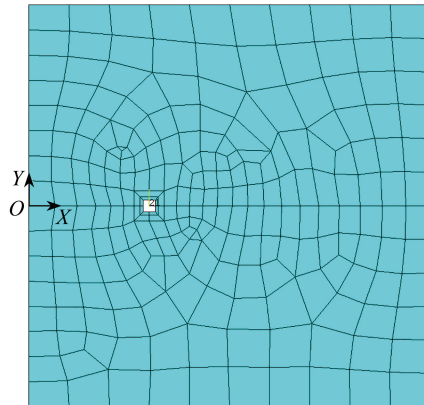


图 3 常规区网格离散

Fig. 3 Discretization in the regular region

根据《应力强度因子手册》(P303、P304)的裂尖局部面荷载作用下荷载系数 p, p' 随 a/W 变化曲线图^[14], 通过 GetData 软件提取荷载系数 p, p' 代表性点的坐标, 利用 Excel 软件拟合即可获得 P 与 a/W 的关系式: $P = 1.94 + 0.57(a/W) - 1.51(a/W)^2$. 本模型参数的具体取值如表 1 所示.

表 1 模型参数 ($\lambda=0$)

Table 1 Model parameters ($\lambda=0$)

a/W	$\int_{a-c}^a \sigma(X) dX$	P	Q
0.05	0.5	1.96	0.982
0.10	0.5	1.98	0.991
0.20	0.5	1.99	0.997
0.30	0.5	1.98	0.988
0.40	0.5	1.93	0.963
0.50	0.5	1.85	0.924
0.60	0.5	1.74	0.869
0.70	0.5	1.60	0.800

由表 1 可以看出, 随着 a/W 的变化, 等效荷载系数 P 在 1.60~2.00 范围取值. 鉴于此, 本算例适当放大 P 的取值范围, 研究在 P 取不同值时, a/W 的变化对 SIFs 的影响.

W 单元的 3 个重要参数的建议值^[12] 为 $\alpha = 0.9, m = 20, n = 300$. 将 W 单元计算结果与文献 [14] 的解对比, 为直观体现各计算结果的区别, 将 SIFs 无量纲化 ($K_I/(\sigma_0 \sqrt{\pi a})$), 如图 4 所示.

均布压力作用于边界裂纹面时, 若忽略奇异区裂纹面的荷载 ($P=0$), 计算误差为 4%~17%, 且随着 a/W 的增大而减小, 表明随着裂纹长度的增加, 裂尖局部荷载对 SIFs 的影响逐渐变小. 对奇异区裂纹面荷载等效处理后, 现选取 1% 为误差限, 根据叠加法可知, 当 P 的取值范围为 [2.0, 2.1] 时, 任意 a/W 均满足该误差限. 整体上, 随着 a/W 的增加, 无量纲 SIFs 呈增大的趋势, 且增大的趋势愈加显著.

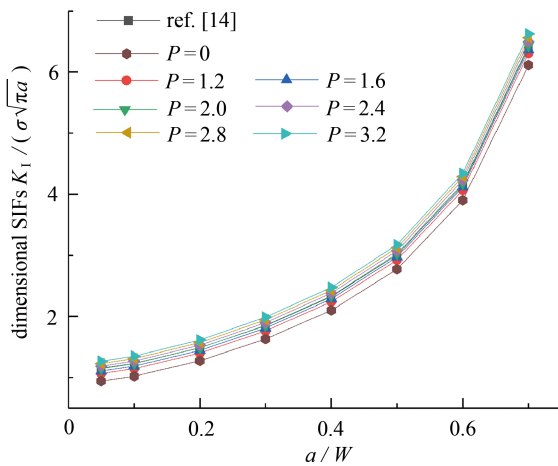


图4 边界裂纹面受均布压力计算结果

Fig. 4 Calculation results for uniformly distributed pressure on the crack surface

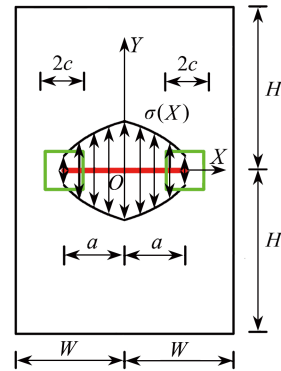


图5 中心裂纹面受均布荷载

Fig. 5 The uniformly distributed load on the central crack surface

例2 当均布压力作用于中心裂纹上,如图5所示,其板高为2H,宽为2W,且有W = H = 100 cm,矩形板厚度t为单位厚度,裂纹长度为2a,奇异区边长2c,材料参数同本算例的边界裂纹板。

根据对称性,取半模型进行分析,以a/W = 0.3的模型为例,根据前期研究成果建议奇异区尺寸取c = a/20,使用ANSYS有限元软件对模型常规区进行网格自由离散,此时离散为181个单元,602个节点,如图6所示.将常规区的单元、节点信息以及约束等导入自编的FORTRAN程序,通过求解模型整体刚度方程以获得裂尖SIFs.

根据《应力强度因子手册》^[14]拟合出中心裂纹的等效荷载公式 $P = 2.03 + 0.11(a/W) + 0.11(a/W)^2$.当a/W取值在[0.01, 0.8]区间时,P的取值范围为[2.03, 2.18].适当放大P的取值范围,研究P取不同值的情况下,a/W的变化对SIFs的影响.

W单元的3个重要参数的建议值^[12]为 $\alpha = 0.9, m = 20, n = 300$.将W单元计算结果与文献[14]的解对比,如图7所示.

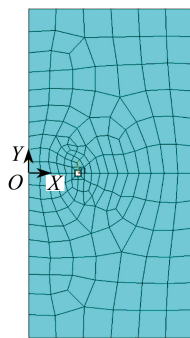


图6 常规区网格离散

Fig. 6 Discretization in the regular region

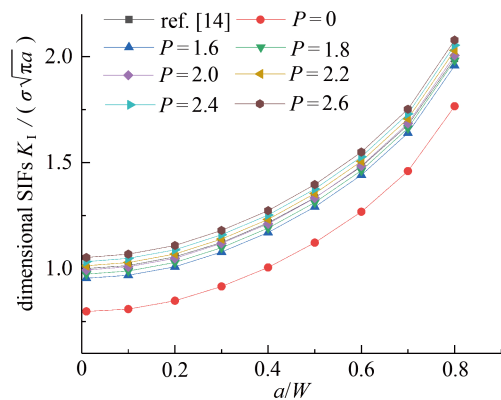


图7 中心裂纹面受均布压力计算结果

Fig. 7 Calculation results for uniformly distributed pressure on the central crack surface

均布压力作用于中心裂纹面时,若忽略奇异区裂纹面的荷载(P=0),计算误差均在11%以上,最大达到20.2%,且该误差随着a/W的增大而逐渐减小.同样以1%为误差限,根据叠加原理可以推断出,对任意a/W,均满足该误差限要求的P取值范围为[1.95, 2.05].随着中心裂纹板的裂纹长度增加,无量纲SIFs呈递增的趋势,且递增幅度逐渐变大.

综上,对奇异区荷载进行等效处理是有必要的,在1%的误差限下,现给出P建议取值为2.0,不仅对裂纹面受均布压力的边界裂纹和中心裂纹都有良好的适用性,且保证了计算精度.均布荷载和线性荷载是工程中

常见的荷载类型, 故下文将以裂纹面受线性压力为例, 验证 P 建议取值的通用性。

3.2 裂纹面受线性压力

算例各参数具体取值与模型网格划分同本文的例 1 和例 2, 仅荷载形式不一样, 此时施加于裂纹面的分布压力为 $\sigma(X) = \sigma_0|1 - X/a|^{\lambda}$, $\sigma_0 = 1 \text{ kN/cm}^2$, $\lambda = 1$. 结合本文的荷载等效处理方法和 W 单元求解算例中的 SIFs.

将常规区的单元、节点信息以及约束等导入自编的 FORTRAN 程序, 通过求解模型整体刚度方程以获得裂尖 SIFs. 本算例中, W 单元重要参数建议值为 $\alpha = 0.9$, $m = 20$, $n = 300$.

① 裂纹面受到线性压力时, 由于文献 [14] 无荷载系数 p, p' 的具体取值, 故无法拟合出等效荷载系数 P 的关系式. 现尝试 $P = 2.0$ 的建议取值时, 研究不同 a/W 模型下的边界裂纹和中心裂纹 SIFs, 并与文献 [14] 的参考解进行比较. 无量纲 SIFs 的计算结果如图 8 所示.

由图 8 可知, 当 $P = 2.0$ 时, 计算结果误差均满足 1% 的误差限, 证明在分析裂纹面受线性压力的中心裂纹或边界裂纹问题时, 荷载等效的处理方法均有很好的通用性和高精性. 当裂纹长度较小时, 边界裂纹与中心裂纹的无量纲 SIFs 接近, 而随着 a/W 的增大, 无量纲 SIFs 呈增大的趋势, 且边界裂纹的增长幅度大于中心裂纹.

② 当 $P = 2.0$ 时, 现取边界裂纹和中心裂纹的矩形板宽为 $W = 100 \text{ cm}$, 研究不同的 H/W 情况下, a/W 的变化对 SIFs 的影响, 并与文献 [14] 的参考解进行比较. 无量纲 SIFs 结果如图 9 所示.

由图 9 可看出, H/W 和 a/W 取不同值时, W 单元计算结果均满足 1% 的误差限, 这说明在奇异区尺寸取建议值的情况下, 等效荷载系数 P 对裂纹位置或模型尺寸都不敏感, 且适用于常见的裂纹面分布荷载类型, 证明了本文的荷载等效处理方法具有很强的适用性, 但由于篇幅所限, 算例中只对均布荷载与线性荷载进行了论证. 当 H/W 增大时, 无量纲 SIFs 呈减小的趋势; 当 a/W 增大时, 无量纲 SIFs 呈增大的趋势, 这表明裂纹模型是存在尺寸效应的.

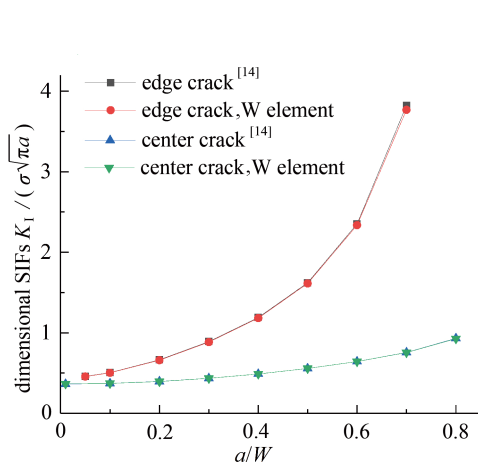


图 8 裂纹面受线性压力计算结果

Fig. 8 Calculation results for linear pressure on the crack surface

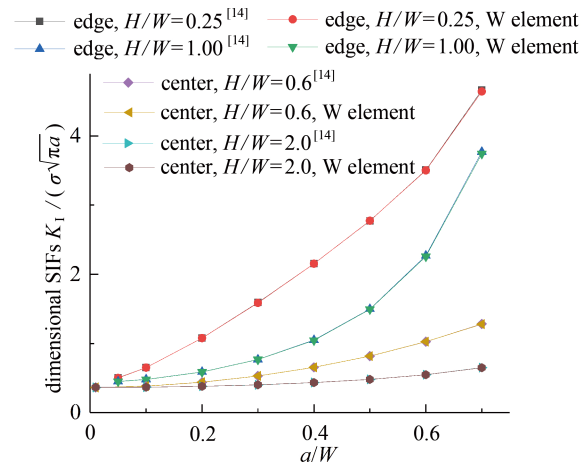


图 9 无量纲 SIFs 随尺寸变化的计算结果

Fig. 9 Calculation results for dimensionless SIFs varying with sizes

4 结 论

本文对裂纹面奇异区荷载进行等效处理, 使得等效奇异区内裂纹面满足 W 单元裂纹面自由的边界条件, 通过裂纹面受不同荷载的边界裂纹和中心裂纹奇异区荷载等效算例分析, 验证了本文等效处理的正确性与通用性, 得到了以下结论:

1) 确定等效奇异区尺寸后, 结合算例简化了等效荷载系数 P 的关系式, 并建议取值为 2.0. 算例结果表明, 本文方法与《应力强度因子手册》对比, 其 SIFs 误差均小于 1%; 而且《应力强度因子手册》所采用的权函数法, 当模型、荷载变化时, 均需重新确定权函数, 相较于 W 单元缺乏灵活性.

2) 等效荷载系数 P 的取值不再是由模型尺寸、裂纹长度决定的关系式, 无需通过《应力强度因子手册》拟合, 且适用于裂纹面受均布或线性压力的边界裂纹和中心裂纹, 证明了本文对奇异区荷载进行等效处理方法具有很强的简便性与通用性.

3) 含裂纹的矩形板, 裂纹面受荷时, 随着 a/W 的增大, I 型无量纲 SIFs 均呈增大的趋势, 且增大幅度愈加明显; 随着 H/W 的增大, 无量纲 SIFs 呈减小的趋势, 这些都表明结构内部缺陷的增多会加速其破坏进程. 相同模型尺寸下, 边界裂纹的无量纲 SIFs 整体大于中心裂纹, 说明了裂纹的约束条件对 SIFs 的影响较大.

参考文献(References):

- [1] 刘钧玉, 林皋, 范书立, 等. 裂纹面受荷载作用的应力强度因子的计算[J]. 计算力学学报, 2008, **25**(5): 621-626. (LIU Junyu, LIN Gao, FAN Shuli, et al. The calculation of stress intensity factor including the effects of surface tractions[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2008, **25**(5): 621-626.(in Chinese))
- [2] LIU J Y, LIN G, LI X C, et al. Evaluation of stress intensity factors for multiple cracked circular disks under crack surface tractions with SBFEM[J]. *China Ocean Engineering*, 2013, **27**(3): 417-426.
- [3] ZHONG H, LI C L, LI H J, et al. Stress intensity factors of interfacial crack with arbitrary crack tractions[J]. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2019, **304**(5): 052111.
- [4] 陈白斌, 李建波, 林皋. 无需裂尖增强函数的扩展比例边界有限元法[J]. 水利学报, 2015, **46**(4): 489-496, 504. (CHEN Baibin, LI Jianbo, LIN Gao. An extended scaled boundary finite element method without asymptotic enrichment of the crack tip[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2015, **46**(4): 489-496, 504.(in Chinese))
- [5] 李亚, 易志坚, 王敏, 等. 裂纹面局部均布荷载下 I 型裂纹有限宽板应力强度因子[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(10): 1083-1091. (LI Ya, YI Zhijian, WANG Min, et al. The stress intensity factor of a finite-width plate with a mode-I center crack subjected to uniform stress on the crack surface near the crack tip[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(10): 1083-1091.(in Chinese))
- [6] FETT T, RIZZI G. Weight functions for stress intensity factors and T-stress for oblique cracks in a half-space[J]. *International Journal of Fracture*, 2005, **132**(1): L9-L16.
- [7] LI J, WANG X, TAN C L. Weight functions for the determination of stress intensity factor and T-stress for edge-cracked plates with built-in ends[J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2004, **81**(3): 285-296.
- [8] WALTERS M C, PAULINO G H, DODDS JR R H. Interaction integral procedures for 3-D curved cracks including surface tractions[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2005, **72**(11): 1635-1663.
- [9] MUTHU N, MAITI S K, FALZON B G, et al. A comparison of stress intensity factors obtained through crack closure integral and other approaches using extended element-free Galerkin method[J]. *Computational Mechanics*, 2013, **52**(3): 587-605.
- [10] 贾金生, 汪洋, 冯炜, 等. 重力坝高压水劈裂模拟方法与特高重力坝设计准则初步探讨[J]. 水利学报, 2013, **44**(2): 127-133. (JIA Jinsheng, WANG Yang, FENG Wei, et al. Simulation method of hydraulic fracturing and discussions on design criteria for super high gravity dams[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2013, **44**(2): 127-133.(in Chinese))
- [11] 唐世斌, 刘向君, 罗江, 等. 水压诱发裂缝拉伸与剪切破裂的理论模型研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2017, **36**(9): 2124-2135. (TANG Shibin, LIU Xiangjun, LUO Jiang, et al. Theoretical model for tensile and shear crack initiation at the crack tip in rock subjected to hydraulic pressure[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2017, **36**(9): 2124-2135.(in Chinese))
- [12] 杨绿峰, 徐华, 李冉, 等. 广义参数有限元法计算应力强度因子[J]. 工程力学, 2009, **26**(3): 48-54. (YANG Lufeng, XU Hua, LI Ran, et al. The finite element with generalized coefficients for stress intensity factor[J]. *Engineering Mechanics*, 2009, **26**(3): 48-54.(in Chinese))
- [13] 徐华, 邓鹏, 蓝淞耀, 等. 曲线裂纹裂尖SIFs等效分析的广义参数Williams单元确定方法[J]. 工程力学, 2020, **37**(6): 34-41. (XU Hua, DENG Peng, LAN Songyao, et al. The determination method of Williams element with generalized degrees of freedom for equivalent analysis of SIFs at the curved crack tip[J]. *Engineering Mechanics*, 2020, **37**(6): 34-41.(in Chinese))
- [14] 中国航空研究院. 应力强度因子手册[M]. 增订版. 北京: 科学出版社, 1993. (Chinese Aeronautical Establishment. *Handbook of Stress Intensity Factors*[M]. Revised ed. Beijing: Science Press, 1993. (in Chinese))