

# 基于奇异摄动的柔性关节机械臂约束跟随控制研究\*

欧劲松, 李蓉, 尹辉, 王华建

(湖南大学 机械与运载工程学院, 长沙 410082)

**摘要:** 针对二连杆柔性关节机械臂, 提出了一种基于奇异摄动理论和 Udwadia-Kalaba (U-K) 方法的控制方法. 设计步骤主要分为两步: 第一, 基于奇异摄动法对系统进行降阶, 把系统拆分为快、慢系统, 不仅降低了求解系统的阶次, 而且克服了系统柔性; 第二, 基于 U-K 方法设计了快、慢系统的状态反馈约束跟随控制律, 能使快、慢系统约束跟随误差收敛到零, 即使系统初始不满足约束条件, 该方法不需要借助 Lagrange 乘子和伪广义速度等辅助变量, 可以同时处理完整约束和非完整约束. 将以上方法运用在二连杆柔性关节机械臂系统中, 解决了二连杆柔性关节机械臂的柔性振荡和约束跟随的问题. 使用 MATLAB 进行仿真, 并且与传统 PID 控制进行了对比, 验证了所提出的方法的有效性与优越性.

**关键词:** 柔性机械臂; 奇异摄动理论; 约束跟随控制; 轨迹跟踪

**中图分类号:** TH113      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.430024

## Research on Constraint Following Control of Flexible Joint Manipulators Based on Singular Perturbation

OU Jingsong, LI Rong, YIN Hui, WANG Huajian

(College of Mechanical and Vehicle Engineering, Hunan University,  
Changsha 410082, P.R.China)

**Abstract:** For the control of 2-link flexible joint manipulators, a control method based on the singular perturbation theory and the Udwadia-Kalaba (U-K) method was proposed. The control design was implemented by 2 steps. First, the system order was reduced based on the singular perturbation method and the system was divided into fast and slow sub-systems, to simplify the solution process and overcome the system flexibility. Second, the state feedback constraint following control law for the fast and slow sub-systems was designed with the U-K method, to make the constraint following errors of the fast and slow sub-systems converge to zero, even if the system can't initially satisfy the constraints. The proposed method can deal with holonomic and nonholonomic servo constraints at the same time without the auxiliary variables of the Lagrange multiplier and the pseudo generalized velocity. The method was applied to 2-link flexible joint manipulator systems to solve the flexible oscillation and constraint following problems. Through simulations on MATLAB, and was compared with the

\* 收稿日期: 2022-01-31; 修订日期: 2023-04-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(52105096)

作者简介: 欧劲松(1998—), 男, 硕士(E-mail: 1658852414@qq.com);

李蓉(1976—), 女, 副教授(通讯作者. E-mail: jyylirong@hnu.edu.cn);

尹辉(1990—), 男, 助理教授, 湖南大学“岳麓学者”(E-mail: yinhui233@126.com);

王华建(1997—), 男, 硕士生(E-mail: 747114225@qq.com).

**引用格式:** 欧劲松, 李蓉, 尹辉, 王华建. 基于奇异摄动的柔性关节机械臂约束跟随控制研究[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(5): 513-524.

traditional PID control, to verify the effectiveness and superiority.

**Key words:** flexible manipulator; singular perturbation theory; constraint following control; trajectory tracking

## 0 引言

随着科技的不断发展,机械臂被广泛应用于医疗、工业、民生、服务等领域。机械臂主要包含刚性机械臂、柔性关节机械臂和柔性臂杆机械臂<sup>[1-3]</sup>。相比于刚性机械臂,柔性机械臂具有能耗低、质量轻、传动平缓、灵活方便等优点<sup>[4-5]</sup>。然而,柔性机械臂采用的谐波减速器与皮带等柔性关节,使柔性关节机械臂的动力学分析比刚性机械臂复杂得多,这对运动控制的稳定性和准确性有极大的影响。柔性关节的引进使得系统的控制输入小于系统的自由度,因此柔性关节机械臂系统是一个非线性、欠驱动、强耦合的系统,容易产生跟踪误差,导致较长的收敛时间、较大的超调量,甚至机械损坏<sup>[6]</sup>。

奇异摄动法首次应用于线性时不变系统的经典稳定性分析是由 Klimushev 于 20 世纪 60 年代通过“快慢分解”思想得到的,即如果慢、快子系统是稳定的,则摄动参数必存在一个稳定上界,在此范围之内,奇异摄动系统是稳定的。非线性奇异摄动系统的稳定性分析则是基于 Lyapunov 函数的方法。针对快、慢系统分别建立 Lyapunov 函数,将两系统 Lyapunov 函数相加作为原系统的 Lyapunov 函数,以保证原系统的渐进收敛<sup>[7]</sup>。1987 年, Spong<sup>[8]</sup>提出了机器人柔性关节的简化模型,并基于奇异摄动理论和积分流,将柔性关节机器人分解成快、慢两个子系统。随后诸多学者基于奇异摄动法提出了不同的解决方案:洪昭斌、陈力<sup>[9]</sup>基于奇异摄动法的鲁棒跟踪控制和柔性振动主动控制,提出了对空间柔性臂进行控制;刘华山等<sup>[10]</sup>利用奇异摄动理论将柔性关节机器人动力学模型解耦成快、慢两个子系统,引入一类平滑饱和函数和径向基函数神经网络非线性逼近手段,根据反步策略设计了针对慢子系统的有界控制器。在快子系统的有界控制器设计中,通过关节弹性力矩跟踪误差的滤波处理加速了系统的收敛。

基于 U-K (Udwadia-Kalaba) 方程的约束跟随方法,该方法不需要借助 Lagrange 乘子和伪广义速度等辅助变量,可以同时处理完整约束和非完整约束。Kalaba 和 Udwadia 等<sup>[11-15]</sup>利用 Gauss 最小约束原理将描述系统受约束运动的 Lagrange 方程重新定义为一个二次规划问题,给出了这个约束二次极小化问题的显式解析解,从而得到了一个描述受 Pfaffian 约束的离散机械系统约束运动的精确显式方程组;将 Lagrange 力学扩展到允许约束力对虚位移系统做功的情况,总结了约束力做功的 U-K 方程,并应用于多体系统的建模和控制,较好地解决了不确定多体动力学系统的控制问题。Chen 等<sup>[16-17]</sup>首次将 U-K 方程拓展至全驱动的机械系统控制中,使其满足一系列的完整或非完整约束,并首次提出了基于 U-K 方程的状态反馈约束跟随控制方法。该方法的思路是将一系列的控制系统目标设计成完整约束和非完整约束等一些需要满足的等式方程,因此其控制任务即为驱动系统满足这些约束方程。相较于其他控制方法,该方法不需要对非线性系统进行线性化,且可在不出现任何辅助变量(如 Lagrange 乘子)或伪变量(如广义速度)的情况下得到系统状态反馈控制律的显式方程<sup>[18]</sup>。近年来,基于 U-K 方法的控制研究得到了一定的发展。Yin 等<sup>[19]</sup>进一步将约束控制跟随方法拓展至欠驱动系统,实现了欠驱动二轮式机器人的控制。韩江等<sup>[20-21]</sup>基于 U-K 方法实现了平面冗余并联机器人的建模与带有不确定性的轨迹跟踪控制。Zhao 等<sup>[22]</sup>将该方法引入柔性关节机械臂,建立了柔性关节机械臂的动力学模型。Han 等<sup>[23]</sup>基于反步法并结合 U-K 方法提出了一种柔性关节机械臂的鲁棒控制方法。

在上述研究的基础上,针对当前柔性关节机械臂存在的柔性振荡与约束跟随问题,本文提出了一种新的针对柔性关节机械臂的控制方法。首先基于奇异摄动法将系统降阶为快、慢两个子系统。针对快、慢两个子系统,将运动轨迹设计成相应的完整约束或非完整约束,基于 U-K 方程的约束跟随方法设计控制器。本文对所提出的方法基于 MATLAB 进行动力学仿真,仿真结果验证了该方法的可行性,并与传统 PID 控制方法相比,验证了在处理柔性关节机械臂的柔性振荡与约束跟随时,其具有一定的优越性。

## 1 动力学模型描述与分解

### 1.1 动力学模型描述

Spong<sup>[8]</sup>首次提出了柔性关节的简化弹簧阻尼模型:

$$D\ddot{q} + c\dot{q} + k(\theta - q_2) = 0, \tag{1}$$

$$J\ddot{\theta} - k(\theta - q_2) = u. \tag{2}$$

以图 1 所示的二连杆柔性关节机械臂为例,假设连杆的质量均匀分布,连杆的结构标准对称.结合刚性二连杆机械臂的动力学方程和柔性关节的简化弹簧阻尼模型,即可得到动力学方程:

$$D(q_2)\ddot{q}_2 + C(\dot{q}_2, q_2)\dot{q}_2 + G(q_2) = K(q_1 - q_2), \tag{3}$$

$$J\ddot{q}_1 + K(q_1 - q_2) = Bu, \tag{4}$$

其中  $q_2 = [q^{(2)}, q^{(4)}]$  代表了连杆的转角,  $q_1 = [q^{(1)}, q^{(3)}]$  代表了关节角度,基准是竖直轴线;  $K$  是关节刚性矩阵(对角矩阵),机械臂的柔性关节当作线性弹簧处理,弹性力与  $K$  成正比;  $D(q_2)$  是连杆惯性矩阵;  $J$  是关节的惯性矩阵(对角矩阵);  $C(q_2, \dot{q}_2)$  是 Coriolis 力和离心力矩阵;  $G(q_2)$  是重力矩阵;  $B$  是输入矩阵;  $u$  是输入力<sup>[17]</sup>;

$$\begin{cases} D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \sin q^{(2)} + m_2 l_{c2} g \sin(q^{(2)} + q^{(4)}) \\ m_2 l_{c2} g \sin(q^{(2)} + q^{(4)}) \end{bmatrix}, \\ J = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ 0 & J_{22} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$\begin{cases} d_{11} = m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q^{(4)}) + m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2, d_{12} = m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos q^{(4)}) + I_2, \\ d_{21} = d_{12}, d_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2, \\ c_{11} = -m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}^{(4)} \sin q^{(4)}, c_{12} = -m_2 l_1 l_{c2} (\dot{q}^{(4)} + \dot{q}^{(2)}) \sin q^{(4)}, \\ c_{21} = m_2 l_1 l_{c2} \dot{q}^{(2)} \sin q^{(4)}, c_{22} = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$m_i (i = 1, 2)$  是连杆 1, 2 的质量,  $l_i (i = 1, 2)$  是连杆 1, 2 的长度,  $l_{ci} (i = 1, 2)$  是连杆 1, 2 长度的一半,  $I_i (i = 1, 2)$  是连杆 1, 2 相对于连杆中心的转动惯量.

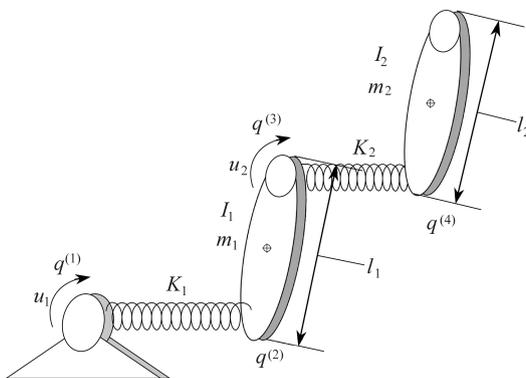


图 1 二连杆柔性关节机械臂

Fig. 1 The 2-link flexible manipulator

### 1.2 奇异摄动分解

奇异摄动法可以将一个高阶系统的求解降阶为两个低阶系统,然后分别求解,这就降低了求解系统的阶次,大大减小了计算量.针对二连杆柔性关节机械臂选取连杆转角  $q_2$  和关节弹性力矩误差  $e_1$  作为慢变量和快变量.奇异摄动法的基本假设如下:在快变量的暂态过程中慢变量保持常量,当慢变量变化比较明显时,快变量的暂态过程就已经结束并达到稳态值.使用奇异摄动法可以把二连杆柔性关节机械臂系统分解成慢系统、快系统.当慢系统和快系统都收敛于系统控制要求时,则有整体系统满足控制要求.具体分解过程如下:

令  $\mu = 1/k$ , 其中  $k$  是  $K$  (关节刚性矩阵)的最小值.令  $K = \mu^{-1}K_\mu$ ,

$$e = K(q_1 - q_2) = \mu^{-1}K_\mu(q_1 - q_2). \tag{7}$$

把式(7)代入式(3)、(4),可得

$$D(q_2)\ddot{q}_2 + C(q_2, \dot{q}_2)\dot{q}_2 + G(q_2) = e, \tag{8}$$

$$\mu \mathbf{J} \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_\mu \mathbf{e} = \mathbf{K}_\mu (\mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}}_2). \quad (9)$$

令  $\mu = 0$ , 可得

$$\mathbf{e} = (\mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}}_2). \quad (10)$$

把式(10)代入式(3), 可得到慢系统表达式:

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}_2) \ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{C}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{G}(\mathbf{q}_2) = \mathbf{B} \mathbf{u}_s - \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}}_2. \quad (11)$$

考虑快系统时, 把慢系统的状态变量当作常量. 即  $\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2, \ddot{\mathbf{q}}_2$  为常量, 设置一个新变量  $\mathbf{e}_f = \mathbf{e} - \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_s = \mathbf{B} \mathbf{u}_s - \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}}_2$ . 有以下两个方程:

$$\mu \mathbf{J} \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_\mu \mathbf{e} = \mathbf{K}_\mu (\mathbf{B} \mathbf{u} - \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}}_2), \quad (12)$$

$$\mu \mathbf{J} \ddot{\mathbf{e}}_s + \mathbf{K}_\mu \mathbf{e}_s = \mathbf{K}_\mu (\mathbf{B} \mathbf{u}_s - \mathbf{J} \ddot{\mathbf{q}}_2). \quad (13)$$

由式(12)减去式(13)可得

$$\mu \mathbf{J} \ddot{\mathbf{e}}_f + \mathbf{K}_\mu \mathbf{e}_f = \mathbf{K}_\mu \mathbf{B} \mathbf{u}_f. \quad (14)$$

在快时间尺度  $\tau = t / \sqrt{\mu}$  下变换式(14)可以得到

$$\mu \mathbf{J} \frac{d^2 \mathbf{e}_f}{d\tau^2} \left( \frac{d\tau}{dt} \right)^2 + \mathbf{K}_\mu \mathbf{e}_f(\tau) = \mathbf{K}_\mu \mathbf{B} \mathbf{u}_f(\tau). \quad (15)$$

所以可以得到快、慢子系统分别为

$$(\mathbf{J} + \mathbf{D}(\mathbf{q}_2)) \ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{C}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2) \dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{G}(\mathbf{q}_2) = \mathbf{B} \mathbf{u}_s, \quad (16)$$

$$\mathbf{J} \ddot{\mathbf{e}}_f(\tau) + \mathbf{K}_\mu \mathbf{e}_f(\tau) = \mathbf{K}_\mu \mathbf{B} \mathbf{u}_f(\tau), \quad (17)$$

其中  $\mathbf{u}_s$  是慢系统中连杆输入的力矩,  $\mathbf{u}_f$  是快系统中连杆输入的力矩, 实际系统输入力矩  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_f$ .

## 2 控制器设计

### 2.1 约束表达

一般动力学方程如下:

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = \mathbf{B}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \mathbf{u}. \quad (18)$$

约束表达如下:

$$\sum_{i=1}^n A_{li}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \dot{q}_i + D_l(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (19)$$

由式(19), 对  $t$  求导有

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n A_{li}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{li}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{li}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial A_{li}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial t} \right) \dot{q}_i + \\ & \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial D_l(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial D_l(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial D_l(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial t} \right) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

整理式(20)可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left( A_{li}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) + \frac{\partial D_l(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{lj}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j \right) \ddot{q}_i = \\ & - \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{li}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial A_{li}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial t} + \frac{\partial D_l(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i - \frac{\partial D_l(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (21)$$

式(19)、(21)写成矩阵的形式可以表达为

$$\mathbf{A}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \quad (22)$$

$$\mathbf{A}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{c}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \quad (23)$$

$$\mathbf{A} = [A_{ij}]_{m \times n}, \quad A_{ij} = A_{li}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) + \frac{\partial D_l(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{lj}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_j,$$

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T, \quad \mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_m]^T.$$

定义1 在矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{b}$  确定的情况下, 约束(22)至少存在一个解, 则称约束(22)是一致的.

**假设 1** 约束(22)是一致的.

不论是完整约束还是非完整约束,都可以用式(23)表达,还包括控制目标(轨迹跟踪、系统镇定和最优控制等)都可以先设计成相应的约束(23),再通过求导转换成约束(22)的形式<sup>[14]</sup>.在初始条件满足方程(23)的情况下,控制律满足式(22)就可以保证对约束(23)的跟踪.

**引理 1** 约束(22)一致的充要条件是  $AA^+b = b, A^+$  是  $A$  的 Moore-Penrose 广义逆矩阵.

## 2.2 初始状态满足约束的控制律

对给定的系统(18),对于给定约束(22),初始条件满足式(23)的条件下,控制律的求解过程如下:设

$$a := -M^{-1/2}(C\dot{q} + G), \ddot{z} := M^{1/2}\ddot{q}.$$

式(18)可以改写为

$$\ddot{z} = M^{-1/2}Bu + a. \quad (24)$$

令  $\Phi_1 = AM^{-1/2}$ , 式(22)可改写为

$$\Phi_1\ddot{z} = b. \quad (25)$$

**定义 2** 如果给定矩阵  $\Phi_1$  和  $b$ , 约束(25)存在至少一个解,则称约束(25)一致.

因为约束(25)是约束(22)的改写式,所以只要假设 1 满足,那么必然约束(25)是一致的.

**定义 3** 如果给定系统(18),存在一个控制  $u$ ,对所有的  $(\dot{q}, q, t) \in R^n \times R^n \times R$  满足约束方程(25),则称系统(18)相对于约束(25)是可控的.

式(24)需要满足式(25),有

$$b = \Phi_1\ddot{z} = \Phi_1(M^{-1/2}Bu + a). \quad (26)$$

令  $\Phi_2 = M^{-1/2}B$  可得

$$(\Phi_1\Phi_2)u = b - \Phi_1a := \bar{b}. \quad (27)$$

求解  $u$ , 需要任意的  $(\dot{q}, q, t) \in R^n \times R^n \times R$  都满足式(28)<sup>[13]</sup>的条件,可以得到  $u$  的解为式(29),使系统(18)相对于约束(25)可控:

$$\text{rank}(\Phi_1(\dot{q}, q, t)\Phi_2(\dot{q}, q, t)) \geq 1, \quad (28)$$

$$u = \tau_n = (\Phi_1\Phi_2)^+ \bar{b} + [I - (\Phi_1\Phi_2)^+(\Phi_1\Phi_2)]S. \quad (29)$$

## 2.3 初始状态不满足约束的控制律

在解决一些实际问题的时候,大部分情况都是初始状态不满足约束.基于 U-K 方法提出一种初始状态不满足约束的控制方法.

因为假设 1 中约束(22)一致,那么必然存在  $\dot{q}_d, \ddot{q}_d$  满足  $A\dot{q}_d = c, A\ddot{q}_d = b$ .

令  $u = \tau_s + \tau_n$ , 代入式(18)可得到

$$A\ddot{q} = AM^{-1}B(\dot{q}, q, t)\tau_s + A\ddot{q}_d. \quad (30)$$

令  $z := A\dot{q} - c$  可以得到  $\dot{z} = A\ddot{q} - b$ , 令  $\tau_s$  有

$$(AM^{-1}B)\tau_s = C_1z. \quad (31)$$

**假设 2** 式(31)是一致的.

因为假设 2 中式(31)一致,因此根据引理 1 会有  $(AM^{-1}B)(AM^{-1}B)^+(C_1z) = C_1z$ .

令  $\tau_s = C_1(AM^{-1}B)^+z, C_1 < 0$ , 式(30)可改写为

$$\dot{z} - C_1z = 0. \quad (32)$$

式(32)对于每一个维度,都可以看作齐次一阶微分方程.其解为

$$z_i = C_0e^{C_1t}, \quad i \leq m. \quad (33)$$

代入  $t = 0$  的初始条件  $z_i(0) = C_0$  可以得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_i = \lim_{t \rightarrow \infty} (z_i(0)e^{C_1t}) = 0, \quad C_1 < 0, \quad (34)$$

其中  $|C_1|$  越大,收敛速率越快.

综上得到控制律

$$u = \tau_n + \tau_s. \quad (35)$$

**定理 1** 满足假设 1、2 的情况下,对于系统(18),控制律(35)可以得到以下的控制表现:

- 1) 一致稳定性 对于任意  $\varepsilon > 0$ , 当存在  $\|z(t_0)\| < \varepsilon, t \in [t_0, \infty]$ , 会有  $\|z(t)\| < \varepsilon$ .
- 2) 收敛性 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $z(t_\infty) = \mathbf{0}$ .

**证明** 选取 Lyapunov 函数式:

$$V = z^T z. \quad (36)$$

$V(z)$  当且仅当  $z = \mathbf{0}$  时为 0. 当  $z \neq \mathbf{0}$  时,  $V(z) > 0$ , 所以  $V(z)$  正定, 满足 Lyapunov 函数的要求.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2z^T \dot{z} = 2z^T (A\dot{q} - b) = \\ &= 2z^T (AM^{-1}(B(\tau_s + \tau_n) - C\dot{q} - G) - b). \end{aligned} \quad (37)$$

假设 1 成立, 有  $AM^{-1}B\tau_n = AM^{-1}(C\dot{q} + G) + b$ , 假设 2 成立, 有  $(AM^{-1}B)(AM^{-1}B)^+(C_1 z) = C_1 z$ , 化简式(37)得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2z^T (AM^{-1}B\tau_s) = \\ &= 2z^T (AM^{-1}B(AM^{-1}B)^+(C_1 z)) = 2C_1 \|z\|^2. \end{aligned} \quad (38)$$

设计  $C_1 < 0$  就可以满足  $\dot{V} \leq 0$ . 当且仅当  $z = \mathbf{0}$  时,  $\dot{V} = 0$ , 所以  $\dot{V}$  负定. 证明了当控制律为  $u = \tau_n + \tau_s = (\Phi_1 \Phi_2)^+ \bar{b} + [I - (\Phi_1 \Phi_2)^+ (\Phi_1 \Phi_2)]S + (AM^{-1}B)^+(C_1 z)$  时, 约束方程是渐进稳定的.

### 3 整体设计流程

二连杆柔性关节机械臂是一个欠驱动、非线性的动力学方程. 借助奇异摄动法把二连杆柔性关节机械臂动力学方程降阶为两个全驱动模型. 慢系统表达了二连杆柔性关节机械臂的运动约束. 快系统表达了柔性关节对运动过程中扰动的影响. 所以系统的控制目标分为两个部分: ① 慢系统控制律满足约束方程, 实现包括位置、速度、轨迹控制等宏观上的控制目标. ② 快系统控制律使力矩跟踪误差快速收敛到 0, 减小柔性对系统的影响.

#### 3.1 控制目标

控制器的设计目标是使系统对控制约束进行跟踪. 慢系统主要负责二连杆柔性关节机械臂的约束跟踪, 快系统负责抑制关节柔性带来的振动与误差. 由式(16)、(17)可以得到控制目标的数学表达式:

$$\sum_{i=1}^n A_{li}(\dot{q}_2, q_2, t) \dot{q}_i + D_l(\dot{q}_2, q_2, t) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad (39)$$

$$e_f = \mathbf{0}. \quad (40)$$

因此, 控制目标是被控系统的慢子系统, 满足约束方程(39), 快子系统满足约束方程(40).

#### 3.2 慢系统的控制律设计

慢系统的控制律设计, 不论是完整约束还是非完整约束, 或者是其他的轨迹约束、优化控制等, 都可以写成式(23)的形式. 式(23)对时间  $t$  求导后, 得到约束(22), 然后根据式(29)、(31)得到控制律. 具体过程如下:

慢系统动力学方程为

$$(J + D(q_2))\ddot{q}_2 + C(q_2, \dot{q}_2)\dot{q}_2 + G(q_2) = Bu_s. \quad (41)$$

约束可以表达为式(22)、(23)形式, 如下:

$$A\ddot{q}_2 = b(\dot{q}_2, q_2, t), \quad A\dot{q}_2 = c(\dot{q}_2, q_2, t). \quad (42)$$

控制律可以设计为

$$u = \tau_s + \tau_n, \quad \tau_s = (AM^{-1}B)^+(C_1 z), \quad \tau_n = (\Phi_1 \Phi_2)^+ \bar{b}, \quad z = A\dot{q}_2 - c, \quad M = J + D. \quad (43)$$

#### 3.3 快系统的控制律设计

快系统的控制律设计, 快系统的目标是让式(17)的变量  $e_f$  快速收敛到零. 快系统的动力学表达为

$$J\ddot{e}_f(\tau) + K_\mu e_f(\tau) = K_\mu Bu_f(\tau). \quad (44)$$

约束可以表达为

$$ke_f + (\dot{e}_f - \mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \ddot{e}_f = -k\dot{e}_f, \quad \dot{e}_f = \mu^{1/2}K(\dot{q}_1 - \dot{q}_2). \quad (45)$$

注 1  $e_f = e - e_s = K(q_1 - q_2) - (Bu_s - J\ddot{q}_2)$ , 其中  $\ddot{q}_2$  是慢系统求解得到的期望加速度, 将其看作常量代入进行计算. 在时间尺度  $\tau$  中有

$$\dot{e}_s = 0, \dot{e}_f = \frac{de_f}{d\tau} = \frac{de_f}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \left( \frac{de}{dt} \right) = \mu^{1/2} K(\dot{q}_1 - \dot{q}_2).$$

采用控制律

$$\begin{cases} u_f = \tau_s + \tau_n, \tau_s = (J^{-1}K_\mu B)^+ (C_1 z), \\ \tau_n = (\Phi_1 \Phi_2)^+ \bar{b} = (J^{-1}K_\mu B)^+ (-k\dot{e}_f + J^{-1}K_\mu e_f), \\ K_\mu = \mu K, \mu = 1/\min(K_1, K_2), z = ke_f + \dot{e}_f. \end{cases} \quad (46)$$

整体控制流程如图 2 所示. 其中控制系统采集的输入变量, 慢系统需要参数为连杆 1 和连杆 2 的角度和角速度, 采用角度传感器, 常见有光电、Hall、机械几类. 角速度可以采用角度的微分或者现有的角速度传感器进行测量; 快系统需要参数为柔性关节传递的力矩大小与扭矩的变化速度, 可以采用扭矩传感器, 常见有接触式和非接触式的, 其原理都是测量传感器的变形量来计算扭矩, 扭矩的变化速度可以对扭矩进行微分得到, 扭矩传感器的采样率要在较高的频率下. 其余一些静态的变量都可以采用常用的方法测量, 例如连杆 1 和连杆 2 的质量、转动惯量、长度, 柔性关节的转动惯量, 柔性关节的弹性系数.

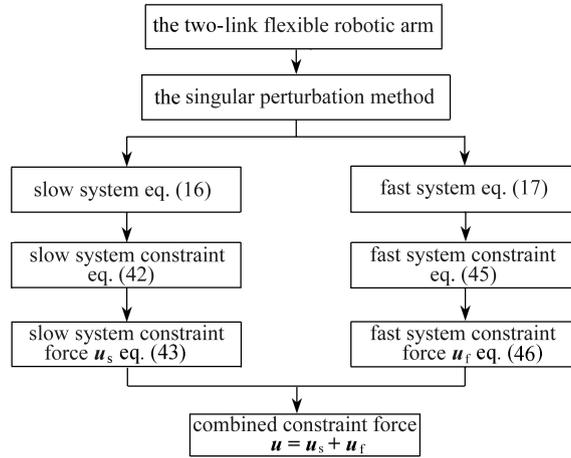


图 2 控制律设计流程

Fig. 2 The control law design flow chart

## 4 数值仿真分析

本节通过 MATLAB 数值模拟的方法, 验证了基于奇异摄动的柔性关节机械臂约束跟随控制的可行性. 当然, 柔性关节机械臂建模中所包含的动力学参数, 如关节弹性系数、关节转动惯量、连杆长度、连杆质量、连杆质心位置和连杆相对质心的转动惯量等都是已知的, 具体数据如表 1 所示.

重力加速度取  $9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . 代入参数矩阵 (5)、(6), 仿真之前需要输入系统的初始状态, 初始状态选取  $q_1 = [0, 0]^T, \dot{q}_2 = [0, 0]^T$ , 初始时刻的角速度、角加速度都为 0.

$$\begin{cases} D = \begin{bmatrix} 2.88\cos q^{(4)} + 5.76 & 1.44\cos q^{(4)} + 1.44 \\ 1.44\cos q^{(4)} + 1.44 & 1.44 \end{bmatrix}, \\ C = \begin{bmatrix} -1.44\dot{q}^{(4)} \sin q^{(4)} & -1.44(\dot{q}^{(4)} + \dot{q}^{(2)}) \sin q^{(4)} \\ 1.44\dot{q}^{(2)} \sin q^{(4)} & 0 \end{bmatrix}, \\ G = \begin{bmatrix} 70.632\sin q^{(2)} + 23.544(q^{(2)} + q^{(4)}) \\ 23.544(q^{(2)} + q^{(4)}) \end{bmatrix}, \\ J = \begin{bmatrix} 0.135 & 0 \\ 0 & 0.15 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 10\,000 & 0 \\ 0 & 10\,000 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, M = D + J. \end{cases} \quad (47)$$

表 1 二连杆柔性机械臂参数  
Table 1 Parameters of the 2-link flexible manipulator

parameter	symbol	value
moment of inertia of joint 1	$J_1 / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.135
elastic coefficient of joint 1	$K_1 / (\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad})$	10 000
moment of inertia of joint 2	$J_2 / (\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.150
elastic coefficient of joint 2	$K_2 / (\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad})$	10 000
mass of link 1	$m_1 / \text{kg}$	8
length of link 1	$l_1 / \text{m}$	0.6
center position of link 1	$l_{c1} / \text{m}$	0.3
mass of link 2	$m_2 / \text{kg}$	8
length of link 2	$l_2 / \text{m}$	0.6
center position of link 2	$l_{c2} / \text{m}$	0.3

#### 4.1 连杆角度约束

一般会要求机械臂做转角的角度控制与机械臂末端执行器的轨迹控制.本小节以三个示例进行验证.第一个示例是对机械臂角度的准确控制.慢系统约束如下:

$$\begin{cases} k(q_2 - q_d) + \dot{q}_2 = \mathbf{0}, \ddot{q}_2 = -k(\dot{q}_2 - \mathbf{0}), \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = -k(q_2 - q_d), \mathbf{b} = -k(\dot{q}_2 - \mathbf{0}), \end{cases} \quad (48)$$

$q_d$  为期望角度.

代入式(28)得

$$\text{rank}(\Phi_1 \Phi_2) = \text{rank}(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}) = \text{rank}(\mathbf{A}(\mathbf{D} + \mathbf{J})^{-1}\mathbf{B}) = 2 > 1. \quad (49)$$

设计  $k = 5, C_1 = -20$ , 代入式(43)可得慢系统控制律:

$$\mathbf{u}_s = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_n = (\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B})^+ (\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}\dot{q}_2 + \mathbf{G})) - 20(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B})^+ (\mathbf{A}\dot{q}_2 - \mathbf{c}). \quad (50)$$

快系统约束为

$$\begin{cases} k\mathbf{e}_f + \dot{\mathbf{e}}_f = \mathbf{0}, \ddot{\mathbf{e}}_f = -k\dot{\mathbf{e}}_f, \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = -k\mathbf{e}_f, \mathbf{b} = -k\dot{\mathbf{e}}_f. \end{cases} \quad (51)$$

由式(28)可得

$$\text{rank}(\Phi_1 \Phi_2) = \text{rank}(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}) = \text{rank}(\mathbf{A}(\mathbf{J})^{-1}\mathbf{K}_\mu \mathbf{B}) = 2 > 1. \quad (52)$$

设计  $k = 10, C_1 = -100$ , 代入式(46)可得快系统控制律:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_f = (\mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}_\mu \mathbf{B})^+ (\mathbf{b} + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{K}_\mu \mathbf{e}_f)) - (\mathbf{J}^{-1}\mathbf{K}_\mu \mathbf{B})^+ (1\,000\mathbf{e}_f + 100\dot{\mathbf{e}}_f), \\ \mathbf{K}_\mu = \mu \mathbf{K}, \mu = 1/\min(K_1, K_2) = 1/10\,000. \end{cases} \quad (53)$$

最后根据奇异摄动理论结合式(50)、(53)得到控制律:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_f, \quad (54)$$

设置  $q_d = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}$ .图 3、图 4 证明了本文提出的方法对完整约束中的位置约束有很好的跟踪效果,对比 PID 的效果,有更好的误差精度、更快的收敛时间和更小的超调量.其中 PID 参数选取方法为利用多组 PID 参数,选取了效果最好的一组参数为

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 4\,000 & 0 \\ 0 & 3\,000 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} 4\,000 & 0 \\ 0 & 5\,000 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 1\,600 & 0 \\ 0 & 2\,000 \end{bmatrix}.$$

控制律设计为

$$\mathbf{u} = -\mathbf{A}^+ \left( \mathbf{K}_p (\mathbf{A}\mathbf{q} - \mathbf{c}) + \mathbf{K}_i \left( \int_0^t (\mathbf{A}\mathbf{q} - \mathbf{c}) \right) + \mathbf{K}_d (\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{d}) \right),$$

考虑力的输出大小,两种控制方式的控制力都限定在  $1\ 000\ \text{N}\cdot\text{m}$  以内。

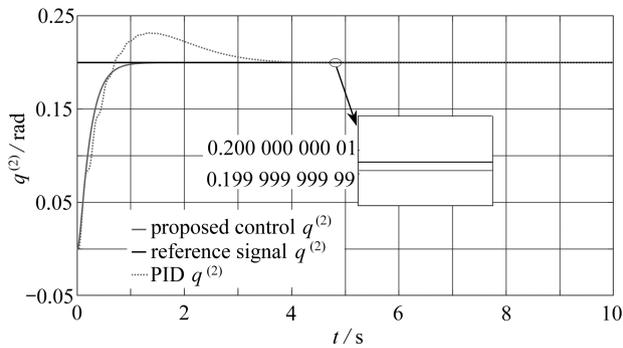


图 3 转杆 1 的角度轨迹  $q^{(2)}$

Fig. 3 The angle track  $q^{(2)}$  of rotary rod 1

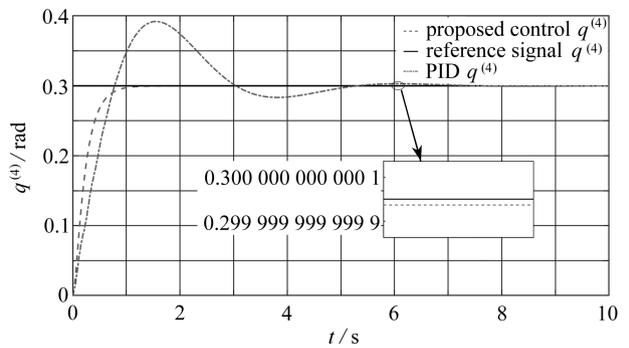


图 4 转杆 2 的角度轨迹  $q^{(4)}$

Fig. 4 The angle track  $q^{(4)}$  of rotary rod 2

### 4.2 连杆角速度约束

对机械臂的连杆角速度进行控制,慢系统约束为

$$\begin{cases} A\dot{q}_2 = \dot{q}_d, A\ddot{q}_2 = \mathbf{0}, \\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, c = \dot{q}_d, b = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (55)$$

其中  $\dot{q}_d$  为期望角速度.设计  $k = 5, C_1 = -20$ , 代入式(43)可得慢系统控制律:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_f, \\ \mathbf{u}_s = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_n = (\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B})^+ (\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C}\dot{q}_2 + \mathbf{G})) - (\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B})^+ (20(\mathbf{A}\dot{q}_2 - \dot{q}_d)), \end{cases} \quad (56)$$

$\mathbf{u}_f$  和式(53)中的控制律相同.设置  $\dot{q}_d = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}$ .

由图 5、图 6 可证明该方法对柔性关节所产生的振荡有很好的抑制作用,并且在 PID 有很大的跟踪误差的情况下,该方法的跟踪误差仅为  $1 \times 10^{-4}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

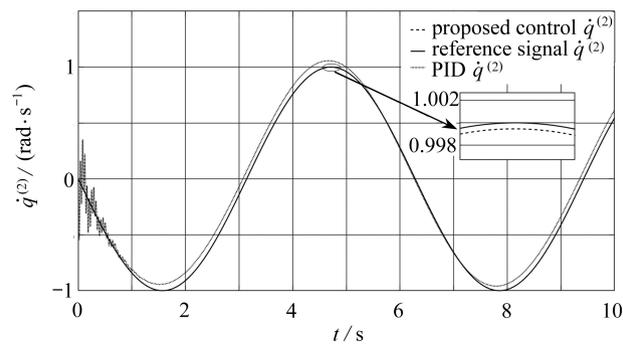


图 5 转杆 1 的角速度  $\dot{q}^{(2)}$

Fig. 5 The angular velocity  $\dot{q}^{(2)}$  of rotary rod 1

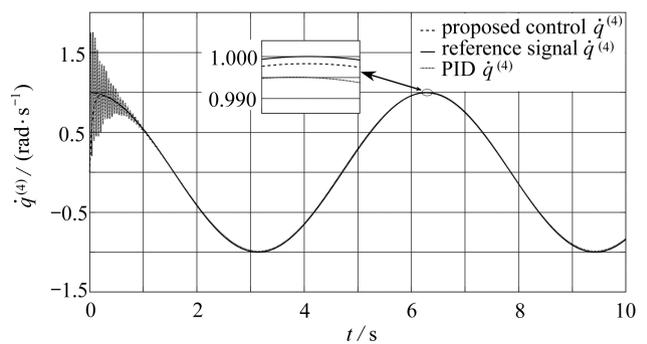


图 6 转杆 2 的角速度  $\dot{q}^{(4)}$

Fig. 6 The angular velocity  $\dot{q}^{(4)}$  of rotary rod 2

### 4.3 末端执行器轨迹跟踪

在使用机械臂的场景中会经常对机械臂的末端执行器的轨迹提出要求.本例中使用椭圆轨迹进行仿真验证.椭圆轨迹可以写成

$$\begin{cases} x_d = a \sin t, y_d = b \cos t, a = 0.3, b = -0.6, \\ x = L_1 \sin q^{(2)} + L_2 \sin(q^{(2)} + q^{(4)}), \\ y = -(L_1 \cos q^{(2)} + L_2 \cos(q^{(2)} + q^{(4)})). \end{cases} \quad (57)$$

慢系统约束可以写成

$$\begin{cases} A\dot{q}_2 = c, A\ddot{q}_2 = b, q_2 = \begin{bmatrix} q^{(2)} \\ q^{(4)} \end{bmatrix}, \dot{q}_2 = \begin{bmatrix} \dot{q}^{(2)} \\ \dot{q}^{(4)} \end{bmatrix}, \ddot{q}_2 = \begin{bmatrix} \ddot{q}^{(2)} \\ \ddot{q}^{(4)} \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} a \cos t \\ -b \sin t \end{bmatrix}, \\ A = \begin{bmatrix} L_1 \cos q^{(2)} + L_2 \cos(q^{(2)} + q^{(4)}) & L_2 \cos(q^{(2)} + q^{(4)}) \\ L_1 \sin q^{(2)} + L_2 \sin(q^{(2)} + q^{(4)}) & L_2 \sin(q^{(2)} + q^{(4)}) \end{bmatrix}, \\ c = k \begin{bmatrix} a \sin t - L_1 \sin q^{(2)} - L_2 \sin(q^{(2)} + q^{(4)}) \\ b \cos t + L_1 \cos q^{(2)} + L_2 \cos(q^{(2)} + q^{(4)}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \cos t \\ -b \sin t \end{bmatrix}, \\ b = -k(A\dot{q}_2 - d) + \begin{bmatrix} -a \sin t + (\dot{q}^{(2)})^2 L_1 \sin q^{(2)} + (\dot{q}^{(2)} \dot{q}^{(4)})^2 L_2 \sin(q^{(2)} + q^{(4)}) \\ -b \cos t - (\dot{q}^{(2)})^2 L_1 \cos q^{(2)} - (\dot{q}^{(2)} \dot{q}^{(4)})^2 L_2 \cos(q^{(2)} + q^{(4)}) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (58)$$

按照图 2 进行控制率设计,设计  $k = 5, C_1 = -20$ , 可以得到控制律:

$$\begin{cases} u = u_s + u_f, \\ u_s = \tau_s + \tau_n = (AM^{-1}B)^+ (b + AM^{-1}(C\dot{q}_2 + G)) - 20(AM^{-1}B)^+ (A\dot{q}_2 - c), \end{cases} \quad (59)$$

$u_f$  和式(53)中的控制律相同。

相比于传统 PID 控制方法,图 7 验证了该方法对二连杆柔性机械臂的末端执行器控制具有更小的轨迹跟踪误差。图 8 是具体的末端位置误差随着时间变化的曲线。从图中可以明显看出,本文提出的控制方法在  $x, y$  位置的跟踪精度上都优于传统 PID 控制方法。

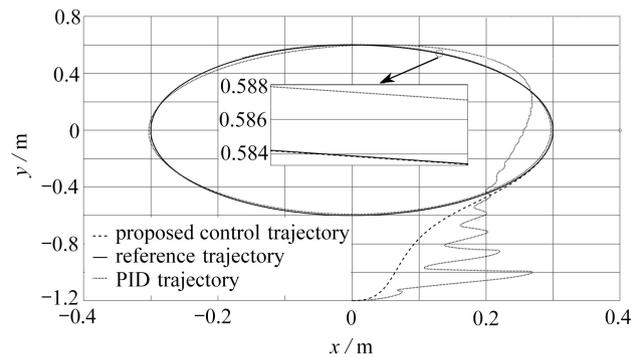


图 7 末端轨迹

Fig. 7 The end point trajectory

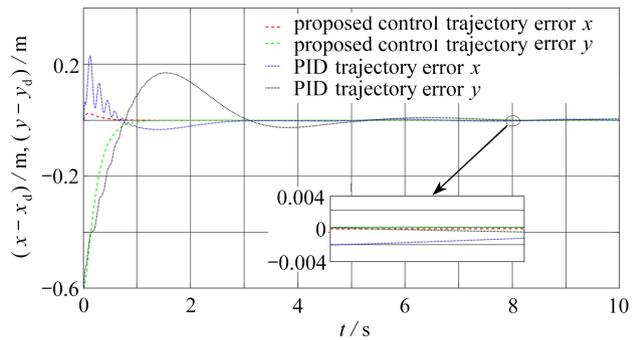


图 8 末端轨迹位置误差

Fig. 8 The position error of the end track

由图 9、图 10 可知,输出力矩在开始阶段都达到了输出力矩的最大值。本文提出的方法相对传统 PID 控制方法输出力矩稳定时间更短,且稳定之后输出力矩大小基本一致,只存在小幅度的波动。

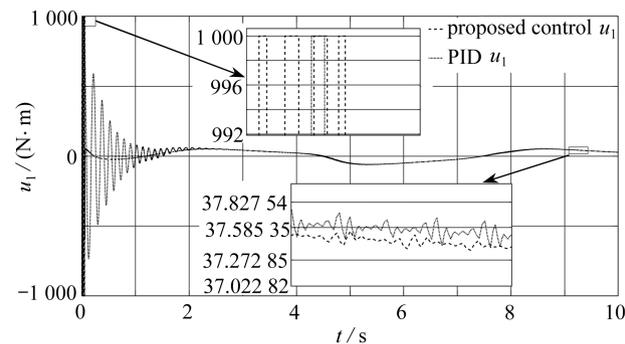


图 9 柔性关节 1 输出力矩  $u_1$

Fig. 9 The output torque  $u_1$  of flexible joint 1

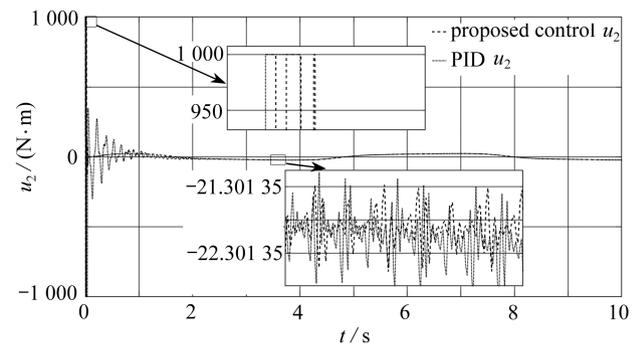


图 10 柔性关节 2 输出力矩  $u_2$

Fig. 10 The output torque  $u_2$  of flexible joint 2

图 11 阐述了椭圆轨迹在加载控制律 2 s 后的位置误差和慢系统控制律设计参数  $k, C_1$  的关系。可见,随着参数  $C_1$  的不断加大,收敛速度越来越快。当  $C_1$  约束越大,收敛越快,这和式(34)中的结果保持一致。

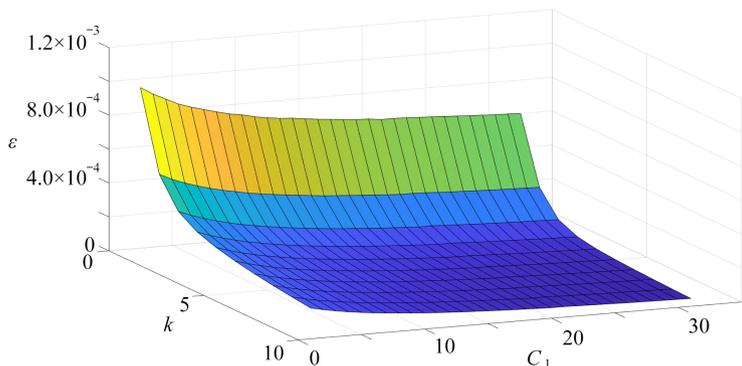


图 11 参数与误差关系

Fig. 11 The relationship between parameters and errors

## 5 结 论

二连杆柔性关节机械臂系统是欠驱动系统和柔性系统,传统 PID 控制方法会产生振荡和较大的跟踪误差.为解决这类柔性控制的问题,本文提出了结合奇异摄动法和 U-K 方法的控制策略,将系统拆分为慢系统、快系统两个全驱动系统.慢系统解决了系统的约束跟随问题,快系统解决了系统的振荡与误差过大的问题,本文提出的控制方法不需要对非线性系统进行线性化,可以直接得到控制律的显式方程.通过 Lyapunov 稳定性证明和 MATLAB 数值仿真验证的方式,验证了该方法的稳定性与对柔性系统控制的有效性.同时对比了传统 PID 控制方法,仿真结果显示所提出方法具有更好的控制精度.未来我们将开展所提出方法的控制参数优化研究和建模时参数不确定性的鲁棒控制方法研究.

### 参考文献 (References):

- [1] YANG C G, JIANG Y M, HE W, et al. Adaptive parameter estimation and control design for robot manipulators with finite-time convergence[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, **65**(10): 8112-8123.
- [2] 刘建昌, 苗宇. 基于神经网络补偿的机械臂轨迹控制策略的研究[J]. *控制与决策*, 2005, **20**(7): 732-736. (LIU Jianchang, MIAO Yu. Research on trajectory control strategy of manipulator based on neural network compensation[J]. *Control and Decision*, 2005, **20**(7): 732-736. (in Chinese))
- [3] 陈强, 丁科新, 南余荣. 带有输出约束的柔性关节机械臂预设性能自适应控制[J]. *控制与决策*, 2021, **36**(2): 387-394. (CHEN Qiang, DING Kexin, NAN Yurong. Prescribed performance adaptive control of flexible-joint manipulators with output constraints[J]. *Control and Decision*, 2021, **36**(2): 387-394. (in Chinese))
- [4] YOO S J, PARK J B, CHOI Y H. Adaptive output feedback control of flexible-joint robots using neural networks: dynamic surface design approach[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2008, **19**(10): 1712-1726.
- [5] LING S, WANG H Q, LIU P X. Adaptive fuzzy dynamic surface control of flexible-joint robot systems with input saturation[J]. *CAA Journal of Automatica Sinica*, 2019, **6**(1): 97-107.
- [6] LIU X, ZHAO F, GE S S, et al. End-effector force estimation for flexible-joint robots with global friction approximation using neural networks[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2019, **15**(3): 1730-1741.
- [7] 刘华平, 孙富春, 何克忠, 等. 奇异摄动控制系统: 理论与应用[J]. *控制理论与应用*, 2003, **20**(1): 1-7. (LIU Huaping, SUN Fuchun, HE Kezhong, et al. Survey of singularly perturbed control systems: theory and applications[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, **20**(1): 1-7. (in Chinese))
- [8] SPONG M W. Modeling and control of elastic joint robots[J]. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 1987, **109**(4): 310-318.
- [9] 洪昭斌, 陈力. 柔性空间机械臂基于奇异摄动法的鲁棒跟踪控制和柔性振动主动控制[J]. *工程力学*, 2010, **27**

- (8): 191-198. (HONG Zhaobin, CHEN Li. Robust control and active vibration control of space flexible manipulator by singular perturbation approach[J]. *Engineering Mechanics*, 2010, **27**(8): 191-198. (in Chinese))
- [10] 刘华山, 金元林, 程新, 等. 力矩输入有界的柔性关节机器人轨迹跟踪控制[J]. 控制理论与应用, 2019, **36**(6): 983-992. (LIU Huashan, JIN Yuanlin, CHENG Xin, et al. Trajectory tracking control for flexible-joint robot manipulators with bounded torque inputs[J]. *Control Theory & Applications*, 2019, **36**(6): 983-992. (in Chinese))
- [11] KALABA R E, UDWADIA F E. Equations of motion for nonholonomic, constrained dynamical systems via Gauss's principle[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1993, **60**(3): 662-668.
- [12] KALABA R, UDWADIA F. Analytical dynamics with constraint forces that do work in virtual displacements [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2001, **121**(2/3): 211-217.
- [13] UDWADIA F E, KALABA R E, PHOHOMSIRI P. Mechanical systems with nonideal constraints: explicit equations without the use of generalized inverses[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2004, **71**(5): 615-621.
- [14] WANICHANON T, CHO H, UDWADIA F E. An approach to the dynamics and control of uncertain multi-body systems[J]. *Procedia IUTAM*, 2015, **13**: 43-52.
- [15] KOGANTI P B, UDWADIA F E. Unified approach to modeling and control of rigid multibody systems[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2016, **39**(12): 2683-2698.
- [16] CHEN Y H. Constraint-following servo control design for mechanical systems[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2009, **15**(3): 369-389.
- [17] CHEN Y H, ZHANG X R. Adaptive robust approximate constraint-following control for mechanical systems [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2010, **347**(1): 69-86.
- [18] 李旻, 熊亮, 尹辉, 等. 含不等式约束的欠驱动系统约束跟随控制[J]. 控制理论与应用, 2020, **37**(9): 1971-1982. (LI Min, XIONG Liang, YIN Hui, et al. Constraint-following control for underactuated systems with inequality constraints[J]. *Control Theory & Applications*, 2020, **37**(9): 1971-1982. (in Chinese))
- [19] YIN H, CHEN Y H, YU D. Controlling an underactuated two-wheeled mobile robot: a constraint-following approach[J]. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 2019, **141**(7): 1002-1011.
- [20] 韩江, 汪鹏, 董方方, 等. 基于 Udwadia-Kalab 方法的并联机器人鲁棒伺服约束控制[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(3): 264-274. (HAN Jiang, WANG Peng, DONG Fangfang, et al. Robust servo constrained control of parallel robots based on the Udwadia-Kalaba method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(3): 264-274. (in Chinese))
- [21] 韩江, 汪鹏, 董方方, 等. 基于 Udwadia-Kalaba 方法的平面冗余并联机器人建模与轨迹跟踪控制[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(11): 1183-1196. (HAN Jiang, WANG Peng, DONG Fangfang, et al. Modeling and control of planar redundant parallel robots based on the Udwadia-Kalaba method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(11): 1183-1196. (in Chinese))
- [22] ZHAO X M, CHEN Y H, ZHAO H, et al. Udwadia-Kalaba equation for constrained mechanical systems: formulation and applications[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2018, **31**(6): 11-24.
- [23] HAN J, CHEN Y H, ZHAO X M, et al. Optimal design for robust control of uncertain flexible joint manipulators: a fuzzy dynamical system approach[J]. *International Journal of Control*, 2018, **91**(4): 947-951.