

一类随机对流扩散方程的反源问题

赵丽志, 冯晓莉

The Inverse Source Problem for a Class of Stochastic Convection-Diffusion Equations

ZHAO Lizhi and FENG Xiaoli

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420399>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

变系数分数阶对流扩散方程的一种算子矩阵方法

An Operational Matrix Method for Fractional Advection-Diffusion Equations With Variable Coefficients

应用数学和力学. 2018, 39(1): 104-112 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380041>

一类非线性三阶微分方程边值问题解的存在唯一性

Existence and Uniqueness of Solutions to Boundary Value Problems of a Class of Nonlinear 3rd-Order Differential Equations

应用数学和力学. 2020, 41(2): 216-222 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400158>

一类两参数非线性反应扩散方程奇摄动问题的广义解

Generalized Solution to a Class of Singularly Perturbed Problem of Nonlinear Reaction Diffusion Equation With Two Parameters

应用数学和力学. 2017, 38(5): 561-569 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370177>

G-Brown运动驱动的非线性随机时滞微分方程的稳定化

Stabilization of Nonlinear Stochastic Delay Differential Equations Driven by G-Brownian Motion

应用数学和力学. 2021, 42(8): 841-851 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410332>

混凝土重力坝多参数弹性位移反演分析不唯一性理论探讨

Theoretical Study on Multi-Parameter Inversion Non-Uniqueness Based on Elastic Displacements of Concrete Gravity Dams

应用数学和力学. 2020, 41(2): 171-181 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400164>

一类含源Boussinesq系统解的数值分析及仿真

Numerical Analysis and Simulation of Solutions to a Class of Boussinesq Systems With Source Terms

应用数学和力学. 2018, 39(8): 961-978 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380126>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

一类随机对流扩散方程的反源问题*

赵丽志, 冯晓莉

(西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710126)

摘要: 考虑了一类由分数阶 Brown 运动驱动的随机对流扩散方程的源项反演问题. 正问题部分首先利用分离变量法, 得出了方程的温和解, 进一步在期望的意义下, 讨论了正问题的适定性. 反问题部分研究了由终止时刻的随机数据来反演随机源项的部分统计量, 并证明了相应的唯一性和不稳定性. 最后进行了一些数值模拟, 验证了相应的理论结果.

关键词: 随机对流扩散方程; 反源问题; 分数阶 Brown 运动; 唯一性; 不适定性

中图分类号: O175.26 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.420399

The Inverse Source Problem for a Class of Stochastic Convection-Diffusion Equations

ZHAO Lizhi, FENG Xiaoli

(School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710126, P.R.China)

Abstract: The inverse source problem for a class of stochastic convection-diffusion equations driven by the fractional Brownian motion with the Hurst index, was considered. The direct problem is to study the solution to the stochastic convection-diffusion equation. The inverse problem is to determine the statistical properties of the source from the expectation and covariance of the final-time data. The direct problem is well-posed. The uniqueness and instability of the inverse source problem was proved. Some numerical simulation examples verify the theoretical analysis.

Key words: stochastic convection-diffusion equation; inverse source problem; fractional Brownian motion; uniqueness; ill-posedness

引 言

随着科学技术的快速发展, 反问题在环境科学、能源开发、流体力学、医学、金融等领域有了越来越广泛的应用. 所谓反问题就是指用解的一些已知数据去重构问题中的未知数据^[1-3]. 由于随机偏微分方程在脑磁成像^[4]、光声成像^[5]、超声成像^[6]、天线设计与合成^[7-8]等方面有着重要的应用, 所以受到了广大学者的关注. 特别地, 随机反源问题作为随机反问题中的一类, 目前已有很多学者做了相关研究, 比如文献 [9] 通过 Carleman 估计证明了随机源项的唯一性; 文献 [10] 研究了一维随机热方程模拟的无限杆中的反源问题, 并通过求解 Fredholm 积分方程重构了随机源项的均值和方差.

* 收稿日期: 2021-12-17; 修订日期: 2022-02-12

基金项目: 国家自然科学基金 (61877046); 中央高校基本科研业务费 (JB210706; QTZX22052)

作者简介: 赵丽志 (1996—), 女, 硕士 (E-mail: lzzhao@stu.xidian.edu.cn);

冯晓莉 (1981—), 女, 博士 (通讯作者. E-mail: xiaolifeng@xidian.edu.cn).

引用格式: 赵丽志, 冯晓莉. 一类随机对流扩散方程的反源问题[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(12): 1392-1401.

近年来, 带有 Hurst 参数 ($H \in (0, 1)$) 的分数阶 Brown 运动在科学和工程领域中有着广泛的应用, 目前关于带有不同类型随机源项的时间分数阶扩散方程的反源问题已有一些成果. 对于 $H = 1/2$ 的情形, 文献 [11] 讨论了带有离散随机噪声的时间分数阶扩散方程的反源问题; 文献 [12] 运用终止时刻的数据 $u(x, T, \omega)$ 的统计信息确定了时间分数阶扩散方程的源项 $f(x)h(t) + g(x)\dot{\omega}(t)$ 中的 $f(x)$ 和 $|g(x)|$, 更多相关研究可参考文献 [13-17]. 对于 $H \in (0, 1)$ 的情形, 文献 [18] 研究了带有 $f(x)h(t) + g(x)\dot{B}^H(t)$ 随机源项的时间分数阶扩散方程, 并根据终止时刻的数据 $u(x, T, \omega)$ 重构了 $f(x)$ 和 $|g(x)|$; 类似地, 文献 [19] 考虑了另一个时间分数阶扩散方程; 文献 [20] 为分数阶 Gauss 噪声驱动下的随机非线性分数阶扩散方程的数值分析提供了一个统一的框架. 目前, 由于对带有分数阶 Brown 运动的随机偏微分方程的讨论还处于研究初期, 并且关于对流扩散方程还没有相关的研究, 因此, 本文将讨论如下由分数阶 Brown 运动驱动的随机对流扩散方程:

$$\begin{cases} u_t(x, t) + u_x(x, t) - u_{xx}(x, t) = F(x, t), & (x, t) \in D \times (0, T), \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial D \times [0, T], \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \bar{D}, \end{cases} \quad (1)$$

这里 $D = (0, 1)$, 带有齐次边界条件的算子 $\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 有一个正交特征系 $\{\lambda_n, e_n\}_{n=1}^\infty$, 其中特征值 $\lambda_n = \frac{1}{4} + n^2\pi^2$, 且有 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$, 特征向量 $e_n(x) = \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}} \sin(n\pi x)$, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\lambda_n \rightarrow \infty$, $e_n(x)$ 为 $\tilde{L}^2(D)$ 上的加权为 e^{-x} 的完备标准正交基, 即 $\tilde{L}^2(D) = \left\{ f(x) \mid \int_D e^{-x} f^2(x) dx < \infty \right\}$, $\int_D e^{-x} e_n^2(x) dx = 1$. 对于任意的 $v \in \tilde{L}^2(D)$, 它可表示为 $v(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} v_n e_n(x)$, $v_n = (v, e_n)_{\tilde{L}^2(D)} \triangleq \int_D e^{-x} v(x) e_n(x) dx$. 源项 $F(x, t) = f(x)h(t) + \sigma(x)\dot{B}^H(t)$, 其中函数 $f(x)$, $\sigma(x)$ 在 D 上具有紧支撑, $h(t)$ 为已知函数, $B^H(t)$ 为具有 Hurst 参数 ($H \in (0, 1)$) 的分数阶 Brown 运动, $\dot{B}^H(t)$ 是 $B^H(t)$ 关于 t 的形式导数, 当 $H = 1/2$ 时, $B^H(t)$ 是标准 Brown 运动, 此时 $\dot{B}^H(t)$ 为白噪声. 由于源项 $F(x, t)$ 是一个正则性较低的随机源, 因此它是一个分布而不是一个函数.

1 预备知识

定义 1 一个 Gauss 过程 $B^H = \{B^H(t), t \geq 0\}$ 称为带有 Hurst 参数 ($H \in (0, 1)$) 的分数阶 Brown 运动, 如果该过程满足:

- 1) 期望为零;
- 2) 协方差函数 $R(t, s) = E[B^H(t)B^H(s)] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$.

特别地, 如果 $H = 1/2$, B^H 为标准 Brown 运动, 一般记作 W , 此时协方差函数 $R(t, s) = t \wedge s$.

分数阶 Brown 运动 $B^H (H \in (0, 1))$ 具有下面的 Wiener 积分表达式:

$$B^H(t) = \int_0^t K_H(t, s) dW(s), \quad (2)$$

其中 K_H 为平方可积核, W 为标准 Brown 运动.

对任意的积分区间 $[0, T]$, 用 \mathcal{E} 表示 $[0, T]$ 上的阶梯函数空间, \mathcal{H} 表示 \mathcal{E} 按照内积 $\langle 1_{[0,t]}, 1_{[0,s]} \rangle_{\mathcal{H}} = R(t, s)$ 定义的闭包, 其中 $1_{[0,t]}, 1_{[0,s]}$ 为示性函数. 对于任意的 $\psi(t), \phi(t) \in \mathcal{H}$, 满足以下的公式:

- 1) 当 $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时,

$$E \left[\int_0^t \psi(z) dB^H(z) \int_0^t \phi(z) dB^H(z) \right] = \int_0^t \left[K_H(t, z) \psi(z) + \int_z^t (\psi(u) - \psi(z)) \frac{\partial K_H(u, z)}{\partial u} du \right] \left[K_H(t, z) \phi(z) + \int_z^t (\phi(u) - \phi(z)) \frac{\partial K_H(u, z)}{\partial u} du \right] dz, \quad (3)$$

其中, 核函数

$$\begin{cases} K_H(t, z) = C_H \left[\left(\frac{t}{z}\right)^{H-\frac{1}{2}} (t-z)^{H-\frac{1}{2}} - \left(H - \frac{1}{2}\right) z^{\frac{1}{2}-H} \int_z^t u^{H-\frac{3}{2}} (u-z)^{H-\frac{1}{2}} du \right], \\ C_H = \left(\frac{2H}{(1-2H)\beta\left(1-2H, H + \frac{1}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt. \end{cases} \quad (4)$$

由于当 $t \rightarrow z^+$ 时, $K_H(t, z) \rightarrow 0^+$, 因此 $K_H(t, z) > 0$.

2) 当 $H = \frac{1}{2}$ 时,

$$E \left[\int_0^t \psi(z) dB^H(z) \int_0^t \phi(z) dB^H(z) \right] = E \left[\int_0^t \psi(z) dW(z) \int_0^t \phi(z) dW(z) \right] = \int_0^t \psi(z)\phi(z) dz. \tag{5}$$

3) 当 $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时,

$$E \left[\int_0^t \psi(z) dB^H(z) \int_0^t \phi(z) dB^H(z) \right] = \alpha_H \int_0^t \int_0^t \psi(r)\phi(u) |r - u|^{2H-2} dudr, \tag{6}$$

其中 $\alpha_H = H(2H - 1)$.

引理 1 运用分离变量法, 问题(1)的温和解可以表示为 $u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (u(\cdot, t), e_n)_{L^2(D)} e_n(x)$, 这里

$$(u(\cdot, t), e_n)_{L^2(D)} = u_n(t) = \left(\int_0^t f_n h(z) \psi_n(z) dz + \int_0^t \sigma_n \psi_n(z) dB^H(z) + g_n \right) \psi_n(-t), \tag{7}$$

其中

$$\psi_n(z) \stackrel{\Delta}{=} e^{(1/4+n^2\pi^2)z}, g_n = (g, e_n)_{L^2(D)}, f_n = (f, e_n)_{L^2(D)}, \sigma_n = (\sigma, e_n)_{L^2(D)}.$$

引理 2 对任意的 $0 < z_1 < z_2 < t, l \geq 0$, 当 $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, 有

$$\int_0^t \int_0^t (t - z_1)^l (t - z_2)^l |z_1 - z_2|^{2H-2} dz_1 dz_2 \lesssim t^{2H+2l}. \tag{8}$$

证明

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^t (t - z_1)^l (t - z_2)^l |z_1 - z_2|^{2H-2} dz_1 dz_2 = \\ & 2 \int_0^t \int_{z_2}^t (t - z_1)^l (t - z_2)^l (z_1 - z_2)^{2H-2} dz_1 dz_2 = \\ & 2 \int_0^t \int_0^{z_2} z_1^l z_2^l (z_2 - z_1)^{2H-2} dz_1 dz_2, \end{aligned}$$

由二项式展开定理可得

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^t \int_0^{z_2} z_1^l z_2^l (z_2 - z_1)^{2H-2} dz_1 dz_2 = \\ & 2 \int_0^t \int_0^{z_2} z_1^l z_2^l \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p C_{2H-2}^p z_1^{l+p} z_2^{2H-2-p} dz_1 dz_2 = \\ & 2 \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{z_2} (-1)^p C_{2H-2}^p z_1^{l+p} z_2^{2H-2-p+l} dz_1 dz_2 = \\ & 2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p C_{2H-2}^p \frac{1}{l+1+p} \int_0^t z_2^{2H-1+2l} dz_2 = \\ & 2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p C_{2H-2}^p \frac{1}{(l+1+p)(2H+2l)} t^{2H+2l} \lesssim t^{2H+2l}. \end{aligned}$$

注 1 这里 “ \lesssim ” 表示: 如果存在一个常数 $C > 0$, 使得 $a \leq Cb (a \geq Cb)$, 那么我们记为 $a \lesssim b (a \gtrsim b)$.

2 正问题

本节将在以下假设成立的条件下讨论问题 (1) 的适定性.

假设 1 设 $H \in (0, 1)$ 并且 $f, \sigma, g \in \tilde{L}^2(D)$. 假设 $h \in L^\infty(0, T)$ 是一个非负函数并且有一个正的下界, 即 $h \geq C_h > 0$.

由式(7)得

$$u_n(t) = \psi_n(-t) \int_0^t h(z) f_n \psi_n(z) dz + \psi_n(-t) \int_0^t \sigma_n \psi_n(z) dB^H(z) + \psi_n(-t) g_n = I_{n,1}(t) + I_{n,2}(t) + I_{n,3}(t), \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(D)}^2 &= \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} u_n(t) e_n(\cdot) \right\|_{L^2(D)}^2 = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (I_{n,1}(t) + I_{n,2}(t) + I_{n,3}(t))^2 \lesssim \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} I_{n,1}^2(t) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} I_{n,2}^2(t) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} I_{n,3}^2(t). \end{aligned} \tag{10}$$

因此

$$\begin{aligned} E \left[\|u\|_{L^2(D \times [0, T])}^2 \right] &= E \left[\int_0^T \|u(\cdot, t)\|_{L^2(D)}^2 dt \right] \lesssim \\ &= E \left[\int_0^T \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} I_{n,1}^2(t) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} I_{n,2}^2(t) + \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} I_{n,3}^2(t) \right) dt \right] = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \|I_{n,1}\|_{L^2(0, T)}^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} E \left[\int_0^T I_{n,2}^2 dt \right] + \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \|I_{n,3}\|_{L^2(0, T)}^2 = \\ &= S_1(T) + S_2(T) + S_3(T). \end{aligned} \tag{11}$$

接下来分别讨论 $S_1(T), S_2(T)$ 和 $S_3(T)$:

1) 对于 $S_1(T)$,

$$S_1(T) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} f_n^2 \|h\|_{L^\infty(0, T)}^2 \int_0^T \psi_n(-2t) \psi_n(2t) t^2 dt \lesssim \|f\|_{L^2(D)}^2 \|h\|_{L^\infty(0, T)}^2 T^3. \tag{12}$$

2) 对于 $S_2(T)$,

$$\begin{aligned} S_2(T) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} E \left[\int_0^T I_{n,2}^2(t) dt \right] = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \int_0^T E \left[\left(\psi_n(-t) \int_0^t \sigma_n \psi_n(z) dB^H(z) \right)^2 \right] dt = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \sigma_n^2 \int_0^T \psi_n(-2t) E \left[\left(\int_0^t \psi_n(z) dB^H(z) \right)^2 \right] dt. \end{aligned} \tag{13}$$

由于当 $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 和 $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $E \left[\left(\int_0^t \psi_n(z) dB^H(z) \right)^2 \right]$ 不再满足 Itô 等距公式, 所以需分情况讨论.

当 $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, 由式 (3), 有

$$E \left[\left(\int_0^t \psi_n(z) dB^H(z) \right)^2 \right] = \int_0^t \left[K_H(t, z) \psi_n(z) + \int_z^t (\psi_n(u) - \psi_n(z)) \frac{\partial K_H(u, z)}{\partial u} du \right]^2 dz,$$

其中

$$\begin{aligned} K_H(t, z) \psi_n(z) + \int_z^t (\psi_n(u) - \psi_n(z)) \frac{\partial K_H(u, z)}{\partial u} du &= \\ K_H(t, z) \psi_n(z) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{z+\epsilon}^t (\psi_n(u) - \psi_n(z)) \frac{\partial K_H(u, z)}{\partial u} du \right] &= \\ K_H(t, z) \psi_n(z) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\psi_n(u) K_H(u, z) \Big|_{z+\epsilon}^t - \int_{z+\epsilon}^t \frac{\partial \psi_n(u)}{\partial u} K_H(u, z) du - \psi_n(z) K_H(u, z) \Big|_{z+\epsilon}^t \right] &\leq \\ K_H(t, z) \psi_n(z) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\psi_n(u) K_H(u, z) \Big|_{z+\epsilon}^t \right] &\leq \\ K_H(t, z) \psi_n(z) + K_H(t, z) \psi_n(t) &\lesssim \\ K_H(t, z) \psi_n(t). \end{aligned} \tag{14}$$

所以

$$E \left[\left(\int_0^t \psi_n(z) dB^H(z) \right)^2 \right] \leq \int_0^t (K_H(t, z) \psi_n(t))^2 dz. \tag{15}$$

为了后续计算方便,我们先对其中一些表达式进行估计.

首先,由文献 [18] 知, $\int_z^t u^{H-3/2}(u-z)^{H-1/2} du \leq z^{2H-1}$.

进一步由式 (4) 可以得出

$$K_H^2(t, z) \leq C_H^2 [(t-z)^{H-1/2} + z^{H-1/2}]^2. \tag{16}$$

结合式 (15) 和 (16) 可得

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_0^t \psi_n(z) dB^H(z) \right)^2 \right] &\leq \\ &\psi_n(2t) C_H^2 \int_0^t [(t-z)^{H-1/2} + z^{H-1/2}]^2 dz \leq \\ &\psi_n(2t) \int_0^t [(t-z)^{2H-1} + z^{2H-1}] dz \leq \\ &\psi_n(2t) t^{2H}. \end{aligned} \tag{17}$$

当 $H = \frac{1}{2}$ 时,由式 (5) 可得

$$E \left[\left(\int_0^t \psi_n(z) dB^H(z) \right)^2 \right] = \int_0^t \psi_n(2z) dz \leq \psi_n(2t)t. \tag{18}$$

当 $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时,由式 (6) 可得

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_0^t \psi_n(z) dB^H(z) \right)^2 \right] &= \\ &\alpha_H \int_0^t \int_0^t \psi_n(z) \psi_n(u) |z-u|^{2H-2} dz du \leq \\ &\alpha_H \psi_n(2t) \int_0^t \int_0^t |z-u|^{2H-2} dz du \leq \\ &\psi_n(2t) t^{2H}. \end{aligned} \tag{19}$$

综上,结合式 (17)~(19) 整理得

$$S_2(T) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \int_0^T \sigma_n^2 \psi_n(-2t) \psi_n(2t) t^{2H} dt \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \sigma_n^2 T^{2H+1} = T^{2H+1} \|\sigma\|_{L^2(D)}^2, \quad H \in (0, 1). \tag{20}$$

3) 对于 $S_3(T)$,

$$\int_0^T I_{n,3}^2(t) dt = \int_0^T (g_n \psi_n(-t))^2 dt \leq g_n^2 \psi_n^2(0) T = g_n^2 T. \tag{21}$$

那么

$$S_3(T) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} g_n^2 T = T \|g\|_{L^2(D)}^2. \tag{22}$$

综上所述,可得如下适定性结果.

定理 1 如果假设 1 成立,那么问题 (1) 的温和解满足

$$E[\|u\|_{L^2(D \times [0, T])}^2] \leq \|f\|_{L^2(D)}^2 \|h\|_{L^\infty(0, T)}^2 T^3 + \|\sigma\|_{L^2(D)}^2 T^{2H+1} + \|g\|_{L^2(D)}^2 T. \tag{23}$$

证明 根据式 (12)、(20) 和 (22) 易得结论.

3 源项反演问题

本节将通过终止时刻的数据 $u(x, T, \omega)$ 的一些统计量来重构源项中的 $f(x)$ 和 $\sigma^2(x)$, 并且分别讨论它们的唯一性与不稳定性, 其中

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} f_n e_n(x), \quad \sigma^2(x) = \sum_{m, n \in \mathbb{Z}_+} \sigma_m \sigma_n e_m(x) e_n(x). \tag{24}$$

3.1 $f(x)$ 和 $\sigma^2(x)$ 的唯一性

由式 (7) 可得

$$u_n(T) = (u(\cdot, T), e_n(\cdot))_{\tilde{L}^2(D)} = \left(g_n + \int_0^T h(z) f_n \psi_n(z) dz + \int_0^T \sigma_n \psi_n(z) dB^H(z) \right) \psi_n(-T).$$

那么由以上表达式我们可以得出 $u_n(T)$ 的期望和协方差表达式:

$$E(u_n(T)) = \psi_n(-T) f_n \int_0^T h(z) \psi_n(z) dz + g_n \psi_n(-T), \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(u_m(T), u_n(T)) = \\ \sigma_m \sigma_n \psi_m(-T) \psi_n(-T) E \left[\left(\int_0^T \psi_m(z) dB^H(z) \int_0^T \psi_n(z) dB^H(z) \right) \right]. \end{aligned} \tag{26}$$

进一步有

$$f_n = \frac{E(u_n(T)) - g_n \psi_n(-T)}{\psi_n(-T) \int_0^T h(z) \psi_n(z) dz}, \tag{27}$$

$$\sigma_m \sigma_n = \frac{\text{Cov}(u_m(T), u_n(T))}{\psi_m(-T) \psi_n(-T) E \left[\left(\int_0^T \psi_m(z) dB^H(z) \int_0^T \psi_n(z) dB^H(z) \right) \right]}. \tag{28}$$

定理 2 如果假设 1 成立, 那么 f, σ^2 可被 $\{E(u_n(T)), \text{Cov}(u_m(T), u_n(T))\}$ 唯一确定.

证明 1) 因为

$$\int_0^T h(z) \psi_n(z) dz \geq C_h \psi_n(0) T = C_h T = C_1 > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_+. \tag{29}$$

所以由式 (27) 知 $f(x)$ 可被唯一确定.

2) 记 $E_{mn} := E \left[\int_0^T \psi_m(z) dB^H(z) \int_0^T \psi_n(z) dB^H(z) \right]$, 只需说明 $E_{mn} \geq C_2 > 0, \forall m, n \in \mathbb{N}_+$, 则可证明 $\sigma^2(x)$ 的唯一性.

当 $H = \frac{1}{2}$ 时, 由式 (5) 可得

$$E_{mn} = \int_0^T \psi_m(z) \psi_n(z) dz \geq \psi_m(0) \psi_n(0) T = T = C_2 > 0. \tag{30}$$

当 $H \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ 时, 根据式 (6) 和引理 2 易得

$$\begin{aligned} E_{mn} &= \alpha_H \int_0^T \int_0^T \psi_m(z) \psi_n(u) |z - u|^{2H-2} dz du \geq \\ &\alpha_H \psi_m(0) \psi_n(0) \int_0^T \int_0^T |z - u|^{2H-2} dz du \geq \\ &\alpha_H T^{2H} = C_2 > 0. \end{aligned} \tag{31}$$

3.2 反演 $f(x)$ 和 $\sigma^2(x)$ 的不稳定性

3.2.1 反演 $f(x)$ 的不稳定性

由积分中值定理, 可知

$$\psi_n(-T) \int_0^T h(z) \psi_n(z) dz \leq \|h\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^T \psi_n(z-T) dz = \|h\|_{L^\infty(0,T)} T \psi_n(\xi), \quad -T < \xi < 0. \tag{32}$$

由于 $-T < \xi < 0$, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\psi_n(\xi) \rightarrow 0$. 因此当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n \rightarrow \infty$, 这说明反演 $f(x)$ 是不稳定的.

3.2.2 反演 $\sigma^2(x)$ 的不稳定性

1) 当 $H \in \left(0, \frac{1}{2} \right)$ 时, 由式 (3) 可得

$$\begin{aligned} E_{mn} &= \int_0^T \left[K_H(T, z) \psi_m(z) + \int_z^T (\psi_m(u) - \psi_m(z)) \frac{\partial K_H(u, z)}{\partial u} du \right] \times \\ &\left[K_H(T, z) \psi_n(z) + \int_z^T (\psi_n(u) - \psi_n(z)) \frac{\partial K_H(u, z)}{\partial u} du \right] dz, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
 &\psi_m(-T)\psi_n(-T)E\left[\int_0^T \psi_m(z)dB^H(z)\int_0^T \psi_n(z)dB^H(z)\right]= \\
 &\int_0^T K_H^2(T,z)\psi_m(z-T)\psi_n(z-T)dz+ \\
 &\int_0^T K_H(T,z)\psi_m(z-T)\left[\int_z^T (\psi_n(u-T)-\psi_n(z-T))\frac{\partial K_H(u,z)}{\partial u}du\right]dz+ \\
 &\int_0^T K_H(T,z)\psi_n(z-T)\left[\int_z^T (\psi_m(u-T)-\psi_m(z-T))\frac{\partial K_H(u,z)}{\partial u}du\right]dz+ \\
 &\int_0^T \left[\int_z^T (\psi_m(u-T)-\psi_m(z-T))\frac{\partial K_H(u,z)}{\partial u}du\int_z^T (\psi_n(u-T)-\psi_n(z-T))\frac{\partial K_H(u,z)}{\partial u}du\right]dz := \\
 &N_1(T)+N_2(T)+N_3(T)+N_4(T).
 \end{aligned} \tag{34}$$

对于 $N_1(T)$ 和 $N_2(T)$, 结合式 (4) 和积分中值定理可得

$$\begin{aligned}
 N_1(T) &= \psi_m(\xi_1)\psi_n(\xi_2)\int_0^T K_H^2(T,z)dz \lesssim \psi_m(\xi_1)\psi_n(\xi_2)C_H^2T^{2H} \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty, -T < \xi_1, \xi_2 < 0, \\
 N_2(T) &= \int_0^T K_H(T,z)\psi_m(z-T)\left[\int_z^T \psi'_n(\xi_2)(u-z)\frac{\partial K_H(u,z)}{\partial u}du\right]dz (z-T < \xi_2 < u-T < 0) = \\
 &\int_0^T K_H(T,z)\psi_m(z-T)\psi'_n(\xi_2^*)\left[\int_z^T (u-z)C_H\left(\frac{u}{z}\right)^{H-\frac{1}{2}}(u-z)^{H-\frac{3}{2}}du\right]dz (-T < \xi_2^* < 0) \leq \\
 &C_H\psi_m(T-T)\left(\frac{1}{4}+n^2\pi^2\right)\psi_n(\xi_2^*)\int_0^T K_H(T,z)\left[\int_z^T (u-z)^{H-\frac{1}{2}}du\right]dz \lesssim \\
 &C_H\left(\frac{1}{4}+n^2\pi^2\right)\psi_n(\xi_2^*)P(T) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

其中 $P(T) = \int_0^T K_H(T,z)\left(\int_z^T (u-z)^{H-\frac{1}{2}}du\right)dz$. 类似地, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $N_3(T) \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned}
 N_4(T) &= \int_0^T \left(\int_z^T \psi'_m(\xi_1)(u-z)C_H\left(\frac{u}{z}\right)^{H-\frac{1}{2}}(u-z)^{H-\frac{3}{2}}du\right) \times \\
 &\left(\int_z^T \psi'_n(\xi_2)(u-z)C_H\left(\frac{u}{z}\right)^{H-\frac{1}{2}}(u-z)^{H-\frac{3}{2}}du\right)dz (z-T < \xi_1, \xi_2 < u-T < 0) \leq \\
 &\psi'_m(\xi_1^*)\psi'_n(\xi_2^*)\int_0^T \left(\int_z^T (u-z)^{H-\frac{1}{2}}du\right)^2 dz (-T < \xi_1^*, \xi_2^* < 0) \lesssim \\
 &\left(\frac{1}{4}+m^2\pi^2\right)\left(\frac{1}{4}+n^2\pi^2\right)\psi_m(\xi_1^*)\psi_n(\xi_2^*)T^{2H+2} \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

2) 当 $H = \frac{1}{2}$ 时, 由式 (30) 可知

$$\begin{aligned}
 &\psi_m(-T)\psi_n(-T)E\left[\left(\int_0^T \psi_m(z)dB^H(z)\int_0^T \psi_n(z)dB^H(z)\right)\right]= \\
 &\int_0^T \psi_m(z-T)\psi_n(z-T)dz = \\
 &\int_0^T e^{(1/2+m^2\pi^2+n^2\pi^2)(z-T)}dz = \\
 &Te^\xi \rightarrow 0, \quad -T\left(\frac{1}{2}+(m^2+n^2)\pi^2\right) < \xi < 0.
 \end{aligned} \tag{35}$$

3) 当 $H \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, 由式 (31) 得

$$\begin{aligned}
 \psi_m(-T)\psi_n(-T)E\left[\int_0^T \psi_m(z)dB^H(z)\int_0^T \psi_n(z)dB^H(z)\right] = \\
 \alpha_H \int_0^T \int_0^T \psi_m(z-T)\psi_n(u-T)|z-u|^{2H-2} du dz \leq \\
 \alpha_H \psi_m(\xi_1)\psi_n(\xi_2) \int_0^T \int_0^T |z-u|^{2H-2} du dz (-T < \xi_1, \xi_2 < 0) \leq \\
 \alpha_H T^{2H} \psi_m(\xi_1)\psi_n(\xi_2) \rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

综上, 可知反演 $\sigma^2(x)$ 是不稳定的.

4 数值实验

本节将通过数值例子来说明理论部分的合理性. 设 N_x, N_t 分别为空间方向和时间方向离散点的个数, $x_i = (i-1)h_x, i = 1, 2, \dots, N_x, t_j = (j-1)h_t, j = 1, 2, \dots, N_t$, 其中 h_x, h_t 分别是空间方向和时间方向的步长. 我们运用以下有限差分格式求解正问题:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{h_t} + \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h_x} - \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h_x^2} = F(x_i, t_j),
 \tag{37}$$

这里 $F(x_i, t_j) = f(x_i)h(t_j) + \sigma(x_i) \frac{B^H(t_{j+1}) - B^H(t_j)}{h_t}$, 初边值条件离散为 $u_1^j = 0, u_{N_x}^j = 0, u_i^1 = g(x_i)$. 在本文中, 取 $N_x = 101, N_t = 2^{15} + 1, T = 1$ 和样本轨道数 $P = 1000$, 函数 $f(x) = \sin(x)\cos(\pi x/2), \sigma(x) = x(1-x), g(x) = \sin(\pi x), h(t) = 1$. 通过求解正问题我们得出了终止时刻的数据 u_T , 随后在求解反问题时, 给终止时刻的数据加一个随机误差, 便获得了一个扰动数据, 即 $u_{T_\delta} = u_T + \delta \text{rand}(\text{size}(u_T))$, 这里函数rand产生由在(0, 1)之间均匀分布的随机数组成的数组. 由于反源问题是不适定的, 我们截断前 N 项对其进行正则化. 图 1 举例描绘了 $H = 0.9, \delta = 0.04$ 时 f 和 σ^2 的相对误差随 N 的变化图. 从图中可以看出, 两个函数的相对误差随着 N 的增大先递减, 然后趋于平缓, 最后递增. 因此, 我们选取 $N = 6$, 分别绘制了 $H=0.4, 0.5$ 和 0.9 , 误差水平 $\delta=0.01$ 时, 源项 f 和 σ^2 的精确解与近似解的对比图 (图 2~4), 从图中可以看出 H 越大, 反演效果越好.

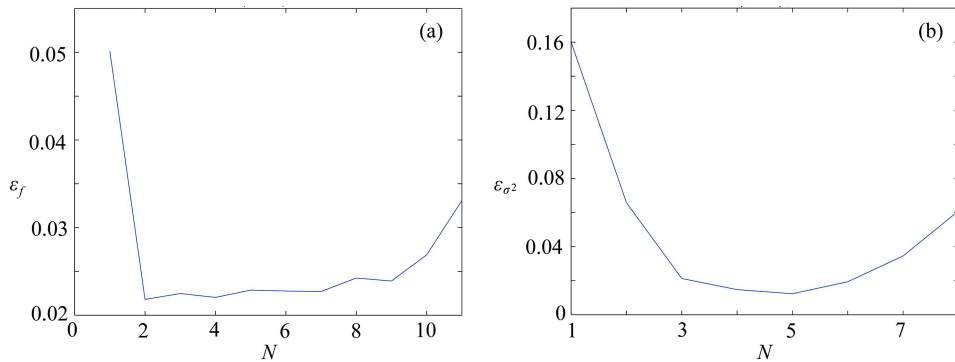


图 1 $H = 0.9, \delta = 0.04$ 时 f 和 σ^2 的相对误差
 Fig. 1 The relative errors of the reconstruction for f and σ^2 with respect to $H = 0.9$ and $\delta = 0.04$

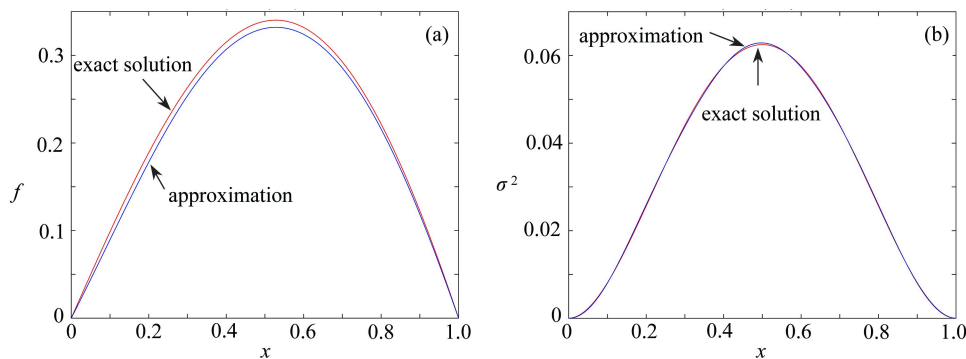
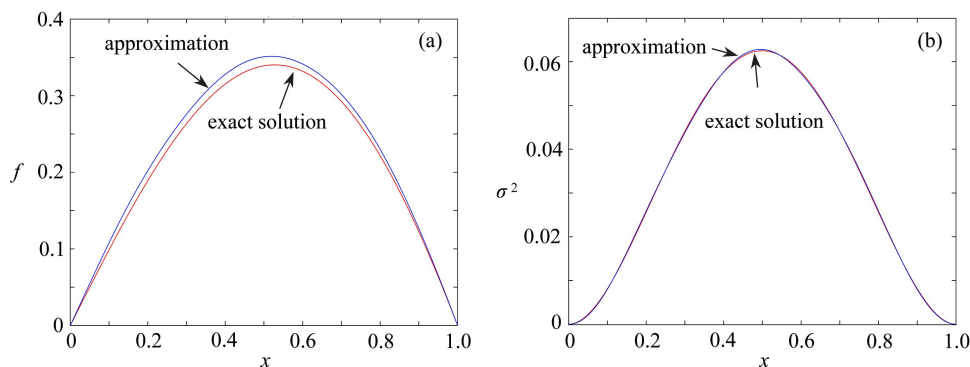
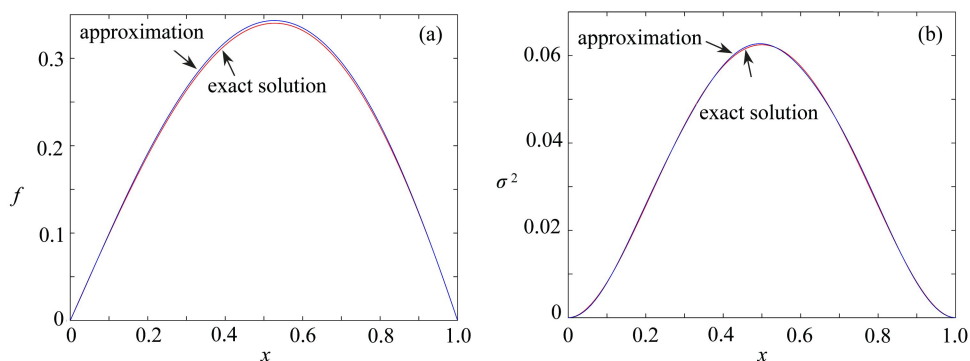


图 2 $H = 0.4, N = 6$ 时的 f 和 σ^2
 Fig. 2 The reconstruction of f and σ^2 for the inverse problem with $H = 0.4$ and $N = 6$

图3 $H = 0.5, N = 6$ 时的 f 和 σ^2 Fig. 3 The reconstruction of f and σ^2 for the inverse problem with $H = 0.5$ and $N = 6$ 图4 $H = 0.9, N = 6$ 时的 f 和 σ^2 Fig. 4 The reconstruction of f and σ^2 for the inverse problem with $H = 0.9$ and $N = 6$

5 结 论

在本文中,我们讨论了带有分数阶 Brown 运动随机源项的一维随机对流扩散方程.在正问题部分通过对温和解的期望的讨论,证明了其适定性.在反随机源部分,给定 T 时刻的数据来反演源项,证明了反演的唯一性与不稳定性.最后通过有限差分法和截断正则化方法进行数值模拟证明了理论部分的合理性,并且得出了 Hurst 参数 H 越大,反演效果越好的结论.虽然本文只讨论了一维随机对流扩散方程,但是关于高维的情形也可以类似讨论.

参考文献(References):

- [1] 李晓晓, 郭亨贞, 万诗敏, 等. 一类对流-扩散方程热源识别反问题[J]. 兰州理工大学学报, 2012, **38**(3): 147-149. (LI Xiaoxiao, GUO Hengzhen, WAN Shimin, et al. A class of inverse problem of identification of heat source term in convection-diffusion equation[J]. *Journal of Lanzhou University of Technology*, 2012, **38**(3): 147-149. (in Chinese))
- [2] 贾现正, 张大利, 李功胜, 等. 空间-时间分数阶变系数对流扩散方程微分阶数的数值反演[J]. 计算数学, 2014, **36**(2): 113-132. (JIA Xianzheng, ZHANG Dali, LI Gongsheng, et al. Numerical inversion of the fractional orders in the space-time fractional advection-diffusion equation with variable coefficients[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2014, **36**(2): 113-132. (in Chinese))
- [3] FURATI K M, IYIOLA O S, KIRANE M. An inverse problem for a generalized fractional diffusion[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, **249**: 24-31.
- [4] AMMARI H, BAO G, FLEMING J L. An inverse source problem for Maxwell's equations in magnetoencephalography[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2002, **62**(4): 1369-1382.
- [5] ANASTASIO M A, ZHANG J, MODGIL D, et al. Application of inverse source concepts to photoacoustic tomography[J]. *Inverse Problems*, 2007, **23**(6): S21-S35.

- [6] DEVANEY A J. Inverse source and scattering problems in ultrasonics[J]. *IEEE Transaction on Sonics and Ultrasonics*, 1983, **30**(6): 355-363.
- [7] MARENGO E A, DEVANEY A J. The inverse source problem of electromagnetics: linear inversion formulation and minimum energy solution[J]. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, 1999, **47**(2): 410-412.
- [8] MARENGO E A, KHODJA M R, BOUCHERIF A. Inverse source problem in nonhomogeneous background media, II: vector formulation and antenna substrate performance characterization[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2008, **69**(1): 81-110.
- [9] LÜ Q. Carleman estimate for stochastic parabolic equations and inverse stochastic parabolic problems[J]. *Inverse Problems*, 2012, **28**(4): 045008.
- [10] CHEN S L, WANG Z W, CHEN G L. Cauchy problem of non-homogenous stochastic heat equation and application to inverse random source problem[J]. *Inverse Problems and Imaging*, 2021, **15**(4): 619-639.
- [11] TUAN N H, NANE E. Inverse source problem for time-fractional diffusion with discrete random noise[J]. *Statistics and Probability Letters*, 2017, **120**: 126-134.
- [12] NIU P P, HELIN T, ZHANG Z D. An inverse random source problem in a stochastic fractional diffusion equation[J]. *Inverse Problems*, 2020, **36**(4): 045002.
- [13] LIU C. Reconstruction of the time-dependent source term in stochastic fractional diffusion equation[J]. *Inverse Problems and Imaging*, 2020, **14**(6): 1001-1024.
- [14] FU S B, ZHANG Z D. Application of the generalized multiscale finite element method in an inverse random source problem[J]. *Journal of Computational Physics*, 2021, **429**: 110032.
- [15] GONG Y X, LI P J, WANG X, et al. Numerical solution of an inverse random source problem for the time fractional diffusion equation via PhaseLift[J]. *Inverse Problems*, 2021, **37**: 045001.
- [16] LI P J, WANG X. An inverse random source problem for Maxwell's equations[J]. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, 2021, **19**(1): 25-45.
- [17] LI P J, WANG X. An inverse random source problem for the one-dimensional Helmholtz equation with attenuation[J]. *Inverse Problems*, 2021, **37**(1): 015009.
- [18] FENG X L, LI P J, WANG X. An inverse random source problem for the time fractional diffusion equation driven by a fractional Brownian motion[J]. *Inverse Problems*, 2020, **36**(4): 045008.
- [19] NIE D X, DENG W H. An inverse random source problem for the time-space fractional diffusion equation driven by fractional Brownian motion[EB/OL]. (2021-06-02)[2022-02-12]. <https://arxiv.org/abs/2106.00917>.
- [20] NIE D X, DENG W H. A unified convergence analysis for the fractional diffusion equation driven by fractional Gaussian noise with Hurst index $H \in (0, 1)$ [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2022, **60**(3): 1548-1573.