

### 基于PDE灵敏度滤波器的算法研究

孟换利, 张岐良, 王杰

#### Algorithm Research Based on the PDE Sensitivity Filter

MENG Huanli, ZHANG Qiliang, and WANG Jie

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.430064>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 基于磨光反演映射的拓扑优化ICM方法

An ICM Method for Topology Optimization Based on Polished Inverse Mapping

应用数学和力学. 2018, 39(4): 424-441 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380052>

#### 拓扑优化技术在抑制流体晃荡中的数值模拟研究

Numerical Simulation of Topology Optimization Technique for Tank Sloshing Suppression

应用数学和力学. 2021, 42(1): 49-57 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410206>

#### 基于参数化水平集法的材料非线性子结构拓扑优化

Topology Optimization of Nonlinear Material Structures Based on Parameterized Level Set and Substructure Methods

应用数学和力学. 2021, 42(11): 1150-1160 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.420090>

#### 基于增秩Kalman滤波的动态荷载识别和结构响应重构

Dynamic Load Identification and Structural Response Reconstruction Based on the Augmented Kalman Filter

应用数学和力学. 2021, 42(7): 665-674 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410252>

#### 基于SA-GA混合算法的动车组车辆轮重分配优化

Optimization of Wheel Weight Distribution for EMU Vehicles Based on the SAGA Hybrid Algorithm

应用数学和力学. 2021, 42(4): 363-372 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410107>

#### 基于比例边界有限元法和灰狼优化算法的裂纹尖端位置识别

Identification of Crack Tip Positions Based on the Scaled Boundary Finite Element Method and the Grey Wolf Optimization Algorithm

应用数学和力学. 2021, 42(11): 1177-1189 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410381>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

# 基于 PDE 灵敏度滤波器的算法研究\*

孟换利<sup>1</sup>, 张岐良<sup>1</sup>, 王杰<sup>2</sup>

(1. 中山大学 系统科学与工程学院, 广州 510006;  
2. 天津航天长征火箭制造有限公司, 天津 300462)

**摘要:** 采用 PDE 灵敏度滤波器可以消除连续体结构拓扑优化结果存在的棋盘格现象、数值不稳定等问题, 且 PDE 灵敏度滤波器的实质是具有 Neumann 边界条件的 Helmholtz 偏微分方程. 针对大规模 PDE 灵敏度滤波器的求解问题, 有限元分析得到其代数方程, 分别采用共轭梯度算法、多重网格算法和多重网格预处理共轭梯度算法对代数方程进行求解, 并且研究精度、过滤半径以及网格数量对拓扑优化效率的影响. 结果表明: 与共轭梯度算法和多重网格算法相比, 多重网格预处理共轭梯度算法迭代次数最少, 运行时间最短, 极大地提高了拓扑优化效率.

**关键词:** PDE 滤波器; Helmholtz 方程; 多重网格算法; 共轭梯度算法; 拓扑优化  
**中图分类号:** O241.82 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430064

## Algorithm Research Based on the PDE Sensitivity Filter

MENG Huanli<sup>1</sup>, ZHANG Qiliang<sup>1</sup>, WANG Jie<sup>2</sup>

(1. School of Systems Science and Engineering, SUN Yat-Sen University, Guangzhou 510006, P.R.China;  
2. Tianjin Aerospace Long March Rocket Manufacturing Co. Ltd., Tianjin 300462, P.R.China)

**Abstract:** The PDE sensitivity filter can eliminate the checkerboard patterns and numerical instability existing in the topology optimization results of continuum structures, and the essence of the PDE sensitivity filter is the Helmholtz partial differential equation with Neumann boundary conditions. To solve the large-scale PDE sensitivity filter problem, the conjugate gradient algorithm, the multigrid algorithm and the multigrid preconditioned conjugate gradient algorithm were used to solve the algebraic equations obtained by finite element analysis, and the effects of accuracy, filter radius and grid numbers on the efficiency of topology optimization were studied. The results show that, compared with the conjugate gradient algorithm and the multi-grid algorithm, the multi-grid preconditioned conjugate gradient algorithm has the least number of iterations and the shortest running time, which greatly improves the efficiency of topology optimization.

**Key words:** PDE filter; Helmholtz equation; multigrid algorithm; conjugate gradient algorithm; topology optimization

## 引 言

为应对越来越高的力学性能要求和越来越严酷的服役环境, 在结构设计中应用拓扑优化技术已成为一种必然选择. 在结构的概念设计阶段通过结构拓扑优化确定材料的最优布局形式, 可以帮助设计者发现结构最佳的应力传导路径, 从而以最少的材料实现最优的结构性能. Deaton 和 Grandhi<sup>[1]</sup> 调查了 2000 年至 2012 年连

\* 收稿日期: 2022-03-01; 修订日期: 2022-12-15

基金项目: 中央高校基本科研业务费(76210-31610007)

作者简介: 孟换利(1995—), 女, 硕士生(E-mail: [menghli@mail2.sysu.edu.cn](mailto:menghli@mail2.sysu.edu.cn));

张岐良(1985—), 男, 助理教授, 博士, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: [zhangqiliang@mail.sysu.edu.cn](mailto:zhangqiliang@mail.sysu.edu.cn)).

引用格式: 孟换利, 张岐良, 王杰. 基于 PDE 灵敏度滤波器的算法研究[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(1): 80-92.

续体结构拓扑优化的研究现状与应用. Zhu 等<sup>[2]</sup>综述了面向增材制造的拓扑优化技术的典型应用场景、研究热点和挑战. 卫志军等<sup>[3]</sup>对双隔板进行了拓扑优化, 可以有效地抑制流体晃荡.

然而, 连续体结构的拓扑优化结果往往存在棋盘格现象、数值不稳定等问题, Sigmund<sup>[4]</sup>以及 Bruns、Tortorelli<sup>[5]</sup>使用的灵敏度过滤器和密度过滤器可以有效地解决上述问题. 研究者们在此基础上发展了多种过滤方法, 如灰度单元等效转换方法<sup>[6]</sup>、动态参数调整方法<sup>[7]</sup>和灰度单元分层双重惩罚方法<sup>[8]</sup>等. 上述方法在一定程度上可以有效地抑制灰度单元、消除棋盘格现象, 防止边界灰度扩散, 但没有关注过滤效率. 与通过获取邻域的单元信息来修正中心单元的灵敏度过滤器不同, PDE 滤波器的实质是将灵敏度过滤值表示成 Neumann 边界条件下的 Helmholtz 方程的解, 其求解只需考虑有限元离散的网格信息, 避免了占用大量内存, 极大地提高了过滤效率. 然而随着网格的不断细分, 该滤波器的代数方程维数越来越高, 采用以 Gauss 消元法为基础的直接法求解, 会导致耗时过长和内存需求量增加等问题, 从而影响该滤波器的效率. 此外, 随着计算机性能的提高和算法技术的发展, 精细的数值模拟成为可能, 使得待求解的线性方程组的维数越来越高, 研发高效的线性求解器加速算法<sup>[9-11]</sup>已变得至关重要.

多重网格是一种高效的求解算法, 近期在偏微分方程参数反演问题方面有许多应用<sup>[12-13]</sup>, 并广泛地应用到图像处理<sup>[14]</sup>、流体模拟<sup>[15]</sup>和结构拓扑优化<sup>[16-17]</sup>等领域. 为提高大规模结构拓扑优化灵敏度过滤的效率, 本文基于体积约束下柔度值最小的固体各向同性惩罚微结构 (SIMP) 插值模型, 针对大规模 PDE 灵敏度滤波器的求解问题, 对其进行有限元分析得到代数方程, 再采用共轭梯度算法、多重网格算法以及多重网格预处理共轭梯度算法进行求解, 得到了过滤域的节点灵敏度值, 通过节点到单元的映射得到了单元灵敏度过滤值.

## 1 优化模型

在变密度法中, SIMP 模型是目前工程领域应用最广泛的材料插值模型, 为了使模型更具有代表性, 基于 SIMP 插值模型, 建立在体积约束下柔度值最小的连续体结构拓扑优化模型:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min C = \mathbf{F}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} = \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^N (\mathbf{E}_{\min} + x_i^p (\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_{\min})) \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_i, \\ \text{s.t. } V = fV_0 = \sum_{i=1}^N x_i v_i \leq V^*, \\ \mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U}, \\ 0 < x_{\min} \leq x_i \leq x_{\max} \leq 1, \end{array} \right. \quad (1)$$

其中, 目标函数  $C$  为结构的总体柔度,  $\mathbf{F}$  为力向量,  $\mathbf{U}$  为位移,  $\mathbf{K}$  为结构的总刚度矩阵,  $x_i$  和  $\mathbf{u}_i$  是第  $i$  个单元的相对密度和节点位移,  $\mathbf{k}_i$  和  $\mathbf{k}_0$  是单元刚度矩阵,  $V$  是优化后的结构体积,  $V^*$  为结构体积约束,  $V_0$  为整个设计域的初始体积,  $f$  为优化体积比,  $v_i$  为第  $i$  个单元的体积,  $x_{\min}$  和  $x_{\max}$  为单元相对密度的最小和最大极限值,  $N$  为结构离散单元总数.

SIMP 法又称幂律法, 其材料插值模型以密度为设计变量, 单元材料弹性模量和密度之间的关系为

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{\min} + x_i^p (\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}_{\min}), \quad (2)$$

其中  $\mathbf{E}_0$  和  $\mathbf{E}_{\min}$  是固体和空洞部分的材料弹性模量,  $\mathbf{E}_i$  为第  $i$  个单元插值后的弹性模量.

## 2 拓扑优化算法

### 2.1 总体框架

连续体结构拓扑优化实现流程如图 1 所示. 首先, 初始化优化参数: 定义问题的设计区域、约束和载荷. 其次, 建立有限元模型: 划分有限元网格, 将结构离散化, 建立式 (1) 所示的连续体结构拓扑优化数学模型. 另外, 有限元分析: 计算刚度矩阵、节点位移、目标柔度值和灵敏度. 之后, PDE 灵敏度过滤: 解决数值不稳定问题和消除棋盘格现象. 然后, 采用二分法和 OC 准则更新 Lagrange 乘子和设计变量, 判断是否满足体积约束条件: 满足则输出设计变量; 若不满足, 则回到上一步再次更新 Lagrange 乘子和设计变量. 最后, 检查是否满足收敛准则: 若满足, 则输出拓扑优化结果; 若不满足, 则再次进行有限元分析, 进行下一轮迭代.

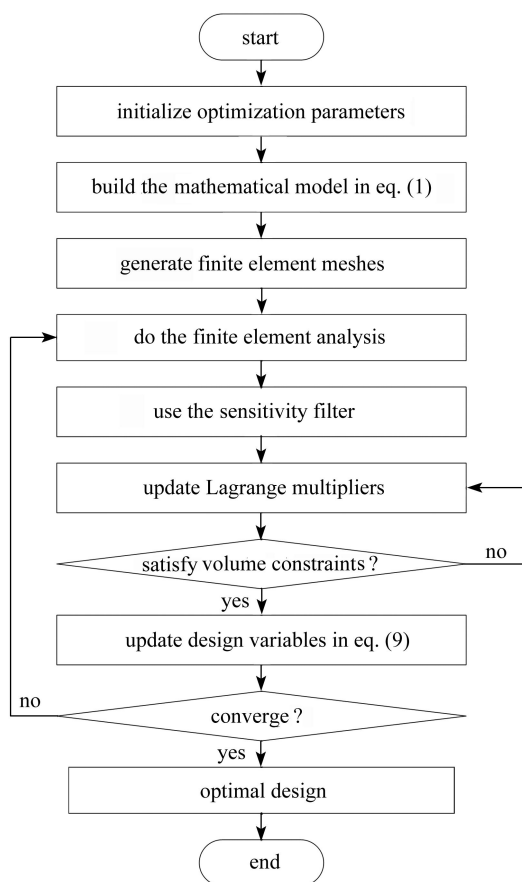


图1 基于 SIMP 插值模型连续体结构拓扑优化实现流程图

Fig. 1 The flow chart of continuum structure topology optimization based on the SIMP interpolation model

为解决传统 PDE 灵敏度滤波器过滤慢的问题, 本文采用共轭梯度算法求解该滤波器的对称正定代数方程, 为进一步解决网格数量增加导致系数矩阵维数增加和趋近最优解时, 该算法收敛速度减缓的问题, 结合多重网格可以均匀衰减误差, 加快算法收敛速度的优点, 使用多重网格算法和预处理共轭梯度算法求解该方程, 提升过滤效率. 此外, 在预处理共轭梯度算法中, 采用多重网格预处理降低系数矩阵的条件数.

## 2.2 PDE 灵敏度滤波器

本文采用 PDE 灵敏度滤波器<sup>[18-19]</sup>, 其核心思想是将过滤域的节点灵敏度值隐式表示为具有 Neumann 边界条件的 Helmholtz 方程的隐式解, 然后通过节点到单元的映射得到单元灵敏度过滤结果:

$$\begin{cases} -R_{\min}^2 \nabla^2 \tilde{\varphi} + \tilde{\varphi} = \varphi, \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\varphi = x \frac{\partial c}{\partial x}$ ,  $\tilde{\varphi} = x \frac{\partial \tilde{c}}{\partial x}$ ,  $x$  是单元相对密度,  $\frac{\partial c}{\partial x}$  和  $\frac{\partial \tilde{c}}{\partial x}$  是过滤前后的灵敏度,  $\mathbf{n}$  是边界的法向量,  $R_{\min}$  是长度参数, 用来确定过滤区域, 它与标准的过滤半径  $r_{\min}$  之间满足的关系为

$$R_{\min} = \frac{r_{\min}}{2\sqrt{3}}. \quad (4)$$

## 2.3 PDE 灵敏度滤波器的求解

PDE 灵敏度滤波器的实质是以 Neumann 边界为条件的 Helmholtz 偏微分方程, 其求解步骤如下:

第 1 步 有限元离散得到 Helmholtz 方程 (3) 的代数方程:

$$\mathbf{K}_F \tilde{\mathbf{x}}_N = \mathbf{T}_F \left( x \frac{\partial c}{\partial x} \right), \quad (5)$$

其中  $\mathbf{K}_F$  是标量问题的标准有限元刚度矩阵,  $\mathbf{T}_F$  是将单元相对密度映射到具有节点值的向量的矩阵. 针对代数方程 (5) 的系数矩阵是对称正定稀疏病态的特点, 本文拟采用共轭梯度算法、多重网格算法和多重网格预处理共轭梯度算法求解该代数方程, 从而得到过滤区域内的节点灵敏度值  $\tilde{x}_N$ .

第 2 步 通过对过滤域的节点灵敏度值映射得到单元灵敏度过滤值:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_F^T \tilde{x}_N. \tag{6}$$

### 2.3.1 多重网格算法

在固定网格中采用常规的迭代方法求解线性方程组, 初始时收敛速度很快, 趋近最优解时, 收敛速度慢, 计算时间长. 采用 Fourier 级数表示误差, 得到两种不同的误差: 波长较短、波形频率高的高频分量误差和波长较长、波形频率低的低频分量误差. 由于波形频率的高低是相对的, 把细网格中的低频波形放到粗网格中就有可能变成高频波形. 因此采用多重网格来消除误差分量, 使各种频率的误差得到比较均匀的衰减, 从而加快迭代收敛速度. 假设有  $L$  重网格,  $k=1$  为最细的网格层,  $\mathbf{u}_k^{m+1}$  是  $\mathbf{A}_k \mathbf{u}_k^m = \mathbf{f}_k$  在  $k$  层上的多重网格迭代解, 多重网格 V 循环具体过程如下(伪代码见算法 1):

步骤 1 前光滑. 采用常规的迭代方法消除误差高频分量, 具体步骤为: 在细网格上, 采取 2~3 次的阻尼 Jacobi 迭代方法得到线性方程组  $\mathbf{A}_k \mathbf{u}_k^m = \mathbf{f}_k$  的近似解. 迭代公式的通式为

$$\mathbf{u}_k^{m+1} = \mathbf{u}_k^m + \mathbf{S}_k^{-1}(\mathbf{f}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{u}_k^m), \tag{7}$$

其中  $\mathbf{S}_k$  为光滑子,  $\mathbf{S}_k = \omega \mathbf{D}_k$ ,  $\omega$  为阻尼因子,  $\mathbf{D}_k$  为  $\mathbf{A}_k$  的主对角元素矩阵.

步骤 2 粗网格校正. 计算在粗网格上误差的近似解, 具体步骤为: 首先计算细网格上的残差  $\mathbf{r}_k^m = \mathbf{f}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{u}_k^m$ ; 然后使用限制算子  $\mathbf{R}_k^{k+1}$  把细网格上的残差限制到粗网格上, 得到粗网格上的残差  $\mathbf{r}_{k+1}^m = \mathbf{R}_k^{k+1} \mathbf{r}_k^m$ ; 最后根据网格的层数求解线性方程组  $\mathbf{A}_{k+1} \tilde{\mathbf{e}}_{k+1}^m = \mathbf{R}_k^{k+1} \mathbf{r}_k^m$  得到粗网格上误差的近似解, 若是最粗的网格层, 则利用直接法求解  $\tilde{\mathbf{e}}_{k+1}^m = \mathbf{A}_{k+1}^{-1} \mathbf{r}_{k+1}^m$ , 否则利用多重网格 V 循环求解  $\tilde{\mathbf{e}}_{k+1}^m = \mathbf{V} \cdot \text{cycle}(\mathbf{A}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}^m, 0, k+1)$ , 其中粗网格算子  $\mathbf{A}_{k+1}$  取 Galerkin 算子  $\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{R}_k^{k+1} \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k+1}^k$ .

步骤 3 插值. 计算细网格上的解, 具体步骤为: 先使用插值算子  $\mathbf{P}_{k+1}^k$  把粗网格上的近似误差插值到细网格上  $\mathbf{P}_{k+1}^k \tilde{\mathbf{e}}_{k+1}^m = \tilde{\mathbf{e}}_k^m$ , 然后使用公式  $\mathbf{u}_k^{m+1} = \mathbf{u}_k^m + \tilde{\mathbf{e}}_k^m$  得到在细网格的解. 本文采用的插值算子  $\mathbf{P}_{k+1}^k$  为

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_{k+1}^k \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

限制算子为  $\mathbf{P}_{k+1}^k = (\mathbf{P}_{k+1}^k)^T$ , 其中  $u_1, u_2, u_3, u_4$  是粗网格上的节点,  $v_i (i = 1, 2, \dots, 9)$  是细网格上的节点.

步骤 4 后光滑. 为保证整个迭代对称, 在细网格上, 采取具有相同参数的阻尼 Jacobi 迭代法求解线性方程组  $\mathbf{A}_k \mathbf{u}_k^{m+1} = \mathbf{f}_k$ , 即  $\mathbf{u}_k^{m+1} = \mathbf{u}_k^m + \mathbf{S}_k^{-1}(\mathbf{f}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{u}_k^{m+1})$ .

#### 算法 1

- 1 input:
- 2 level  $k$ ;
- 3 initial guess  $\mathbf{u}_k^m$ ;
- 4 right hand side vector  $\mathbf{f}_k$ ;
- 5 coefficient matrix under level  $k$  grid  $\mathbf{A}_k$ ;
- 6 output:

- 7 updated solution  $\mathbf{u}_k^{m+1}$
- 8 pre-smooth:  $\mathbf{u}_k^{m+1} = S^{\mu_1}(\mathbf{A}_k, \mathbf{f}_k, \mathbf{u}_k^m)$
- 9 coarse grid correction:
- 10 compute residual:  $\mathbf{r}_k^m = \mathbf{f}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{u}_k^m$
- 11 restrict the residual to coarse-grid:  $\mathbf{r}_{k+1}^m = \mathbf{R}_k^{k+1} \mathbf{r}_k^m$
- 12 if  $k+1=L$  then
- 13 solve approximate error solution  $\tilde{\mathbf{e}}_{k+1}^m = \mathbf{A}_{k+1}^{-1} \mathbf{r}_{k+1}^m$
- 14 else
- 15  $\tilde{\mathbf{e}}_{k+1}^m = V \cdot \text{cycle}(\mathbf{A}_{k+1}, \mathbf{r}_{k+1}^m, 0, k+1)$
- 16 end
- 17 interpolate:
- 18  $\tilde{\mathbf{e}}_k^m = \mathbf{P}_{k+1}^k \tilde{\mathbf{e}}_{k+1}^m$
- 19  $\mathbf{u}_k^{m+1} = \mathbf{u}_k^{m+1} + \tilde{\mathbf{e}}_k^m$
- 20 post-smooth:
- 21  $\mathbf{u}_k^{m+1} = S^{\mu_2}(\mathbf{A}_k, \mathbf{f}_k, \mathbf{u}_k^{m+1})$ .

### 2.3.2 多重网格预处理共轭梯度算法

考虑到代数方程的系数矩阵是大型、稀疏、对称正定的,有时甚至为病态的,则重点研究了多重网格预处理共轭梯度算法(伪代码见算法2),采用多重网格作为预处理方法降低系数矩阵的条件数.

#### 算法2

input:

symmetric positive definite coefficient matrix  $\mathbf{A}$ ;

right hand side vector  $\mathbf{b}$ ;

initiate a guess for  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

output:

solution  $\mathbf{x}$ ;

- 1 compute the residual on the finest grid  $\mathbf{r}_0 \triangleq \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$ ;
- 2 for  $i = 1, 2, 3, \dots$  do
- 3 solve  $\mathbf{A}\mathbf{z}_0 = \mathbf{r}_0$  by the multigrid V-cycle algorithm
- 4 initialize  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{z}_0$
- 5 compute a step length the  $\alpha_i = (\mathbf{r}_{i-1}^T \mathbf{z}_{i-1}) / (\mathbf{p}_{i-1}^T \mathbf{A} \mathbf{p}_{i-1})$   
(where  $\mathbf{z}_{i-1}$  can be solved by the multigrid V-cycle algorithm)
- 6 update the approximate solution  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{p}_{i-1}$
- 7 update the residual  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \alpha_i \mathbf{A} \mathbf{p}_{i-1}$
- 8 solve  $\mathbf{A}\mathbf{z}_i = \mathbf{r}_i$  by the multigrid V-cycle algorithm
- 9 compute a gradient correction factor  $\beta_i = (\mathbf{r}_i^T \mathbf{z}_i) / (\mathbf{r}_{i-1}^T \mathbf{z}_{i-1})$
- 10 set the new search direction  $\mathbf{p}_i = \mathbf{z}_i + \beta_i \mathbf{p}_{i-1}$
- 11 end
- 12 until convergence.

### 2.4 设计变量的更新

优化准则法(OC 准则)具有收敛速度快、易于实现等特点, 本文采取 OC 准则求解优化模型 (1), 基本思路为, 先引入 Lagrange 乘子把约束问题 (1) 转化为无约束问题, 再根据极值点存在的条件即 K-T 条件以及不动点迭代得到设计变量的迭代公式为

$$(x_i)^{k+1} = \begin{cases} \min\{(x_i)^k + m, 1\}, & (x_i)^k (D_i^{(k)})^\eta \geq \min\{(x_i)^k + m, 1\}, \\ (x_i)^k (D_i^{(k)})^\eta, & \max\{(x_i)^k - m, x_{\min}\} \leq (x_i)^k (D_i^{(k)})^\eta < \min\{(x_i)^k + m, 1\}, \\ \max\{(x_i)^k - m, x_{\min}\}, & (x_i)^k (D_i^{(k)})^\eta < \max\{(x_i)^k - m, x_{\min}\}, \end{cases} \quad (9)$$

其中  $(D_i^{(k)})^\eta = \frac{p(x_i)^{p-1} \mathbf{u}_i^T \mathbf{k}_0 \mathbf{u}_i}{\mu v_i}$ ,  $\eta$  为阻尼因子,  $m$  为移动极限。

### 2.5 收敛准则

包括外循环和内循环, 外循环包括有限元分析和更新单元灵敏度, 迭代收敛条件如下:

$$|x_{\max}^{(k+1)} - x_{\max}^{(k)}| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 0.01, \quad (10)$$

其中  $\varepsilon$  为收敛控制因子,  $x_{\max}^{(k)}$  和  $x_{\max}^{(k+1)}$  分别为第  $k$  次和第  $k+1$  次设计变量最大值。

内循环包括更新设计变量、Lagrange 乘子和过滤域的节点值。采用二分法和 OC 准则更新 Lagrange 乘子和设计变量, 以满足模型 (1) 中的体积约束和设计变量的边界约束, 迭代收敛条件如下:

$$\frac{l_2 - l_1}{l_2 + l_1} \leq \eta, \quad \eta = 0.001, \quad (11)$$

其中  $\eta$  为收敛控制因子,  $l_2$  和  $l_1$  为较大和较小的 Lagrange 乘子。采用共轭梯度算法、多重网格算法以及多重网格预处理共轭梯度算法求解代数方程, 构造迭代收敛准则为

$$\frac{\|\mathbf{r}_k\|_2}{\|\mathbf{r}_0\|_2} \leq \tau, \quad (12)$$

其中  $\tau$  为收敛控制因子,  $\mathbf{r}_k$  和  $\mathbf{r}_0$  为第  $k$  次和初始时代数方程的残量。

## 3 数值算例

为了验证本文拓扑优化方法的可行性、可靠性和高效性, 针对长 960 mm、高 320 mm 的悬臂梁和长 960 mm、高 480 mm Michell 结构的棋盘格现象、数值不稳定、灵敏度过滤慢等问题开展了数值实验, 如图 2 和 3 所示 (算例优化参数为体积约束比为 0.5、弹性模量为 1 GPa、Poisson 比为 0.3、惩罚因子为 3、移动极限为 0.2、外载荷  $F$  为 1 kN)。拓扑优化程序基于文献 [16,20] 的 MATLAB 代码进行编写, 在 PDE 滤波器的求解中引入了共轭梯度(CG)算法、多重网格(MG)算法以及多重网格预处理共轭梯度(MGCG)算法, 并比较了三种算法对结构拓扑优化效率的影响, 相关数值结果如下。

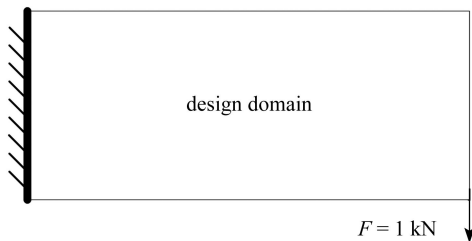


图 2 悬臂梁  
Fig. 2 The cantilever beam

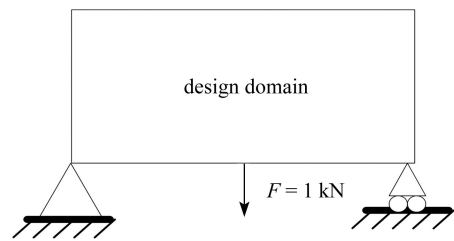


图 3 Michell 结构  
Fig. 3 The Michell structure

### 3.1 精度的影响

依次取 4 种不同的误差精度  $P(P=1E-2, 1E-3, 1E-4, 1E-5)$ , 采用 CG 算法、网格层数为 5 的 MG 算法和 MGCG 算法求解经有限元分析 Helmholtz 方程得到的代数方程, 并对整个结构分别划分为  $480 \times 160$  和  $480 \times 240$  个单元的悬臂梁和 Michell 结构进行半径为 6 的 PDE 灵敏度过滤拓扑优化实验。其中, 不同精度下悬

臂梁和 Michell 结构的优化结构、目标柔度值  $C$ 、整体迭代次数  $I$  以及整体优化时间  $T$  的分布如图 4、图 5、表 1、图 6、图 7 所示。

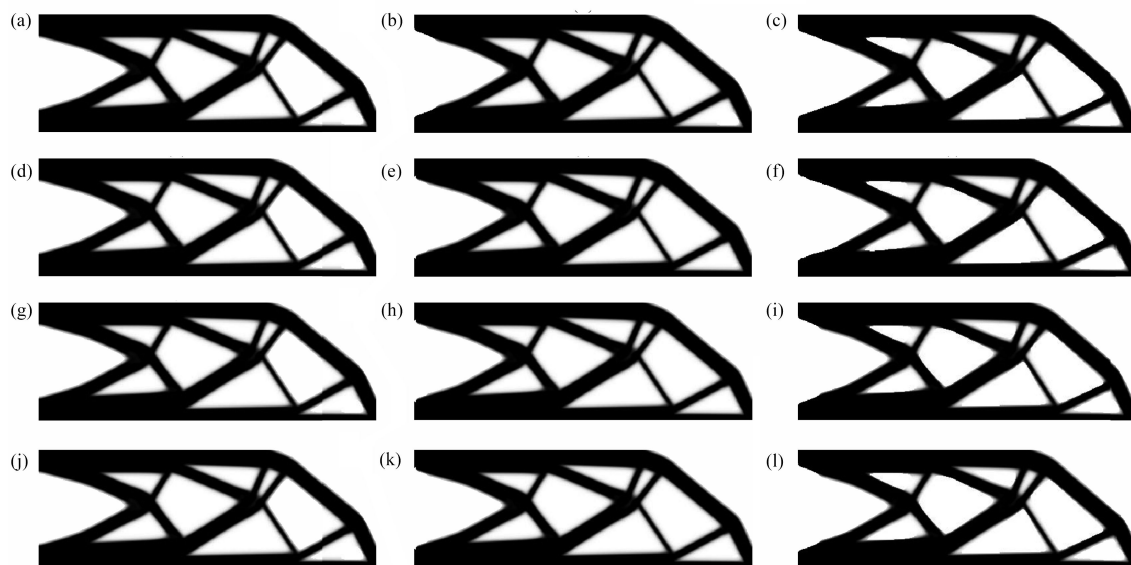


图 4 不同精度下 CG、MG 和 MGCG 算法的悬臂梁的优化结构: (a)  $P=1E-2$  (CG); (b)  $P=1E-2$  (MG); (c)  $P=1E-2$  (MGCG); (d)  $P=1E-3$  (CG); (e)  $P=1E-3$  (MG); (f)  $P=1E-3$  (MGCG); (g)  $P=1E-4$  (CG); (h)  $P=1E-4$  (MG); (i)  $P=1E-4$  (MGCG); (j)  $P=1E-5$  (CG); (k)  $P=1E-5$  (MG); (l)  $P=1E-5$  (MGCG)

Fig. 4 The optimized cantilever beams by CG, MG and MGCG algorithms with different degrees of precision: (a)  $P=1E-2$  (CG); (b)  $P=1E-2$  (MG); (c)  $P=1E-2$  (MGCG); (d)  $P=1E-3$  (CG); (e)  $P=1E-3$  (MG); (f)  $P=1E-3$  (MGCG); (g)  $P=1E-4$  (CG); (h)  $P=1E-4$  (MG); (i)  $P=1E-4$  (MGCG); (j)  $P=1E-5$  (CG); (k)  $P=1E-5$  (MG); (l)  $P=1E-5$  (MGCG)

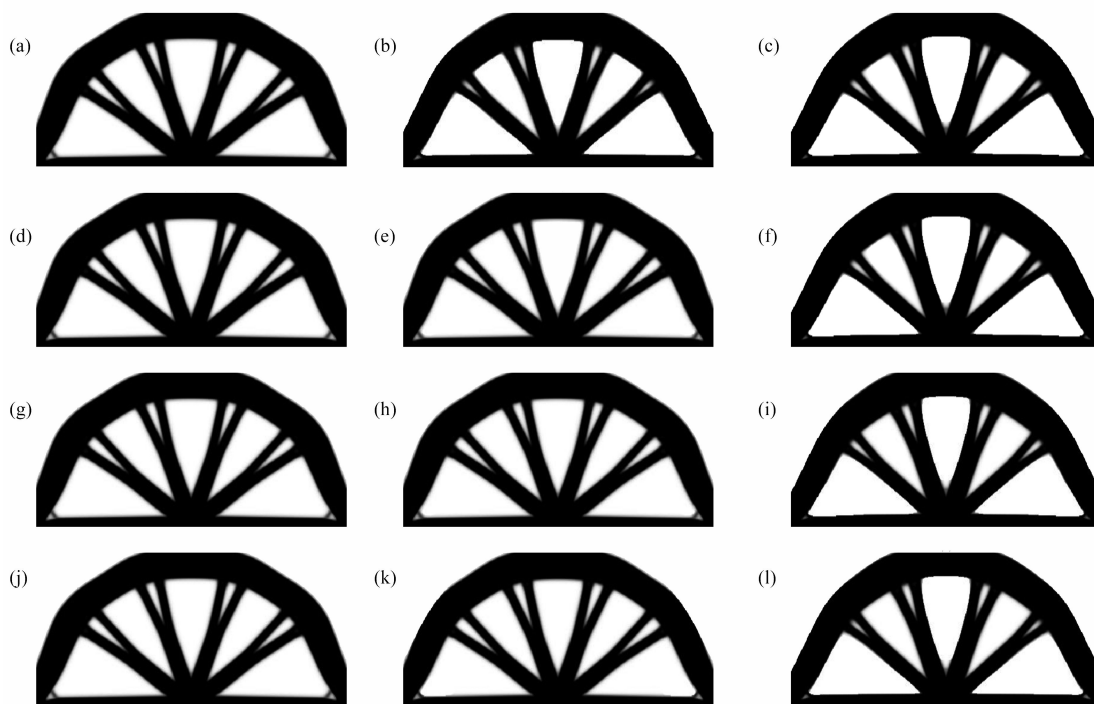


图 5 不同精度下 CG、MG 和 MGCG 算法的 Michell 结构的优化结构: (a)  $P=1E-2$  (CG); (b)  $P=1E-2$  (MG); (c)  $P=1E-2$  (MGCG); (d)  $P=1E-3$  (CG); (e)  $P=1E-3$  (MG); (f)  $P=1E-3$  (MGCG); (g)  $P=1E-4$  (CG); (h)  $P=1E-4$  (MG); (i)  $P=1E-4$  (MGCG); (j)  $P=1E-5$  (CG); (k)  $P=1E-5$  (MG); (l)  $P=1E-5$  (MGCG)

Fig. 5 The optimized Michell structures by CG, MG and MGCG algorithms with different degrees of precision: (a)  $P=1E-2$  (CG); (b)  $P=1E-2$  (MG); (c)  $P=1E-2$  (MGCG); (d)  $P=1E-3$  (CG); (e)  $P=1E-3$  (MG); (f)  $P=1E-3$  (MGCG); (g)  $P=1E-4$  (CG); (h)  $P=1E-4$  (MG); (i)  $P=1E-4$  (MGCG); (j)  $P=1E-5$  (CG); (k)  $P=1E-5$  (MG); (l)  $P=1E-5$  (MGCG)



表 1 两种结构的拓扑优化迭代次数和柔度值  
Table 1 Total numbers of iterations and compliance for topology optimization of 2 structures

structure	precision $P$	CG algorithm			MG algorithm			MGCG algorithm		
		compliance $C$	time $T/s$	iterations $I$	compliance $C$	time $T/s$	iterations $I$	compliance $C$	time $T/s$	iterations $I$
cantilever beam	1E-2	186.885 2	87	170	187.306 9	96	167	184.738 3	64	114
	1E-3	186.883 4	82	155	186.939 3	100	160	184.414 7	54	100
	1E-4	186.884 2	84	155	186.939 2	105	160	184.014 0	75	133
	1E-5	186.883 9	84	155	186.939 1	111	160	185.215 5	64	113
Michell structure	1E-2	17.125 2	331	387	16.909 5	70	78	16.923 8	68	78
	1E-3	17.123 4	231	271	17.119 9	260	277	16.923 9	67	78
	1E-4	17.123 1	230	271	17.119 9	269	277	16.952 6	80	93
	1E-5	17.123 1	231	271	17.074 7	267	267	16.943 6	62	71

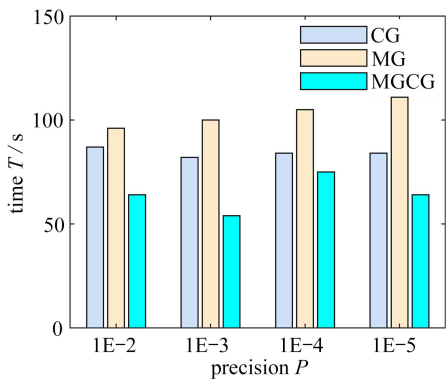


图 6 悬臂梁结构优化时间分布图

Fig. 6 The optimized time distribution of the cantilever beam

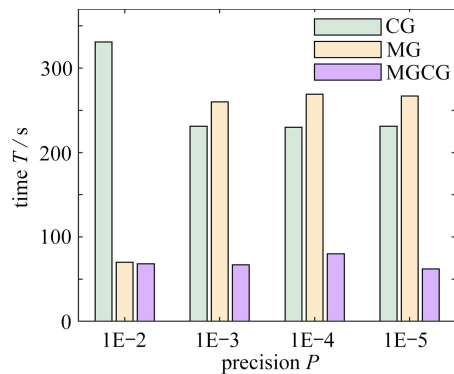


图 7 Michell 结构优化时间分布图

Fig. 7 The optimized time distribution of the Michell structure

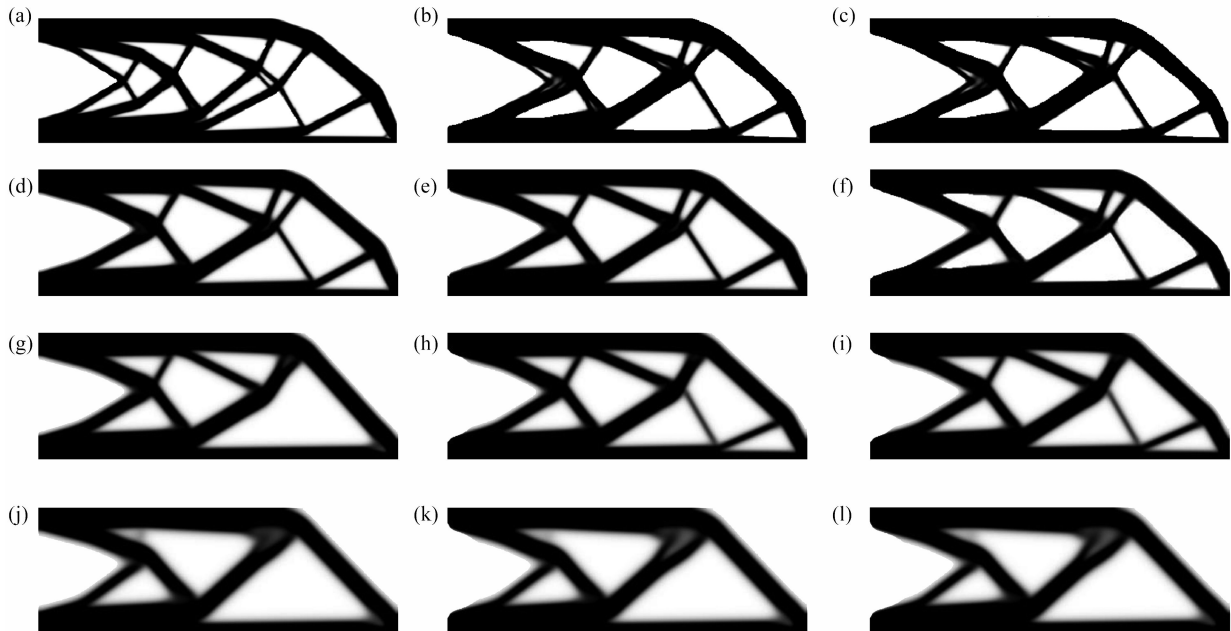


图 8 不同过滤半径下 CG、MG 和 MGCG 算法的悬臂梁的优化结构: (a)  $R=3$  (CG); (b)  $R=3$  (MG); (c)  $R=3$  (MGCG); (d)  $R=6$  (CG); (e)  $R=6$  (MG); (f)  $R=6$  (MGCG); (g)  $R=9$  (CG); (h)  $R=9$  (MG); (i)  $R=9$  (MGCG); (j)  $R=12$  (CG); (k)  $R=12$  (MG); (l)  $R=12$  (MGCG)

Fig. 8 The optimized cantilever beams by CG, MG and MGCG algorithms with different filter radius: (a)  $R=3$  (CG); (b)  $R=3$  (MG); (c)  $R=3$  (MGCG); (d)  $R=6$  (CG); (e)  $R=6$  (MG); (f)  $R=6$  (MGCG); (g)  $R=9$  (CG); (h)  $R=9$  (MG); (i)  $R=9$  (MGCG); (j)  $R=12$  (CG); (k)  $R=12$  (MG); (l)  $R=12$  (MGCG)

从图4、图5和表1可以看出,在过滤半径为6的PDE灵敏度滤波器中使用不同精度的CG算法、MG算法和MGCG算法得到的悬臂梁和Michell结构的优化结构图基本相同,并且目标函数值非常接近,至多相差1%,说明PDE滤波器求解算法的精度对拓扑优化的结果影响不大.此外,在PDE滤波器中使用MGCG算法进行结构拓扑优化的迭代次数整体低于其他两种算法.

从图6和图7可以看出,同一精度下,在PDE滤波器中使用MGCG算法进行结构拓扑优化的时间整体低于CG算法和MGCG算法,且随着精度的增加,在PDE滤波器中使用CG算法进行结构拓扑优化的时间逐渐降低并趋于稳定,在PDE滤波器中使用MG算法进行结构拓扑优化的时间逐渐增加并趋于稳定.此外,在PDE滤波器中采用MGCG算法对悬臂梁和Michell结构拓扑优化的时间分别比CG算法少了11%~34%和65%~80%,比MG算法少了29%~46%,3%和77%.因此,从结构的整体优化效率看,MGCG算法高于CG算法和MG算法.

### 3.2 过滤半径的影响

依次取4种不同的过滤半径 $R(R=3, 6, 9, 12)$ ,采用CG算法、网格层数为5的MG算法以及MGCG算法求解有限元分析Helmholtz方程得到的代数方程,并对整个结构分别划分为 $480 \times 160$ 和 $480 \times 240$ 个单元的悬臂梁和Michell结构进行控制精度为 $1E-4$ 的PDE灵敏度过滤的拓扑优化实验.其中,不同过滤半径下悬臂梁和Michell结构的优化结构、目标柔度值 $C$ 、整体迭代次数 $I$ 以及整体优化时间 $T$ 的分布分别如图8、图9、表2、图10、图11所示.

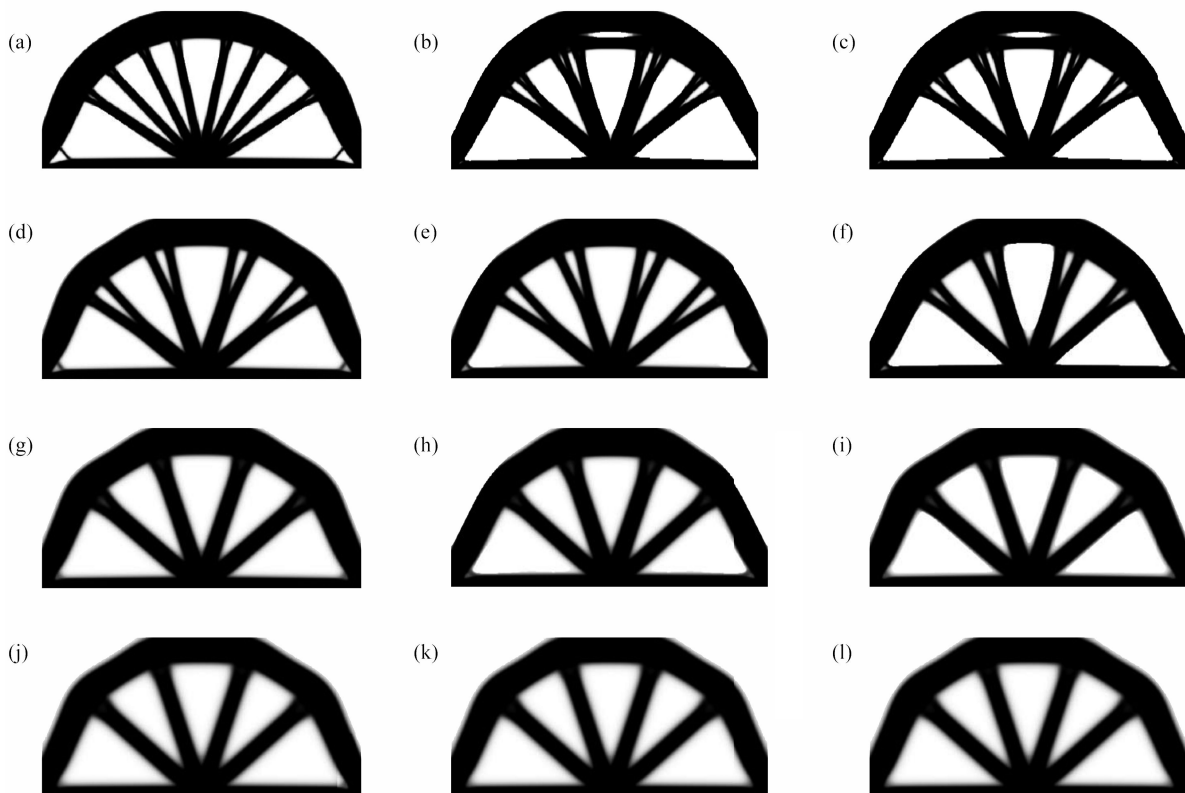


图9 不同过滤半径下CG、MG和MGCG算法的Michell结构的优化结构:(a)  $R=3$  (CG); (b)  $R=3$  (MG); (c)  $R=3$  (MGCG); (d)  $R=6$  (CG); (e)  $R=6$  (MG); (f)  $R=6$  (MGCG); (g)  $R=9$  (CG); (h)  $R=9$  (MG); (i)  $R=9$  (MGCG); (j)  $R=12$  (CG); (k)  $R=12$  (MG); (l)  $R=12$  (MGCG)

Fig. 9 The optimized Michell structures by CG, MG and MGCG algorithms with different filter radius: (a)  $R=3$  (CG); (b)  $R=3$  (MG); (c)  $R=3$  (MGCG); (d)  $R=6$  (CG); (e)  $R=6$  (MG); (f)  $R=6$  (MGCG); (g)  $R=9$  (CG); (h)  $R=9$  (MG); (i)  $R=9$  (MGCG); (j)  $R=12$  (CG); (k)  $R=12$  (MG); (l)  $R=12$  (MGCG)

从图8、图9和表2可以看出,在PDE灵敏度滤波器中使用精度为 $1E-4$ 的CG算法、MG算法和MGCG算法得到的悬臂梁和Michell结构的优化结构图、目标函数值的特征随着过滤半径的变化呈现类似的变化规律.随着过滤半径的增大,拓扑优化结构的清晰度越来越低,细支结构越来越少,说明该两种算法对结

构承力路径的识别精度与过滤半径间体现出负相关性, 且柔度值越来越大. 且从表 2 可以看出, 随着过滤半径的改变, 在 PDE 滤波器中使用 MG 算法和 MGCG 算法进行结构拓扑优化的迭代次数整体低于 CG 算法.

表 2 两种结构的拓扑优化迭代次数和柔度值 (不同过滤半径)

Table 2 Total numbers of iterations and compliance for topology optimization of 2 structures (different filter radius)

structure	filter radius $R$	CG algorithm			MG algorithm			MGCG algorithm		
		compliance $C$	time $T/s$	iterations $I$	compliance $C$	time $T/s$	iterations $I$	compliance $C$	time $T/s$	iterations $I$
cantilever beam	3	180.759 1	505	917	182.218 3	147	225	182.352 0	58	103
	6	186.884 2	82	155	186.939 2	101	160	184.014 0	73	133
	9	192.522 9	98	183	193.053 7	64	100	193.096 7	53	97
	12	197.418 7	73	136	197.669 5	67	105	197.641 9	62	115
Michell structure	3	16.738 5	840	926	16.864 5	165	168	16.894 1	80	90
	6	17.123 1	239	271	17.119 9	280	277	16.952 6	84	93
	9	17.382 9	117	133	17.322 6	115	117	17.168 6	59	67
	12	17.696 4	99	114	17.696 5	107	114	17.686 4	100	114

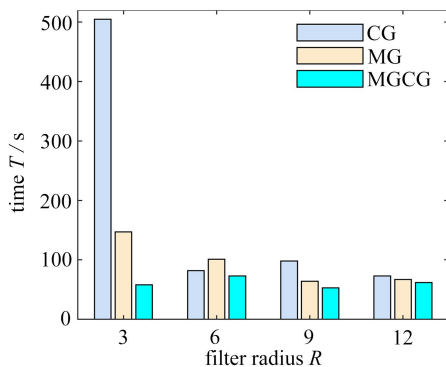


图 10 悬臂梁结构优化时间分布图 (不同过滤半径)

Fig. 10 The optimized time distribution of the cantilever beam (different filter radius)

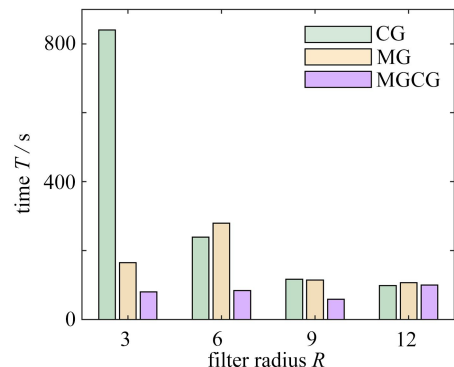


图 11 Michell 结构优化时间分布图 (不同过滤半径)

Fig. 11 The optimized time distribution of the Michell structure (different filter radius)

从图 10 和图 11 可以看出, 同一过滤半径下, 在 PDE 滤波器中使用 MG 算法和 MGCG 算法进行结构拓扑优化的时间整体低于 CG 算法, 且随着过滤半径增大, MGCG 算法的优势逐渐降低. 此外, 在 PDE 滤波器中采用 MGCG 算法对悬臂梁和 Michell 结构拓扑优化的时间分别比 CG 算法少了 11%~89% 和 50%~91%, 比 MG 算法少了 7%~61%, 7% 和 70%. 因此, 从结构的整体优化效率看, MGCG 算法高于 CG 算法和 MG 算法.

### 3.3 网格数量的影响

分别对网格划分为  $960 \times 320$ , 过滤半径为 12, 层数为 6; 网格划分为  $480 \times 160$ , 过滤半径为 6, 层数为 5; 网格划分为  $240 \times 80$ , 过滤半径为 3, 层数为 4 的悬臂梁和网格划分为  $960 \times 480$ , 过滤半径为 12, 层数为 6; 网格划分为  $480 \times 240$ , 过滤半径为 6, 层数为 5; 网格划分为  $240 \times 120$ , 过滤半径为 3, 层数为 4 的 Michell 结构进行控制精度为  $1E-4$  的 PDE 灵敏度过滤的拓扑优化实验. 其中, 不同网格数量下悬臂梁和 Michell 结构的优化结构、目标柔度值  $C$ 、整体迭代次数  $I$  以及整体优化时间  $T$  的分布分别如图 12、图 13、表 3、图 14、图 15 所示.

从图 12、图 13 和表 3 可以看出, 在 PDE 灵敏度滤波器中使用精度为  $1E-4$  的 CG 算法、MG 算法和 MGCG 算法得到不同网格数量的悬臂梁和 Michell 结构的优化结构基本相同, 并且随着网格数量增加, 柔度值越来越大. 可见 PDE 滤波器求解算法对不同网格数量的优化结构影响不大, 且可有效地消除网格依赖性和棋盘格现象. 此外, 在 PDE 滤波器中使用 MGCG 算法进行结构拓扑优化的迭代次数整体低于其他两种算法.

从图 14 和图 15 可以看出, 同一网格数量下, 在 PDE 滤波器中使用 MGCG 算法进行结构拓扑优化的时间整体低于 CG 算法和 MGCG 算法. 特别地, 在 PDE 滤波器中采用 MGCG 算法对悬臂梁和 Michell 结构拓扑

优化的时间分别比 CG 算法少了 3%~25% 和 64%~73%，比 MG 算法少了 15%~37%，25% 和 76%。因此，从结构的整体优化效率看，MGCG 算法高于 CG 算法和 MG 算法。

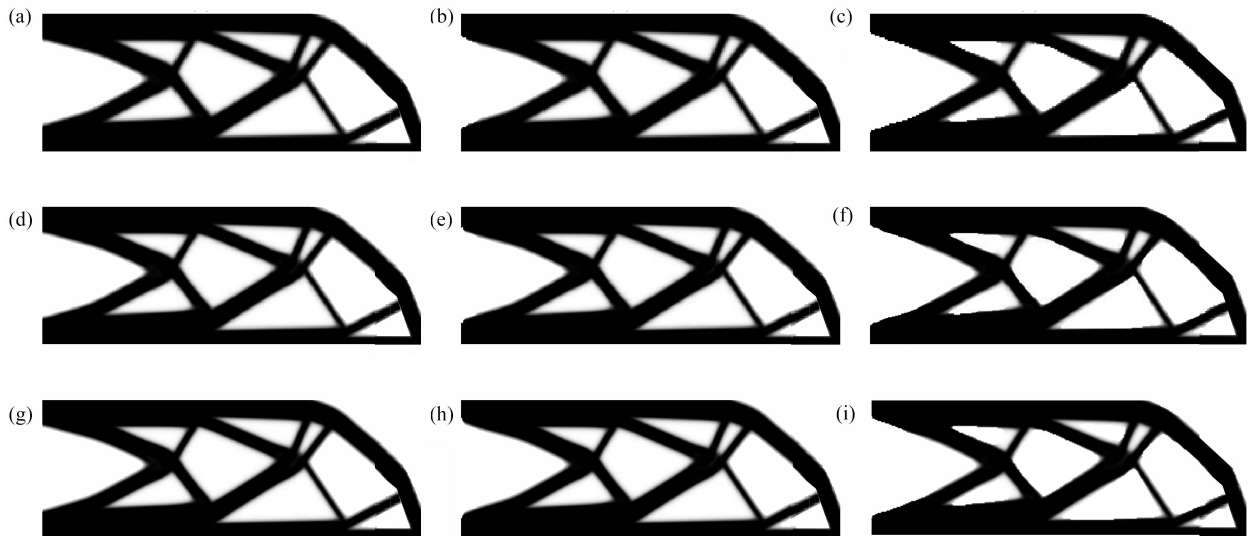


图 12 不同网格数量下 CG、MG 和 MGCG 算法的悬臂梁的优化结构: (a) 网格为  $240 \times 80$  (CG); (b) 网格为  $240 \times 80$  (MG); (c) 网格为  $240 \times 80$  (MGCG); (d) 网格为  $480 \times 160$  (CG); (e) 网格为  $480 \times 160$  (MG); (f) 网格为  $480 \times 160$  (MGCG); (g) 网格为  $960 \times 320$  (CG); (h) 网格为  $960 \times 320$  (MG); (i) 网格为  $960 \times 320$  (MGCG)

Fig. 12 The optimized cantilever beams by CG, MG and MGCG algorithms with different grids: (a) grid  $240 \times 80$  (CG); (b) grid  $240 \times 80$  (MG); (c) grid  $240 \times 80$  (MGCG); (d) grid  $480 \times 160$  (CG); (e) grid  $480 \times 160$  (MG); (f) grid  $480 \times 160$  (MGCG); (g) grid  $960 \times 320$  (CG); (h) grid  $960 \times 320$  (MG); (i) grid  $960 \times 320$  (MGCG)

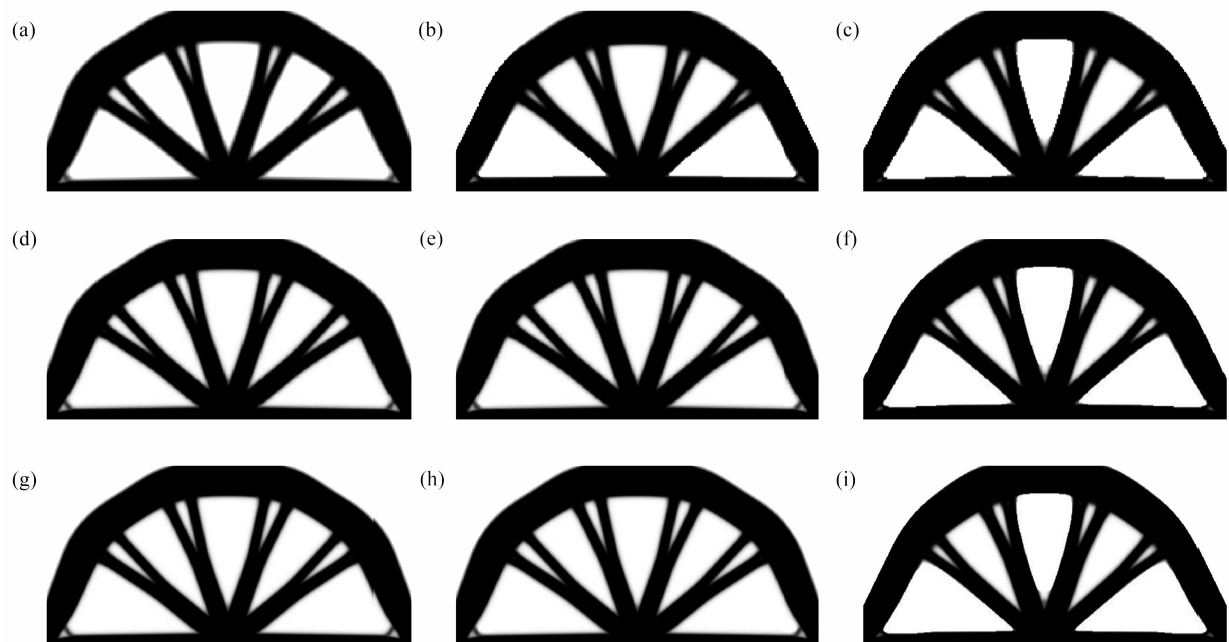


图 13 不同网格数量下 CG、MG 和 MGCG 算法的 Michell 结构的优化结构: (a) 网格为  $240 \times 120$  (CG); (b) 网格为  $240 \times 120$  (MG); (c) 网格为  $240 \times 120$  (MGCG); (d) 网格为  $480 \times 240$  (CG); (e) 网格为  $480 \times 240$  (MG); (f) 网格为  $480 \times 240$  (MGCG); (g) 网格为  $960 \times 480$  (CG); (h) 网格为  $960 \times 480$  (MG); (i) 网格为  $960 \times 480$  (MGCG)

Fig. 13 The optimized Michell structures by CG, MG and MGCG algorithms with different grids: (a) grid  $240 \times 120$  (CG); (b) grid  $240 \times 120$  (MG); (c) grid  $240 \times 120$  (MGCG); (d) grid  $480 \times 240$  (CG); (e) grid  $480 \times 240$  (MG); (f) grid  $480 \times 240$  (MGCG); (g) grid  $960 \times 480$  (CG); (h) grid  $960 \times 480$  (MG); (i) grid  $960 \times 480$  (MGCG)

表 3 两种结构的拓扑优化迭代次数和柔度值 (不同网格数量)

Table 3 Total numbers of iterations and compliance for topology optimization of 2 structures (different grids)

structure	grid size	CG algorithm			MG algorithm			MGCG algorithm		
		compliance $C$	time $T/s$	iterations $I$	compliance $C$	time $T/s$	iterations $I$	compliance $C$	time $T/s$	iterations $I$
cantilever beam	240 × 80	186.484 0	16	133	186.315 3	19	133	183.148 4	12	96
	480 × 160	186.884 2	82	155	186.939 2	101	160	184.014 0	73	133
	960 × 320	188.099 5	430	167	188.513 5	495	173	185.695 5	419	155
Michell structure	240 × 120	15.995 4	42	233	15.867 0	20	91	15.816 0	15	83
	480 × 240	17.123 1	235	271	17.119 9	274	277	16.952 6	80	93
	960 × 480	18.293 9	1319	292	18.288 6	148 1	306	18.095 9	361	91

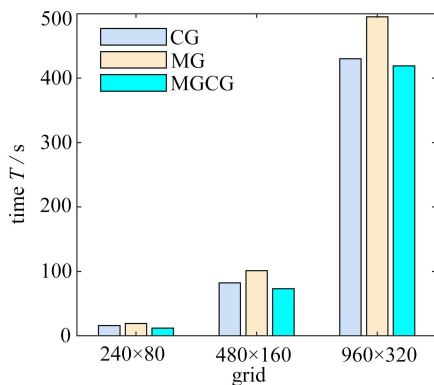


图 14 悬臂梁结构优化时间分布图 (不同网格数量)

Fig. 14 The optimized time distribution of the cantilever beam (different grids)

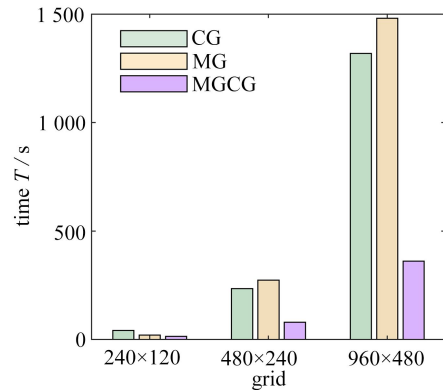


图 15 Michell 结构优化时间分布图 (不同网格数量)

Fig. 15 The optimized time distribution of the Michell structure (different grids)

## 4 结 论

本文在 PDE 灵敏度滤波器中引入了 CG 算法、MG 算法和 MGCG 算法, 对悬臂梁和 Michell 结构进行拓扑优化, 并比较了算法精度、过滤半径和网格数量对优化结果和优化效率的影响. 实验结果表明:

1) 不同精度的三种算法得到的优化结构、目标函数值基本相同. 随着精度的提升, MG 算法的结构优化时间不断增加, CG 算法总体趋于稳定, MGCG 算法有微小的波动, 且 MGCG 算法结构优化时间整体少于其他两种算法.

2) 随着过滤半径的增大, CG 算法和 MG 算法的结构优化时间大幅减少, 整体呈下降趋势, MGCG 算法有微小的波动, 但优化时间整体少于其他两种算法, 且过滤半径越小, 优势越明显.

3) 不同网格数量的三种算法得到的优化结构、目标函数值基本相同. 随着网格数量的增加, 三种算法的结构优化时间和迭代次数整体呈上升趋势, 且随着网格数量的增加, MGCG 算法的优势越明显.

因此, 从结构的整体优化效率看, MGCG 算法优于 CG 算法和 MG 算法.

### 参考文献 (References):

[1] DEATON J D, GRANDHI R V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, **49**: 1-38.

[2] ZHU J H, ZHOU H, WANG C, et al. A review of topology optimization for additive manufacturing: status and challenges[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2021, **34**(1): 91-110.

[3] 卫志军, 申利敏, 关晖, 等. 拓扑优化技术在抑制流体晃荡中的数值模拟研究[J]. *应用数学和力学*, 2021, **42**(1): 49-57. (WEI Zhijun, SHEN Limin, GUAN Hui, et al. Numerical simulation of topology optimization technique for tank sloshing suppression[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(1): 49-57.(in Chinese))

[4] SIGMUND O. Design of material structures using topology optimization[D]. PhD Thesis. Copenhagen : Technic-

- al University of Denmark, 1994.
- [5] BRUNS T E, TORTORELLI D A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 2001, **190**(26/27): 3443-3459.
- [6] 吴一帆, 郑百林, 何旅洋, 等. 结构拓扑优化变密度法的灰度单元等效转换方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2017, **29**(4): 759-767. (WU Yifan, ZHENG Bailin, HE Lüyang, et al. Equivalent conversion method of gray-scale elements for SIMP in structures[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2017, **29**(4): 759-767.(in Chinese))
- [7] XING J, QIE L. A simple way to achieve black-and-white designs in topology optimization[J]. *Journal of Physics Conference Series*, 2021, **1798**(1): 012043.
- [8] 廉睿超, 敬石开, 何志军, 等. 拓扑优化变密度法的灰度单元分层双重惩罚方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2020, **32**(8): 1349-2583. (LIAN Ruichao, JING Shikai, HE Zhijun, et al. A hierarchical double penalty method of gray-scale elements for SIMP in Topology optimization[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2020, **32**(8): 1349-2583.(in Chinese))
- [9] 雷阳, 封建湖. 基于参数化水平集法的材料非线性子结构拓扑优化[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(11): 1150-1160. (LEI Yang, FENG Jianhu. Topology optimization of nonlinear material structures based on parameterized level set and substructure methods[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(11): 1150-1160.(in Chinese))
- [10] LIU B, WU Y, GUO J, et al. Finite difference Jacobian based Newton-Krylov coupling method for solving multiphysics nonlinear system of nuclear reactor[J]. *Annals of Nuclear Energy*, 2020, **148**: 107670.
- [11] 肖文可, 陈星玕. 求解PageRank问题的重启GMRES修正的多分裂迭代法[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(3): 330-340. (XIAO Wenke, CHEN Xingding. A modified multi-splitting iterative method with the restarted GMRES to solve the PageRank problem[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(3): 330-340.(in Chinese))
- [12] LIU T. A nonlinear multigrid method for inverse problem in the multiphase porous media flow[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, **320**(C): 271-281.
- [13] LIU T. A multigrid-homotopy method for nonlinear inverse problems[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2020, **79**(6): 1706-1717.
- [14] DENG L J, HUANG T Z, ZHAO X L, et al. Signal restoration combining Tikhonov regularization and multi-level method with thresholding strategy[J]. *Journal of the Optical Society of America A: Optics, Image Science, and Vision*, 2013, **30**(5): 948-955.
- [15] WAN F, YIN Y, ZHANG Q, et al. Analysis of parallel multigrid methods in real-time fluid simulation[J]. *International Journal of Modeling, Simulation, and Scientific Computing*, 2017, **8**(4): 121-128.
- [16] AMIR O, AAGE N, LAZAROV B S. On multigrid-CG for efficient topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, **49**(5): 815-829.
- [17] LIAO Z, ZHANG Y, WANG Y, et al. A triple acceleration method for topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, **60**(2): 727-744.
- [18] LAZAROV B S, SIGMUND O. Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, **86**(6): 765-781.
- [19] LAZAROV B S, SIGMUND O. Sensitivity filters in topology optimisation as a solution to Helmholtz type differential equation[C]// *Proceedings of the Eighth World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*. Lisbon, Portugal, 2009.
- [20] ANDREASSEN E, CLAUSEN A, SCHEVENELS M, et al. Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, **43**(1): 1-16.