应用数学和力学
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Boussinesq方程温和解的全局适定性

周艳平，王 珣，别群益

Global Well-Posedness of the Mild Solutions to the Boussinesq Equations

ZHOU Yanping, WANG Xun, and BIE Qunyi

在线阅读 View online: https://doi.org/10.21656/1000-0887.430036

---

　http://www.applmathmech.cn

Boussinesq 方程温和解的全局适定性*

周艳平，　王　珣，　别群益

（三峡大学 理学院，湖北 宜昌 443002）

摘要： Boussinesq 方程作为描述许多地球物理现象的模型, 是 Navier-Stokes 方程与热力学方程之间耦合的零阶近似. 利用隐函数定理, 研究带黏性高维 Boussinesq 系统, 并得到了小初值位于尺度不变空间时温和解的全局适定性.

关　键　词： Boussinesq 方程；　温和解；　全局适定性

中图分类号： O175.2　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.430036

Global Well-Posedness of the Mild Solutions to the Boussinesq Equations

ZHOU Yanping,　WANG Xun,　BIE Qunyi

(*College of Science*, *China Three Gorges University*, *Yichang*, *Hubei* 443002, *P.R.China*)

Abstract: The Boussinesq system, as a model to describe many geophysical phenomena, is a zero-order approximation of the coupling between the Navier-Stokes equations and the thermodynamic equations. The multi-dimensional viscous Boussinesq equations were considered. By means of the implicit function theorem, the global well-posedness of the mild solutions was obtained with the small initial data in the scaling invariant spaces.

Key words: Boussinesq equations; mild solution; global well-posedness

引　　言

Boussinesq 方程是 Navier-Stokes 方程与热力学方程之间耦合的零阶近似, 是描述在重力作用下的流体动力学方程, 并且已广泛地应用于大气科学与海洋环流的研究中, 如气旋、飓风和海啸等突发的自然灾害[1-5]. 在过去几十年中, 数学家已经对大气、海洋以及大气和海洋耦合的原始方程进行了广泛的研究, 尤其是原始方程组的适定性和自身的稳定性等问题[6-7]. Boussinesq 方程具体的数学表达式如下[5]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla p = \Delta\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\beta}\theta, & (t,\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N, \\ \theta_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta = \Delta\theta, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \\ (\boldsymbol{u},\theta)(0) = (\boldsymbol{u}_0,\theta_0), \end{cases} \tag{1}$$

这里θ和$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_N)$分别表示温度和流体的速度, p表示压力, 常向量$\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^N$与流体的热展开系数成正比, 函数$\boldsymbol{u}_0$及$\theta_0$表示给定的初始值. 系统 (1) 具有尺度不变性, 即对任意$\lambda > 0$, $(\boldsymbol{u}_\lambda, \theta_\lambda)$ 仍然是系统的解, 其中

* **收稿日期：** 2022-02-15; **修订日期：** 2022-06-10

基金项目： 国家自然科学基金 (11901346; 11871305)

作者简介： 周艳平 (1980—), 女, 博士 (通讯作者. E-mail: zhyp5208@163.com);
王珣 (1997—), 女, 硕士生 (E-mail: 3526403334@qq.com);
别群益 (1970—), 男, 教授, 博士, 博士生导师 (E-mail: qybie@126.com).

引用格式： 周艳平, 王珣, 别群益. Boussinesq 方程温和解的全局适定性[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(8): 920-926.

$$\boldsymbol{u}_\lambda(t,\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{u}(\lambda^2 t,\lambda\boldsymbol{x}),\ \ \theta_\lambda(t,\boldsymbol{x})=\lambda^3\theta(\lambda^2 t,\lambda\boldsymbol{x}).$$

系统 (1) 在各种不同空间中解的存在唯一性结果可参考文献 [8-14]. 文献 [15] 研究了其解的大时间行为. 在尺度不变意义下, 文献 [16] 证明了系统 (1) 在拟测度空间上温和解的自相似性. 对于 Keller-Segel 方程与 Navier-Stokes 方程的耦合系统, 文献 [17] 在关于时间加权的 Lebesgue 空间上, 利用隐函数定理证明了其温和解的全局存在唯一性. 另外, 文献 [18-19] 分别得到了磁流体方程及向列型液晶方程在尺度不变空间下温和解的全局适定性.

受上述文献的启发, 本文的主要目的是研究当初始值$(\boldsymbol{u}_0,\theta_0)$在尺度不变的弱 Lebesgue 空间中具有小性时, 系统 (1) 的温和解在$(t,\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N\,(N\geqslant 3)$上的全局适定性.

下面引入弱-L^p 空间$L^p_\omega(\mathbb{R}^N)$, 其范数$\|\cdot\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^N)}$定义为

$$\|f\|_{L^p_\omega(\mathbb{R}^N)}\overset{\text{def}}{=}\sup_{s>0}[\,s\cdot m\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N;|f(\boldsymbol{x})|>s\}^{1/p}],$$

其中m表示Lebesgue测度. 在后文中, 有时会将$L^p(\mathbb{R}^N)$和$L^p_\omega(\mathbb{R}^N)$分别缩写为 L^p 和L^p_ω.

定义 1 设空间维数$N\geqslant 3$, 初始值$(\boldsymbol{u}_0,\theta_0)$满足

$$\boldsymbol{u}_0\in L^N_\omega(\mathbb{R}^N),\ \theta_0\in\begin{cases}L^{N/3}_\omega(\mathbb{R}^N), & N\geqslant 4,\\ L^1(\mathbb{R}^N), & N=3.\end{cases}$$

如果对某个$1\leqslant q,r\leqslant\infty$, 有$\boldsymbol{u},\theta\in L^q_{\text{loc}}(0,\infty;L^r(\mathbb{R}^N))$以及等式

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}(t)=\mathrm{e}^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0-\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}P(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\beta}\theta)(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\\ \theta(t)=\mathrm{e}^{t\Delta}\theta_0-\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta)(\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{cases}\tag{2}$$

对$t\in(0,\infty)$成立, 则称可测函数$(\boldsymbol{u},\theta)$在$(t,\boldsymbol{x})\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^N$上是系统 (1) 的一个温和解. 这里$\mathrm{e}^{t\Delta}$表示如下定义的热半群:

$$(\mathrm{e}^{t\Delta}g)(\boldsymbol{x})\equiv\int_{\mathbb{R}^N}G(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)g(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y},\tag{3}$$

其中$G(\boldsymbol{x},t)=\dfrac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{x}|^2/4t}$. 算子$P=\{P_{jk}\}_{j,k=1,2,\cdots,N}$是投影到零散度速度场的投影算子, 可表示为

$$P_{jk}=\delta_{jk}+R_jR_k,\qquad j,k=1,2,\cdots,N,\tag{4}$$

这里$R_j\equiv\partial/\partial x_j(-\Delta)^{-1/2}$表示Riesz算子.

本文的主要结论如下.

定理 1(存在唯一性) 假设空间维数$N\geqslant 3$. 设指标p,q满足如下三个关系式之一:

(i) $\begin{cases}\dfrac{N}{3}<q<\dfrac{N}{2}, N<p<\dfrac{Nq}{N-2q}, & N\geqslant 4,\\ \dfrac{6}{5}<q<\dfrac{N}{2}, \dfrac{q}{q-1}\leqslant p<\dfrac{Nq}{N-2q}, & N=3;\end{cases}$

(ii) $q=N/2, N<p<\infty$;

(iii) $\dfrac{N}{2}<q<N, N<p<\dfrac{Nq}{2q-N}$.

那么存在一个常数$\delta=\delta(N,p,q)$, 当初始值$(\boldsymbol{u}_0,\theta_0)$满足

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^N_\omega(\mathbb{R}^N)}+\|\theta_0\|_{L^{N/3}_\omega(\mathbb{R}^N)}<\delta,\qquad N\geqslant 4,\tag{5}$$

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^N_\omega(\mathbb{R}^N)}+\|\theta_0\|_{L^{N/3}(\mathbb{R}^N)}<\delta,\qquad N=3\tag{6}$$

时, 系统 (1) 存在温和解$(\boldsymbol{u},\theta)$, 且有

$$t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\boldsymbol{u}\in C_\omega([0,\infty);L^p(\mathbb{R}^N)),\tag{7}$$

$$t^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\theta\in C_\omega([0,\infty);L^q(\mathbb{R}^N)),\tag{8}$$

其中记号$C_\omega([0,\infty);X)$表示在$[0,\infty)$上取值于 Banach 空间X上的有界弱-$*$连续函数的集合 (详见文献 [20]).

若式 (7)、(8) 中对应空间范数充分小, 则温和解$(\boldsymbol{u},\theta)$是唯一的. 另外, 当$t\to\infty$时, $(\boldsymbol{u},\theta)$具有如下的渐近性:

$$\left\|\boldsymbol{u}(t)-\mathrm{e}^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}=O\left(t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\right),\tag{9}$$

$$\left\|\theta(t)-\mathrm{e}^{t\Delta}\theta_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}=O\left(t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\right).\tag{10}$$

定理 2(稳定性) 假设$N\geqslant3$, 指标p,q满足定理 1 中的条件, 常数$\delta=\delta(N,p,q)$与式 (5) 和 (6) 中相同, 假设当$N\geqslant4$时, 初始值$(\boldsymbol{u}_0,\theta_0)$和$(\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,\widetilde{\theta}_0)$满足

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^N_\omega(\mathbb{R}^N)}+\|\theta_0\|_{L^{N/3}_\omega(\mathbb{R}^N)}<\delta,\ \|\widetilde{\boldsymbol{u}}_0\|_{L^N_\omega(\mathbb{R}^N)}+\|\widetilde{\theta}_0\|_{L^{N/3}_\omega(\mathbb{R}^N)}<\delta;\tag{11}$$

而当$N=3$时, 式 (11) 中的$L^{N/3}_\omega(\mathbb{R}^N)$用$L^1(\mathbb{R}^3)$代替. 设$(\boldsymbol{u},\theta)$和$(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\theta})$是定理 1 中分别对应于初始值$(\boldsymbol{u}_0,\theta_0)$和$(\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,\widetilde{\theta}_0)$的温和解. 则对任意$\varepsilon>0$, 存在一个常数$\eta=\eta(N,p,q,\varepsilon)>0$使得初始值满足

$$\|\boldsymbol{u}_0-\widetilde{\boldsymbol{u}}_0\|_{L^N_\omega(\mathbb{R}^N)}+\|\theta_0-\widetilde{\theta}_0\|_{L^{N/3}_\omega(\mathbb{R}^N)}<\eta.\tag{12}$$

而当$N=3$时, 式 (12) 中的$L^{N/3}_\omega(\mathbb{R}^N)$用$L^1(\mathbb{R}^3)$代替, 那么有

$$\sup_{0<t<\infty}t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\|\boldsymbol{u}(t)-\widetilde{\boldsymbol{u}}(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}+\sup_{0<t<\infty}t^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\|\theta(t)-\widetilde{\theta}(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}<\varepsilon.\tag{13}$$

1 关键引理

首先引入如下定义的两个函数空间 X 和 Y:

$$X\equiv\{(\boldsymbol{u}_0,\theta_0);\boldsymbol{u}_0\in L^N_\omega(\mathbb{R}^N),\theta_0\in L^{N/3}_\omega(\mathbb{R}^N)\},$$

其范数定义为

$$\|(\boldsymbol{u}_0,\theta_0)\|_X\equiv\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^N_\omega(\mathbb{R}^N)}+\|\theta_0\|_{L^{N/3}_\omega(\mathbb{R}^N)};$$

$$Y\equiv\left\{(\boldsymbol{u},\theta);t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\boldsymbol{u}(\cdot)\in C_\omega([0,\infty);L^p(\mathbb{R}^N)),t^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\theta(\cdot)\in C_\omega([0,\infty);L^q(\mathbb{R}^N))\right\},$$

其范数定义为

$$\|(\boldsymbol{u},\theta)\|_Y\equiv\sup_{0<t<\infty}t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\|\boldsymbol{u}(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}+\sup_{0<t<\infty}t^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\|\theta(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)},$$

其中当$N=3$时, 在 X 中用$\theta_0\in L^1(\mathbb{R}^3)$代替$\theta_0\in L^{N/3}_\omega(\mathbb{R}^N)$. 赋予上述范数后 X 和 Y 均是Banach空间.

对$(\boldsymbol{u}_0,\theta_0)\in X$以及$(\boldsymbol{u},\theta)\in Y$, 定义映射

$$F(\boldsymbol{u}_0,\theta_0,\boldsymbol{u},\theta)\equiv\{\boldsymbol{U},\mathit{\Theta}\},\tag{14}$$

这里

$$\boldsymbol{U}(t)=\boldsymbol{u}(t)-\mathrm{e}^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0-\int_0^t\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}P(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\beta}\theta)(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\tag{15a}$$

$$\mathit{\Theta}(t)=\theta(t)-\mathrm{e}^{t\Delta}\theta_0-\int_0^t\mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta)(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\qquad 0<t<\infty.\tag{15b}$$

那么有下面的关键引理.

引理 1 假定空间维数$N\geqslant3$. 设指标p,q满足如下三个关系之一:

$$(\mathrm{i})\begin{cases}\dfrac{N}{3}<q<\dfrac{N}{2},N<p<\dfrac{Nq}{N-2q}, & N\geqslant4,\\[2mm] \dfrac{6}{5}<q<\dfrac{N}{2},\dfrac{q}{q-1}\leqslant p<\dfrac{Nq}{N-2q}, & N=3;\end{cases}$$

(ii) $q=N/2, N<p<\infty$;

(iii) $\dfrac{N}{2}<q<N, N<p<\dfrac{Nq}{2q-N}$.

则① 由式 (14) 定义的映射 F 是一个从 $X\times Y$ 到 Y 的连续映射; ② 对每一个初值$(\boldsymbol{u}_0,\theta_0)\in X$, 映射$F(\boldsymbol{u}_0,\theta_0,\cdot,\cdot)$是从 Y 到 Y 的C^1类映射.

证明　首先证明

$$t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\boldsymbol{U}(t)\in C_\omega([0,\infty);L^p).$$

基于热半群的L^p-L^N_ω估计, 有

$$\|e^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0\|_{L^p}\leqslant Ct^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^N_\omega},\tag{16}$$

其中$C=C(N,p)$, 因此$t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}e^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0\in C_\omega([0,\infty);L^p)$.

由引理 1 中p和q所满足的条件, 可得$q\leqslant p$, $1-\dfrac{N}{2}\left(\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}\right)>0$, $\dfrac{N}{2q}-\dfrac{1}{2}>0$. 因此当$t>0$时, 有

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}P(\boldsymbol{\beta}\theta)(\tau)\,d\tau\right\|_{L^p}\leqslant C\int_0^t\|e^{(t-\tau)\Delta}(\boldsymbol{\beta}\theta)(\tau)\|_{L^p}d\tau\leqslant\\&\quad\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\|\theta(\tau)\|_{L^q}d\tau\leqslant\\&\quad C\left(\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\|\theta(\tau)\|_{L^q}\right)\int_0^t(t-\tau)^{1-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-1}\tau^{-\frac{1}{2}+\frac{N}{2q}-1}d\tau=\\&\quad Ch\left(1-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right),\frac{N}{2q}-\frac{1}{2}\right)\left(\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\|\theta(\tau)\|_{L^q}\right)t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)},\end{aligned}\tag{17}$$

这里$C=C(N,p,q)$, 记号$h(s,t)(s>0,t>0)$表示beta函数:

$$h(s,t)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx.$$

需要说明的是, 在式 (17) 的第一个不等式中, 利用了投影算子 P 在$L^p(1<p<\infty)$上的有界性.

由于$1/2-N/(2p)>0$, 类似地, 对所有$t>0$, 有

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}P(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u})(\tau)\,d\tau\right\|_{L^p}\leqslant C\int_0^t\left\|\nabla\cdot e^{(t-\tau)\Delta}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})(\tau)\right\|_{L^p}d\tau\leqslant\\&\quad C\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{2}{p}-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}\|(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})(\tau)\|_{L^{p/2}}d\tau\leqslant\\&\quad C\left(\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|_{L^p}\right)^2\int_0^t(t-\tau)^{\frac{1}{2}-\frac{N}{2p}-1}\tau^{\frac{N}{p}-1}d\tau=\\&\quad Ch\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2p},\frac{N}{p}\right)\left(\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|_{L^p}\right)^2t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}.\end{aligned}\tag{18}$$

联立式 (15a)、(16)、(17) 及 (18), 得$t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\boldsymbol{U}(t)\in C_\omega([0,\infty);L^p)$, 且有

$$\begin{aligned}&\sup_{0<t<\infty}t^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\|\boldsymbol{U}(t)\|_{L^p}\leqslant C\|\boldsymbol{u}_0\|_{L^N_\omega}+C\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|_{L^p}+\\&\quad C\left(\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|_{L^p}\right)^2+C\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\|\theta(\tau)\|_{L^q}.\end{aligned}\tag{19}$$

下面证明$t^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\Theta(t)\in C_\omega([0,\infty);L^q)$. 事实上, 有

$$\|e^{t\Delta}\theta_0\|_{L^q}\leqslant Ct^{-\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\|\theta_0\|_{L^{N/3}_\omega},\tag{20}$$

上式中当$N=3$时, 用$L^1(\mathbb{R}^3)$代替$L_\omega^{N/3}(\mathbb{R}^N)$. 由于$\dfrac{2}{N}<\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\leqslant 1$以及$\dfrac{1}{2}-\dfrac{N}{2p}>0$, 则

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta)(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{L^q}\leqslant C\int_0^t\left\|\nabla \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}(\boldsymbol{u}\cdot\theta)(\tau)\right\|_{L^q}\mathrm{d}\tau\leqslant\\&\quad C\int_0^t(t-\tau)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|_{L^p}\|\theta(\tau)\|_{L^q}\mathrm{d}\tau\leqslant\\&\quad C\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|_{L^p}\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\|\theta(\tau)\|_{L^q}\times\int_0^t(t-\tau)^{\frac{1}{2}-\frac{N}{2p}-1}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)-2}\mathrm{d}\tau=\\&\quad Ch\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2p},\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)-1\right)\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|_{L^p}\times\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\|\theta(\tau)\|_{L^q}\cdot t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\end{aligned}\tag{21}$$

对所有$t>0$成立.

结合式 (15b)、(20) 及 (21) , 得$t^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\varTheta(t)\in C_\omega([0,\infty);L^q)$, 且对所有$t>0$有

$$\begin{aligned}&\sup_{0<t<\infty}t^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\|\varTheta(t)\|_{L^q}\leqslant C\|\theta_0\|_{L_\omega^{N/3}}+C\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\|\theta(\tau)\|_{L^q}+\\&\quad C\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|_{L^p}\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\|\theta(\tau)\|_{L^q}.\end{aligned}\tag{22}$$

基于式 (19) 和 (22), 得

$$F(\boldsymbol{u}_0,\theta_0,\boldsymbol{u},\theta)\equiv\{\boldsymbol{U},\boldsymbol{\varTheta}\}\in Y,$$

且存在$C=C(N,p,q)$, 使得

$$\|F(\boldsymbol{u}_0,\theta_0,\boldsymbol{u},\theta)\|_Y\leqslant C\|(\boldsymbol{u}_0,\theta_0)\|_X+C\|(\boldsymbol{u},\theta)\|_Y(1+\|(\boldsymbol{u},\theta)\|_Y),$$

这就意味着 F 是从 $X\times Y$ 到 Y 的连续映射.

下面证明映射 F 属于C^1类. 对任一$(\boldsymbol{u},\theta)\in Y$, 在 Y 上定义线性映射

$$L_{\{\boldsymbol{u},\theta\}}(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\theta})=(\widetilde{\boldsymbol{U}},\widetilde{\varTheta}),$$

其中

$$\begin{cases}\widetilde{\boldsymbol{U}}(t)=\widetilde{\boldsymbol{u}}(t)+\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}P(\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}})(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}P(\boldsymbol{\beta}\widetilde{\theta})(\tau)\mathrm{d}\tau,\\ \widetilde{\varTheta}(t)=\widetilde{\theta}(t)+\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}(\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\theta+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\widetilde{\theta})(\tau)\,\mathrm{d}\tau.\end{cases}\tag{23}$$

下面将证明对每个$\{\boldsymbol{u}_0,\theta_0\}\in X$, 线性算子$L_{\{\boldsymbol{u},\theta\}}$是$F(\boldsymbol{u}_0,\theta_0,\boldsymbol{u},\theta)$在$(\boldsymbol{u},\theta)\in Y$处的Fréchet导数.

定义$\{\mathfrak{U},\mathfrak{t}\}$为

$$\{\mathfrak{U},\mathfrak{t}\}\equiv F(\boldsymbol{u}_0,\theta_0,\boldsymbol{u}+\widetilde{\boldsymbol{u}},\theta+\widetilde{\theta})-F(\boldsymbol{u}_0,\theta_0,\boldsymbol{u},\theta)-L_{\{\boldsymbol{u},\theta\}}(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\theta}).$$

则有

$$\begin{aligned}\mathfrak{U}(t)=&\,\boldsymbol{u}(t)+\widetilde{\boldsymbol{u}}(t)-\mathrm{e}^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0+\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}P(\boldsymbol{u}+\widetilde{\boldsymbol{u}})\cdot\nabla(\boldsymbol{u}+\widetilde{\boldsymbol{u}})(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}P\boldsymbol{\beta}(\theta+\widetilde{\theta})(\tau)\mathrm{d}\tau-\\&\left(\boldsymbol{u}(t)-\mathrm{e}^{t\Delta}\boldsymbol{u}_0+\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}P(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u})(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}P(\boldsymbol{\beta}\theta)(\tau)\mathrm{d}\tau\right)-\\&\left(\widetilde{\boldsymbol{u}}(t)+\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}P(\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}})(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}P(\boldsymbol{\beta}\widetilde{\theta})(\tau)\mathrm{d}\tau\right)=\\&\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}P(\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\widetilde{\boldsymbol{u}})(\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{24}$$

$$\mathfrak{t}(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}(\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\widetilde{\theta})(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

由式 (18) 可知, 对所有$t>0$, 满足

$$\|\mathfrak{U}(t)\|_{L^p}\leqslant Ch\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2p},\frac{N}{p}\right)\left(\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\|\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{L^p}\right)^2 t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}. \tag{25}$$

同样由式 (21) 可知

$$\|\mathfrak{f}(t)\|_{L^q}\leqslant CB\left(\frac{1}{2}-\frac{N}{2p},\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)-1\right)\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{p}\right)}\|\widetilde{\boldsymbol{u}}(\tau)\|_{L^p}\sup_{0<\tau<\infty}\tau^{\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)}\|\widetilde{\theta}(\tau)\|_{L^q}\cdot t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{3}{N}-\frac{1}{q}\right)} \tag{26}$$

对所有$t>0$成立. 结合式 (25)、(26), 对任意$(\boldsymbol{u}_0,\theta_0)\in X$及任意$(\boldsymbol{u},\theta)\in Y$, 有

$$\lim_{\|(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\theta})\|_Y\to 0}\frac{\|(\mathfrak{U},\mathfrak{f})\|_Y}{\|(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\theta})\|_Y}=\lim_{\|(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\theta})\|_Y\to 0}\left(\|F(\boldsymbol{u}_0,\theta_0,\boldsymbol{u}+\widetilde{\boldsymbol{u}},\theta+\widetilde{\theta})-F(\boldsymbol{u}_0,\theta_0,\boldsymbol{u},\theta)-L_{\{\boldsymbol{u},\theta\}}(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\theta})\|_Y\right)/\|(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\theta})\|_Y=0.$$

这蕴含 F 在点$(\boldsymbol{u}_0,\theta_0,\boldsymbol{u},\theta)\in X\times Y$处, 沿着方向$(\boldsymbol{u},\theta)$的Fréchet导数是$L_{\{\boldsymbol{u},\theta\}}(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\theta})$. 引理 1 证毕.

2　主要结果的证明

定理 1 的证明　首先证明线性算子$L_{\{\boldsymbol{u},\theta\}}$在$(\boldsymbol{u},\theta)=(\boldsymbol{0},0)$点处是双射. 由式 (23) 可知, 对$(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\theta})\in Y$, 线性算子$L_{\{\boldsymbol{0},0\}}(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\theta})=(\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,\widetilde{\Theta}_0)$ 可表示为

$$\begin{cases}\widetilde{\boldsymbol{U}}_0(t)=\widetilde{\boldsymbol{u}}(t)+\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}P(\boldsymbol{\beta}\widetilde{\theta})(\tau)\mathrm{d}\tau,\\ \widetilde{\Theta}_0(t)=\widetilde{\theta}(t),\end{cases}$$

这里$(\widetilde{\boldsymbol{U}}_0(t),\widetilde{\Theta}_0(t))=(\boldsymbol{0},0)$蕴含$(\widetilde{\boldsymbol{u}}(t),\widetilde{\theta}(t))=(\boldsymbol{0},0)$, 这就意味着$L_{\{\boldsymbol{0},0\}}$是单射.

对任一$(\widetilde{\boldsymbol{U}}_0,\widetilde{\Theta}_0)\in Y$, 可取

$$\begin{cases}\widetilde{\boldsymbol{u}}(t)=\widetilde{\boldsymbol{U}}_0(t)-\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)\Delta}P(\boldsymbol{\beta}\widetilde{\Theta}_0)(\tau)\mathrm{d}\tau,\\ \widetilde{\theta}(t)=\widetilde{\Theta}_0(t).\end{cases}$$

则$(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\theta})$满足$L_{\{\boldsymbol{0},0\}}(\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\theta})=(\widetilde{\boldsymbol{U}}_0,\widetilde{\Theta}_0)$. 从引理 1 的证明可知$L_{\{\boldsymbol{0},0\}}$是从 Y 到 Y 的满射.

利用隐函数定理可知, 存在常数$\delta(N,p,q)>0$及如下定义的C^1类映射g:

$$g: X_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(\boldsymbol{u}_0,\theta_0)\in X;\|(\boldsymbol{u}_0,\theta_0)\|_X<\delta\}\to Y_\delta \stackrel{\text{def}}{=} \{(\boldsymbol{u},\theta)\in Y;\|(u,\theta)\|_Y<\delta\},$$

使得对所有$(\boldsymbol{u}_0,\theta_0)\in X_\delta$, 有

$$g(\boldsymbol{0},0)=(\boldsymbol{0},0),\ \ F(\boldsymbol{u}_0,\theta_0,g(\boldsymbol{u}_0,\theta_0))=(\boldsymbol{0},0).$$

因此, 由条件 (5)、(6), 泛函$g(\boldsymbol{u}_0,\theta_0)$给出了系统 (2) 满足式 (7)、(8) 的唯一解.

若系统 (2) 满足式 (7)、(8) 的解$(\boldsymbol{u},\theta)$在 Y 上的范数很小时, 根据映射h是从X_δ到Y_δ的C^1类映射, 可以得出解$(\boldsymbol{u},\theta)$的唯一性. 另外式 (9)、(10) 的渐近性可分别从估计式 (17)、(18) 及 (21) 得到. 至此定理 1 证毕.

定理 2 的证明　由于映射$h: X_\delta\to Y_\delta$是连续的, 所以当初始值满足式 (12) 时, 可以得到式 (13) 的稳定性估计. 至此我们完成了定理 2 的证明.

3　结　　论

Boussinesq 方程作为描述许多地球物理现象的模型, 是 Navier-Stokes 方程与热力学方程之间耦合的零阶近似. 本文利用隐函数定理, 得到了高维具黏性的 Boussinesq 系统温和解的全局适定性, 即解的存在唯一性及稳定性, 其中, 系统的初值位于尺度不变意义下的弱 Lebesgue 空间且具有小性.

参考文献(References):

[1]　GILL A E, ADRIAN E. *Atmosphere-Ocean Dynamics*[M]. San Diego: Academic Press, 1982.

[2]　CÓRDOBA D, FEFFERMAN C, LLAVE R D L. On squirt singularities in hydrodynamics[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2004, **36**(1): 204-213.

[3] MAJDA A. *Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean*[M]. American Mathematical Society, 2003.

[4] PEDLOSKY J, ROBERSON J S. Geophysical fluid dynamics by Joseph Pedlosky[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1988, **83**(3): 1207.

[5] PEDLOSKY J. *Geophysical Fluid Dynamics*[M]. New York: Springer-Verlag, 1987.

[6] 郭连红, 李远飞. 大尺度湿大气原始方程组对边界参数的连续依赖性[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(9): 1036-1047.(GUO Lianhong, LI Yuanfei. Continous dependence on boundary parameters of the original equations for large-scale wet atmosphere[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(9): 1036-1047.(in Chinese))

[7] 施惟慧, 王曰朋. Navier-Stokes方程的奇异性对大气运动方程组的影响[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(5): 614-618.(SHI Weihui, WANG Yuepeng. Impact of singularity of Navier-Stokes equation upon the atmospheric motion equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, **28**(5): 614-618.(in Chinese))

[8] ABIDI H, HMIDI T. On the global well-posedness for Boussinesq system[J]. *Journal of Differential Equations*, 2007, **233**(1): 199-220.

[9] CHAE D. Global regularity for the 2D Boussinesq equations with partial viscosity terms[J]. *Advances in Mathematics*, 2006, **203**(2): 497-513.

[10] CANNON J R, DIBENEDETTO E. The inital value problem for the Boussinesq equations with data in L^p[M]//RAUTMANN R. *Approximation Methods for Navier-Stokes Problems*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1980: 129-144.

[11] DANCHIN R, PAICU M. Existence and uniqueness results for the Boussineq system with data in Lorentz spaces[J]. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, 2008, **237**(10/12): 1444-1460.

[12] DANCHIN R, PAICU M. Global well-posedness issue for the inviscid Boussineq system with Youdovich's type data[J]. *Communications in Mathematical Physics*, 2009, **290**: 1-14.

[13] HISHIDA T. On a class of stable steady flows to the exterior convection problem[J]. *Journal of Differential Equations*, 1997, **141**(1): 54-85.

[14] SAWADA O, TANIUCHI Y. On the Boussinesq flow with nondecaying initial data[J]. *Funkcialaj Ekvacioj*, 2004, **47**(2): 225-250.

[15] BRANDOLESE L, SCHONBEK M. Large time decay and growth for solutions of a viscous Boussinesq system [J]. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2012, **364**(10): 5057-5090.

[16] KARCH G, PRIOUX N. Self-similarity in viscous Boussinesq equations[J]. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2008, **136**(3): 879-888.

[17] KOZONO H, MIURA M, SUGIYAMA Y. Existence and uniqueness theorem on mild solutions to the Keller-Segel system coupled with the Navier-Stokes fluid[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2016, **270**(5): 1663-1683.

[18] TAN Z, WU W, ZHOU J. Existence and uniqueness of mild solutions to the magneto-hydro-dynamic equations [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2018, **77**: 27-34.

[19] ZHANG Q, DENG X, BIE Q. Existence and uniqueness of mild solutions to the incompressible nematic liquid crystal flow[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2019, **77**(9): 2489-2498.

[20] CANNONE M. Harmonic analysis tools for solving the incompressible Navier-Stokes equations[M]//FRIEDLANDER S, SERRE D. *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*: Vol **3**. Amsterdam, North-Holland: Elsevier, 2004: 161-244.