

### 气-液横向流动下悬臂柱体结构涡激振动机理研究

严浩, 代胡亮, 王琳, 倪樵

#### A Study on the Vortex-Induced Vibration Mechanism of Cantilever Cylinders Under Gas-Liquid Cross Flows

YAN Hao, DAI Huliang, WANG Lin, and NI Qiao

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.430065>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 海洋立管涡激损伤分析的虚拟激励法概述

A Summary of the Pseudo-Excitation Method for VIV Fatigue Damage Analysis of Marine Risers

应用数学和力学. 2017, 38(1): 60-66 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370506>

#### 海洋立管双模态动力学分岔分析

Bifurcation Analysis of Dual-Mode Dynamics for Marine Risers

应用数学和力学. 2020, 41(5): 480-490 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400257>

#### 轴向运动梁的横向振动分析

Lateral Vibration Analysis of Axially Moving Beams

应用数学和力学. 2019, 40(10): 1081-1088 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400082>

#### 超临界输流管道3:1内共振下参激振动响应

Parametric Vibration Responses of Supercritical Fluid-Conveying Pipes in 3:1 Internal Resonance

应用数学和力学. 2018, 39(11): 1227-1235 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390121>

#### 圆筒流体域内管束振动与碰撞接触的流固耦合动力学方法研究

A Method of Fluid-Solid Coupling Dynamics for Tube Bundle Vibration and Collision in a Cylinder Fluid Domain

应用数学和力学. 2018, 39(5): 568-583 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.380265>

#### 峡谷、垭口地貌下导线流固耦合风偏振动分析

Fluid-Structure Coupling Wind-Induced Vibration Analysis of Transmission Lines Across 2 Close Hills

应用数学和力学. 2020, 41(7): 747-759 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400241>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

# 气-液横向流动下悬臂柱体结构涡激振动机理研究\*

严浩<sup>1,2</sup>, 代胡亮<sup>1,2</sup>, 王琳<sup>1,2</sup>, 倪樵<sup>1,2</sup>

(1. 华中科技大学 航空航天学院 工程力学系, 武汉 430074;  
2. 工程结构分析与安全评定湖北省重点实验室, 武汉 430074)

**摘要:** 针对潜艇侦查望远镜举升水面时产生的涡激振动现象, 该文建立了悬臂柱体结构受气-液两种不同横向流作用下的涡激振动理论模型, 研究了两种流体不同的分布比和密度比对柱体结构涡激振动行为的影响规律. 基于 Galerkin 法和 Runge-Kutta 法, 得到了柱体结构涡激振动响应的数值结果. 研究表明, 柱体结构的涡激振动锁频区随着流体分布比的增大而增大, 自由端最大幅值随着流体分布比的增大先增大后减小. 当分布比为 0.5 附近时, 振幅出现极大值, 该极大值随着流体密度比的减小呈现明显的增大趋势. 此外, 柱体的动力学行为随着流体分布比的变化呈现出周期和多周期等振动模式. 该研究可为潜艇侦查望远镜结构的设计与分析提供理论指导意义.

**关键词:** 涡激振动; 悬臂柱体; 锁频; 横向流

**中图分类号:** O322 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430065

## A Study on the Vortex-Induced Vibration Mechanism of Cantilever Cylinders Under Gas-Liquid Cross Flows

YAN Hao<sup>1,2</sup>, DAI Huliang<sup>1,2</sup>, WANG Lin<sup>1,2</sup>, NI Qiao<sup>1,2</sup>

(1. Department of Engineering Mechanics, School of Aerospace Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, P.R.China;

2. Hubei Key Laboratory of Engineering Structural Analysis and Safety Assessment, Wuhan 430074, P.R.China)

**Abstract:** Aimed at vortex-induced vibration (VIV) of the submarine reconnaissance telescope lifting above the water surface, a theoretical model for VIV of a cantilever cylinder under the actions of two different cross flows, i.e. gas and liquid, was established. The effects of parameters such as the distribution ratio and the density ratio for these two fluids on VIV responses of the cylinder were studied. Based on the Galerkin technique and the Runge-Kutta algorithm, numerical results of the cylinder vibration responses were obtained. The results show that, the increase of the distribution ratio can widen the lock-in range of the cylinder. The peak amplitude of the cylinder increases first and then decreases with the distribution ratio. The amplitude reaches the maximum value with a distribution ratio of 0.5, and this maximum value will increase with the decrease of the density ratio. In addition, single-period and multi-period motions will occur with the change of the fluid distribution ratio. The present research provides a theoretical guidance for the design and analysis of the submarine reconnaissance telescope.

\* 收稿日期: 2022-03-02; 修订日期: 2022-03-29

基金项目: 国家自然科学基金(12102139; 12072119; 11972167)

作者简介: 严浩(1991—), 男, 博士(E-mail: [yanhaohust@126.com](mailto:yanhaohust@126.com));

代胡亮(1986—), 男, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: [daihulianglx@hust.edu.cn](mailto:daihulianglx@hust.edu.cn)).

引用格式: 严浩, 代胡亮, 王琳, 倪樵. 气-液横向流动下悬臂柱体结构涡激振动机理研究[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(5): 577-585.

**Key words:** vortex-induced vibration; cantilever cylinder; lock-in; cross flow

## 引言

涡激振动是工程实际和日常生活中一种常见的流致振动现象,其主要原理是:流体以一定的流速流经钝体(如圆柱体)时,会在结构后方两侧产生周期性漩涡脱落现象,进而产生作用于结构之上的周期性流体力,从而导致结构振动.尤其当漩涡脱落频率接近结构的固有频率时,“锁频(lock-in)”现象<sup>[1]</sup>出现,导致结构发生大振幅的共振运动.而这种共振恰恰是诱发诸如热交换器、桥梁、海洋立管和海底管线等工程结构发生疲劳损伤和破坏以及工质泄漏的主要原因之一.因此,涡激振动问题成为当前学术界和工业界关注和研究的重点.

早期的研究主要集中在刚性圆柱体的涡激振动问题上,且已取得了大量的研究成果.近几十年来,细长弹性结构的涡激振动问题吸引了大量学者们的关注和研究,其研究途径主要为实验研究<sup>[2]</sup>、数值模拟<sup>[3]</sup>和经验模型<sup>[4]</sup>等.相较于前两种方法,经验模型具有成本低、效率高、预测效果较好的优势,因此,经验模型得到了许多学者的青睐,其中尾流振子模型是应用较为广泛的经验模型之一.

1964年, Bishop 和 Hassan<sup>[5]</sup>认为尾流对于圆柱体的作用相当于一个非线性振子,于是提出了尾流振子模型来研究圆柱体的涡激振动问题.随后, Griffin 等<sup>[6]</sup>结合实验和理论,验证了他们所提出的新改进尾流振子模型,并发现圆柱体在锁频区内的位移和升力之间的相位角可能发生突变.1975年, Skop 和 Griffin<sup>[7]</sup>在研究弹性圆柱体的涡激振动问题时,将应用于刚性圆柱体的涡激振动模型改进为适用于弹性圆柱体的模型.进入20世纪90年代后, Skop 和 Balasubramanian<sup>[8]</sup>发展了 Skop 和 Griffin<sup>[7]</sup>此前所提出的模型,并将新模型成功应用到细长弹性圆柱体的涡激振动研究中,这种新模型能够在无阻尼条件下保证圆柱体响应的渐近性和自控性.2004年, Facchinetti 等<sup>[9]</sup>分别研究了基于位移耦合、速度耦合和加速度耦合的尾流振子模型来研究结构的涡激振动行为.通过实验和理论的对比分析,结果表明加速度耦合更能准确地预测结构的涡激振动响应.此后, Violette 等<sup>[10]</sup>利用 Facchinetti 等<sup>[9]</sup>提出的加速度耦合模型,研究了受均匀流和剪切流作用下细长弹性圆柱体的涡激振动问题,所得预测结果通过了数值模拟和实验的验证.目前,尾流振子模型已被广泛应用于水和空气中圆柱体的涡激振动研究,且被证明对于均匀和非均匀流都能得到一定的应用.

当潜艇在水下航行进行侦查时,其望远镜将举升出水面.此时,望远镜的下部和上部将分别受到水流和气流的作用,且在一定情况下将发生涡激振动现象,这将严重影响观测精度.受此启发,本文基于尾流振子模型,建立了悬臂柱体结构受气-液两种不同横流作用下的涡激振动理论模型,并研究了这两种横流分布比和密度比等参数对结构涡激振动响应的影响.

## 1 理论建模

考虑如图1所示的悬臂圆柱体,其沿  $x$  轴的长度为  $L$ , 截面外直径为  $D$ , 内径为  $D_i$ , 密度为  $\rho_c$ , 抗弯刚度为  $EI$ . 该圆柱体在气-液两种横流的作用下发生涡激振动. 其中, 气-液两种横流分别分布于圆柱体结构的上下两部分, 它们之间的分界线位于  $x = L_1$  处. 此外, 液体横流的流速和密度分别为  $U_1$  和  $\rho_1$ ; 气体横流的流速和密度分别为  $U_2$  和  $\rho_2$ . 为了便于研究, 本文做出如下假设: 1) 圆柱体为细长、等截面结构, 采用 Euler-Bernoulli 梁建模; 2) 仅考虑圆柱体  $y$  方向上的振动; 3) 忽略圆柱体结构的重力、浮力、剪切、扭转和 Poisson 比的影响; 4) 考虑圆柱体为黏弹性材料 (Kelvin-Voigt 型),  $E^*$  为黏弹性系数.

基于上述假设, 悬臂圆柱体在气-液两种横流作用下的非线性涡激振动控制方程可以通过 Hamilton 原理推导得到<sup>[11]</sup>, 其具体形式如下:

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + EI(y'''' + y''^3 + 4y'y''y'''' + y'^2y''''') + E^*I\dot{y}'''' + y' \int_0^x m(\dot{y}'^2 + y'\ddot{y}') dx - y'' \int_x^L \int_0^x m(\dot{y}'^2 + y'\ddot{y}') dx dx = F_y, \quad (1)$$

其中  $y(x, t)$  表示圆柱体的横向振动位移,  $x$  和  $t$  分别表示柱体轴线坐标变量和时间变量, 上标符号“ $\cdot$ ”和“ $''$ ”分别表示变量对  $t$  和  $x$  的偏导数.

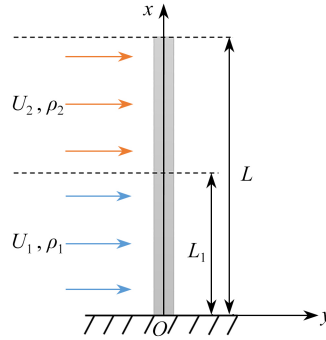


图 1 气-液横流作用下的悬臂圆柱体涡激振动模型示意图

Fig. 1 The vortex-induced vibration model for a cantilever cylinder under gas-liquid cross flow

式 (1) 中  $\bar{m}(x) = m_c + m_a(x)$ ,  $m_c$  和  $m_a(x)$  分别为圆柱体以及黏附流体在单位长度上的质量, 其中  $m_c = \rho_c \pi (D^4 - D_1^4) / 4$ . 由于沿圆柱体长度方向上分布着两种不同的流体, 因此  $m_a(x)$  表示为

$$m_a(x) = m_{a1} [H(x) - H(x - L_1)] + m_{a2} [H(x - L_1) - H(x - L)], \quad (2)$$

其中  $m_{ai} = C_a \rho_i \pi D^2 / 4 (i=1, 2)$  分别为两种黏附流体质量;  $C_a$  为黏附流体质量因子, 对于圆柱体  $C_a$  可以取为 1<sup>[12-13]</sup>;  $H(x)$  为 Heaviside 函数, 即

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

此外, 系统的阻尼系数  $c(x) = c_s(x) + c_f(x)$ .  $c_s(x)$  和  $c_f(x)$  分别为圆柱体的阻尼和流体附加阻尼, 其具体表达式如下:

$$c_s(x) = 2\zeta m(x) \omega_c, \quad (4)$$

$$c_f(x) = \vartheta \omega_s(x) \rho(x) D^2, \quad (5)$$

其中  $\zeta$  和  $\vartheta$  分别为柱体结构阻尼比和失速参数. 根据 Facchinetti 等<sup>[9]</sup> 和 Ge 等<sup>[14]</sup> 的研究可知,  $\zeta = 0.001$ ,  $\vartheta = 0.8$ .  $\omega_c$  和  $\omega_s(x)$  分别为柱体结构的角频率和旋涡脱落频率,  $\rho(x)$  为流体密度. 同理可得

$$\rho(x) = \rho_1 [H(x) - H(x - L_1)] + \rho_2 [H(x - L_1) - H(x - L)], \quad (6)$$

$$\omega_s(x) = \omega_{s1} [H(x) - H(x - L_1)] + \omega_{s2} [H(x - L_1) - H(x - L)]. \quad (7)$$

根据 Gabbai 等<sup>[15]</sup> 的研究, 涡脱频率可表示为  $\omega_{si} = 2\pi S r_i U_i / D (i=1, 2)$ , 其中  $U_i$  为流体流速,  $S r_i$  为 Strouhal 数, 其取值由 Reynolds 数决定. 在 Reynolds 数  $300 < Re < 1.5 \times 10^5$  的情况下,  $S r_i = 0.2$  是合理的<sup>[16]</sup>.

控制方程 (1) 的右边项  $F_y$  为作用在圆柱体上的涡激力, 其表达形式如下<sup>[17]</sup>:

$$F_y = \left( \frac{D}{4} C_{L0} \rho_1 U_1^2 q_1 - \frac{C_D \rho_1 D U_1}{2} \dot{y} \right) [H(x) - H(x - L_1)] + \left( \frac{D}{4} C_{L0} \rho_2 U_2^2 q_2 - \frac{C_D \rho_2 D U_2}{2} \dot{y} \right) [H(x - L_1) - H(x - L)], \quad (8)$$

其中  $C_{L0}$  和  $C_D$  分别为升力和阻力系数, 对于稳定的旋涡脱落,  $C_{L0} = 0.3$ ,  $C_D = 1.2$ . 此外, 尾流变量  $q_1(x, t)$  和  $q_2(x, t)$  可由 Van der Pol 振子方程来模拟<sup>[9]</sup>:

$$\ddot{q}_1 + \lambda_1 \omega_{s1} (q_1^2 - 1) \dot{q}_1 + \omega_{s1}^2 q_1 = A \ddot{y} / D, \quad (9)$$

$$\ddot{q}_2 + \lambda_2 \omega_{s2} (q_2^2 - 1) \dot{q}_2 + \omega_{s2}^2 q_2 = A \ddot{y} / D, \quad (10)$$

式中  $\lambda_i$  和  $A_i (i=1, 2)$  为无量纲经验参数<sup>[9]</sup>, 其取值分别为 0.3 和 12.

通过引入如下无量纲化参量:

$$\xi = \frac{x}{L}, \chi = \frac{L_1}{L}, \eta = \frac{y}{L}, \tau = \frac{t}{L^2} \left( \frac{EI}{m_c} \right)^{1/2}, \gamma_1 = \frac{m_{a1}}{m_c}, \gamma_2 = \frac{m_{a2}}{m_c}, \alpha = \left( \frac{I}{Em_c} \right)^2 \frac{E^*}{L^2},$$

$$\Omega_{s1} = \omega_{s1} \left( \frac{m_c}{EI} \right)^{1/2} L^2, \Omega_{s2} = \omega_{s2} \left( \frac{m_c}{EI} \right)^{1/2} L^2, \Omega_c = \omega_c \left( \frac{m_c}{EI} \right)^{1/2} L^2, \beta_1 = \frac{C_D \Omega_{s1} \rho_1 D^2}{4\pi S r_1 m_c},$$

$$\alpha_1 = \frac{C_{L0}\Omega_{s1}^2\rho_1 D^2}{16\pi^2 S r_1^2 m_c}, \beta_2 = \frac{C_D\Omega_{s2}\rho_2 D^2}{4\pi S r_2 m_c}, \alpha_2 = \frac{C_{L0}\Omega_{s2}^2\rho_2 D^2}{16\pi^2 S r_2^2 m_c}, \varepsilon = \frac{L}{D}, \kappa = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (11)$$

可以得到圆柱体涡激振动的无量纲化运动方程:

$$\begin{aligned} & \ddot{\eta} + \eta' \int_0^\xi (\dot{\eta}'^2 + \eta' \ddot{\eta}') d\xi - \eta'' \int_\xi^1 \int_0^\xi (\dot{\eta}'^2 + \eta' \ddot{\eta}') d\xi d\xi + \\ & \gamma_1 \left[ [H(\xi) - H(\xi - \chi)] \ddot{\eta} + \eta' \int_0^\xi [H(\xi) - H(\xi - \chi)] (\dot{\eta}'^2 + \eta' \ddot{\eta}') d\xi - \right. \\ & \left. \eta'' \int_\xi^1 \int_0^\xi [H(\xi) - H(\xi - \chi)] (\dot{\eta}'^2 + \eta' \ddot{\eta}') d\xi d\xi \right] + \\ & \gamma_2 \left[ [H(\xi - \chi) - H(\xi - 1)] \ddot{\eta} + \eta' \int_0^\xi [H(\xi - \chi) - H(\xi - 1)] (\dot{\eta}'^2 + \eta' \ddot{\eta}') d\xi - \right. \\ & \left. \eta'' \int_\xi^1 \int_0^\xi [H(\xi - \chi) - H(\xi - 1)] (\dot{\eta}'^2 + \eta' \ddot{\eta}') d\xi d\xi \right] + \\ & 2\zeta\Omega_c \dot{\eta} + \frac{4\vartheta}{\pi Ca} \dot{\eta} (\Omega_{s1} [H(\xi) - H(\xi - \chi)] + \\ & \Omega_{s2} [H(\xi - \chi) - H(\xi - 1)]) \{ \gamma_1 [H(\xi) - H(\xi - \chi)] + \gamma_2 [H(\xi - \chi) - H(\xi - 1)] \} + \\ & \alpha \dot{\eta}'''' + \eta'''' + \eta''^3 + 4\eta' \eta'' \eta''' + \eta'^2 \eta'''' = \\ & \left( \alpha_1 \frac{q_1}{\varepsilon} - (\beta_1 + 2\zeta\Omega_c \gamma_1) \dot{\eta} \right) [H(\xi) - H(\xi - \chi)] + \\ & \left( \alpha_2 \frac{q_2}{\varepsilon} - (\beta_2 + 2\zeta\Omega_c \gamma_1) \dot{\eta} \right) [H(\xi - \xi_1) - H(\xi - 1)], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\ddot{q}_1 + \lambda_1 \Omega_{s1} (q_1^2 - 1) \dot{q}_1 + \Omega_{s1}^2 q_1 = A \varepsilon \dot{\eta}, \quad (13)$$

$$\ddot{q}_2 + \lambda_2 \Omega_{s2} (q_2^2 - 1) \dot{q}_2 + \Omega_{s2}^2 q_2 = A \varepsilon \dot{\eta}, \quad (14)$$

其中上标符号“·”和“'”分别表示变量对 $\tau$ 和 $\xi$ 的偏导数.

## 2 求解方法

本文通过 Runge-Kutta 算法进行数值计算求解. 为此, 需首先采用 Galerkin 法对上述偏微分控制方程 (12)~(14) 进行离散化操作, 则

$$\begin{cases} \eta(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\xi) \bar{\eta}_j(\tau), \\ q_1(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\xi) \bar{q}_{1j}(\tau), \\ q_2(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\xi) \bar{q}_{2j}(\tau), \end{cases} \quad (15)$$

其中 $\phi_j$ 为经典悬臂梁的模式函数,  $\bar{\eta}_j(\tau)$ ,  $\bar{q}_{1j}(\tau)$ 和 $\bar{q}_{2j}(\tau)$ 为对应的时间变量坐标.

将式 (15) 代入方程 (12)~(14) 中, 并在方程两边同时左乘 $\phi_i$ , 然后对 $x$ 从0到1积分可得

$$M_{ij} \ddot{\bar{\eta}}_j + C_{ij} \dot{\bar{\eta}}_j + K_{ij} \bar{\eta}_j + B_{ijkl} \bar{\eta}_j \bar{\eta}_k \bar{\eta}_l + D_{ijkl} \bar{\eta}_j \dot{\bar{\eta}}_k \dot{\bar{\eta}}_l + D_{ijkl} \bar{\eta}_j \bar{\eta}_k \ddot{\bar{\eta}}_l - h_1 \frac{\alpha_1}{\varepsilon} \bar{q}_{1j} - h_2 \frac{\alpha_2}{\varepsilon} \bar{q}_{2j} = 0, \quad (16)$$

$$\delta_{ij} \ddot{\bar{q}}_{1j} + \lambda_1 \Omega_{s1} (n_6 \bar{q}_{1j} \bar{q}_{1k} \dot{\bar{q}}_{1l} - \delta_{ij} \dot{\bar{q}}_{1j}) + \Omega_{s1}^2 \delta_{ij} \bar{q}_{1j} = A \varepsilon \delta_{ij} \dot{\bar{\eta}}_j, \quad (17)$$

$$\delta_{ij} \ddot{\bar{q}}_{2j} + \lambda_2 \Omega_{s2} (n_6 \bar{q}_{2j} \bar{q}_{2k} \dot{\bar{q}}_{2l} - \delta_{ij} \dot{\bar{q}}_{2j}) + \Omega_{s2}^2 \delta_{ij} \bar{q}_{2j} = A \varepsilon \delta_{ij} \dot{\bar{\eta}}_j, \quad (18)$$

其中

$$m_{ij} = \delta_{ij} + \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2, \quad K_{ij} = \bar{\delta}_{ij},$$

$$C_{ij} = \alpha \bar{\delta}_{ij} + 2\zeta \Omega_c \delta_{ij} + h_1 (\beta_1 + 2\zeta \Omega_c \gamma_1) + h_2 (\beta_2 + 2\zeta \Omega_c \gamma_2) + \frac{4\vartheta}{\pi C a} (\Omega_{s1} \gamma_1 h_7 + \Omega_{s2} \gamma_2 h_8),$$

$$B_{ijkl} = 4n_1 + n_2 + n_3, D_{ijkl} = n_4 - n_5 + \gamma_1 (h_3 - h_5) + \gamma_2 (h_4 - h_6),$$

$$\delta_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi, \bar{\delta}_{ij} = \int_0^1 \phi_i \phi_j'''' d\xi, n_1 = \int_0^1 \phi_i \phi_j' \phi_k' \phi_l'' d\xi, n_2 = \int_0^1 \phi_i \phi_j'' \phi_k'' \phi_l'' d\xi, n_3 = \int_0^1 \phi_i \phi_j' \phi_k' \phi_l'''' d\xi,$$

$$n_4 = \int_0^1 \phi_i \phi_j' \left( \int_0^\xi \phi_k' \phi_l' d\xi \right) d\xi, n_5 = \int_0^1 \phi_i \phi_j'' \left( \int_\xi^1 \phi_k' \phi_l' d\xi \right) d\xi, n_6 = \int_0^1 \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l d\xi,$$

$$h_1 = \int_0^1 [H(\xi) - H(\xi - \chi)] \phi_i \phi_j d\xi, h_2 = \int_0^1 [H(\xi - \chi) - H(\xi - 1)] \phi_i \phi_j d\xi,$$

$$h_3 = \int_0^1 \phi_i \phi_j' \int_0^\xi [H(\xi) - H(\xi - \chi)] \phi_k' \phi_l' d\xi d\xi, h_4 = \int_0^1 \phi_i \phi_j' \int_0^\xi [H(\xi - \chi) - H(\xi - 1)] \phi_k' \phi_l' d\xi d\xi,$$

$$h_5 = \int_0^1 \phi_i \phi_j'' \left( \int_\xi^1 \int_0^\xi [H(\xi) - H(\xi - \chi)] \phi_k' \phi_l' d\xi d\xi \right) d\xi,$$

$$h_6 = \int_0^1 \phi_i \phi_j'' \left( \int_\xi^1 \int_0^\xi [H(\xi - \chi) - H(\xi - 1)] \phi_k' \phi_l' d\xi d\xi \right) d\xi, h_7 = \int_0^1 [H(\xi) - H(\xi - \chi)]^2 \phi_i \phi_j d\xi,$$

$$h_8 = \int_0^1 [H(\xi - \chi) - H(\xi - 1)]^2 \phi_i \phi_j d\xi.$$

### 3 结果与分析

本文考虑圆柱体受到气-液两种横流的作用, “气-液” 分别指空气和水, 故此,  $\rho_1 = 1\,020\text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_2 = 1.29\text{ kg/m}^3$ . 此外, 如无特别说明, 本文在以下数值计算过程中, 相关系统参数取值如下<sup>[18]</sup>:

$$\begin{cases} E = 210\text{ GPa}, D = 0.25\text{ m}, D_i = 0.125\text{ m}, L = 100\text{ m}, \alpha = 0.002, Sr_1 = Sr_2 = 0.2, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.3, \\ A = 12, C_{L0} = 0.3, C_D = 1.2, \zeta = 0.001, \vartheta = 0.8, \rho_c = 7\,850\text{ kg/m}^3, \chi = 0.5. \end{cases} \quad (19)$$

在圆柱体的涡激振动研究中, 一般采用折合流速  $U_{ri}$  表示外流速  $U_i$ , 其具体形式为

$$U_{ri} = 2\pi U_i / (\Omega_1 D), \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

其中,  $\Omega_1$  为圆柱体的一阶固有频率, 涡脱频率  $\Omega_{si}$  与  $\Omega_1$  之间存在如下关系:

$$\Omega_{si} = U_{ri} Sr_i \Omega_1, \quad i = 1, 2. \quad (21)$$

由上式可知, 当折合流速等于 5 时, 涡脱频率与圆柱体一阶固有频率相同. 这表明此时圆柱体处于一阶模态锁频区内<sup>[18]</sup>.

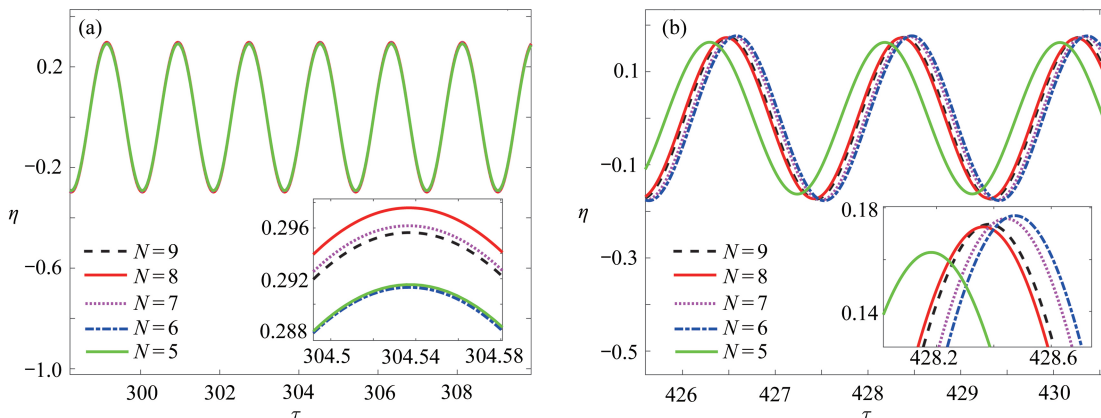


图 2 不同模态截断数  $N$  下的圆柱体自由端振幅: (a) 仅有水作用的情况,  $U_{r1} = 5$ ; (b) 空气和水共同作用的情况,  $U_{r1} = U_{r2} = 5$   
 Fig. 2 Amplitudes at the cylinder's free end for different Galerkin truncation number  $N$  values: (a) only water case,  $U_{r1} = 5$ ; (b) air-water case,  $U_{r1} = U_{r2} = 5$   
 注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同.

理论上讲, Galerkin 截断数  $N$  越大, 数值结果越收敛, 越接近精确解. 因此, 我们首先需要确定一个合适的 Galerkin 截断数  $N$ , 以便高效地得到可靠的数值结果. 截断数  $N$  的收敛性分析如图 2 所示. 图 2(a) 给出了圆柱

体仅受折合流速为5的单一外流(水)作用时的自由端振动响应,可以看出,  $N=5, 6, 7, 8, 9$ 的结果基本一致.图2(b)给出了圆柱体受折合流速均为5的两种外流(空气、水)作用的自由端振动响应,可以看出,  $N=5, 6, 7$ 的结果与  $N=8, 9$ 的结果有明显差异.结合图2(a)和2(b),基于数值计算的可靠性和计算效率,选取  $N=9$ .

为了研究圆柱体在气-液两种横流作用下的涡激振动响应,图3给出了圆柱体自由端振幅  $y_{\max}/D$  随折合流速  $U_{r1}$  和  $U_{r2}$  变化的云图.可以看出,圆柱体振幅在  $U_{r1} \approx 5$  区域内的值明显高于其他区域,且振幅的最大值出现在  $U_{r1} = U_{r2} = 5$  处.这说明,在空气和水两种横流共同作用下,圆柱体的涡激振动响应主要受水流的影响,而空气的影响甚微.这种现象的主要原因在于水的密度远大于空气的密度,黏附于圆柱体表面的附加水质量远大于附加空气质量,进而导致与水相关的流体力远大于空气的.

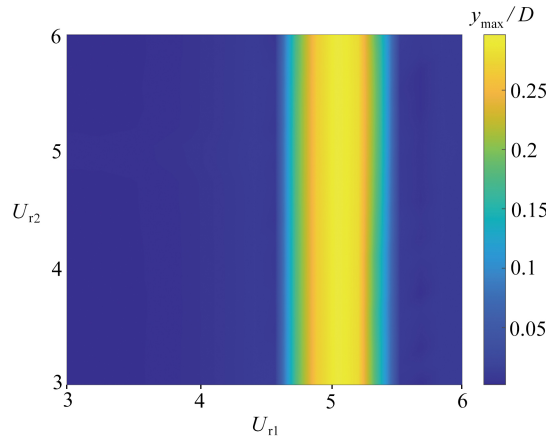


图3 圆柱体自由端振幅随折合流速  $U_{r1}$  和  $U_{r2}$  变化的云图

Fig. 3 The contour of amplitudes at the free end of the cylinder, as a function of reduced velocities  $U_{r1}$  and  $U_{r2}$

考虑到  $U_{r2}$  对圆柱体振动响应的影响较小,在后续的数值计算中默认  $U_{r1} = U_{r2}$ .接下来,本文将详细讨论流体分布比  $\chi$  和密度比  $\kappa$  以及黏弹性系数  $\alpha$  对圆柱体振动响应的影响.

流体分布比  $\chi$  对圆柱体在锁频区内振动响应的影响如图4所示.根据该图可知,随着  $\chi$  的增大,圆柱体的锁频区域逐渐扩大,振幅的最大值先增大后减小,且在  $\chi=0.5, U_{r1} = U_{r2} = 5.1$  处出现极大值.当  $\chi$  逐渐减小至 0.1 时,自由端振幅随折合流速的变化逐渐趋同于仅有空气横流的情况.这是因为  $\chi$  趋近于 0 时,系统将退化为只有空气外流作用下的涡激振动模型.当  $\chi$  逐渐增大至 0.9 时,自由端振幅随折合流速的变化逐渐趋同于仅有水流的情况,因为  $\chi=1$  时,系统退化为仅有水流作用的涡激振动模型.这种可以退化的现象反映出本文所建立的两流体作用下圆柱体的涡激振动模型的合理性和正确性.

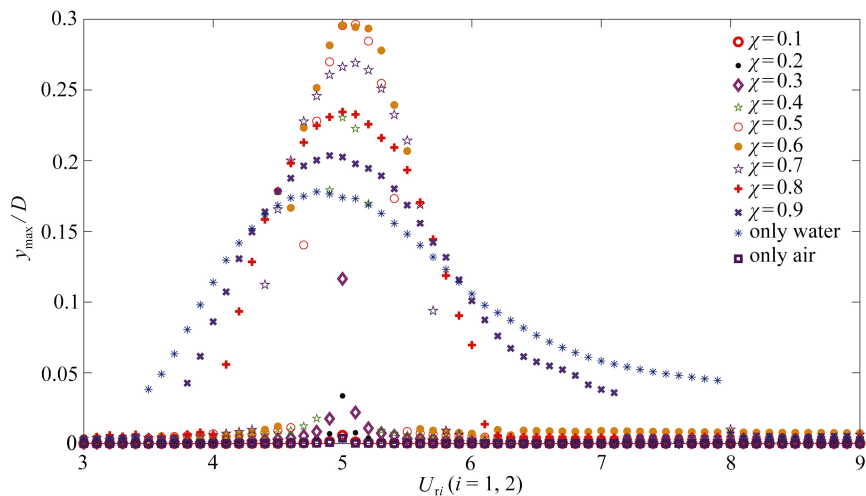


图4 不同分布比时,圆柱体自由端振幅随外流折合速度的变化曲线

Fig. 4 The relationship between the amplitude at the free end of the cylinder and the reduced velocities of external fluids with different fluid distribution ratios

由上述分析可以看出, 圆柱体在  $U_{r1} = U_{r2} = 5$  附近振幅达到最大值. 在下面的数值分析中, 为了更准确地探究其他参数对圆柱体振动响应的影响, 均选取  $U_{r1} = U_{r2} = 5$  为例进行计算.

由图 5 可知, 圆柱体自由端振幅受到分布比  $\chi$  和密度比  $\kappa$  的共同作用. 当  $\chi \leq 0.3$  时, 振幅随着  $\kappa$  的增大而增大; 当  $\chi \geq 0.4$  时, 振幅随着  $\kappa$  的增大而减小. 当  $\kappa$  不断减小时, 振幅随分布比  $\chi$  变化的曲线逐渐与空气-水的结果重合, 且曲线峰值不断增大; 当  $\kappa$  不断增大时, 曲线逐渐拉直趋于水平, 且曲线峰值逐渐减小. 这说明振幅的最大值与  $\kappa$  之间呈反比例变化. 此外, 圆柱体自由端振幅随着分布比  $\chi$  的增大先增大后减小, 该现象与图 4 中的结果吻合.

黏弹性系数  $\alpha$  对圆柱体振动响应的影响如图 6 所示. 可以发现, 不论分布比  $\chi$  为何值时, 圆柱体自由端振幅随着黏弹性系数  $\alpha$  的增大均不断减小. 这说明分布比  $\chi$  和黏弹性系数  $\alpha$  之间的耦合作用并不明显.

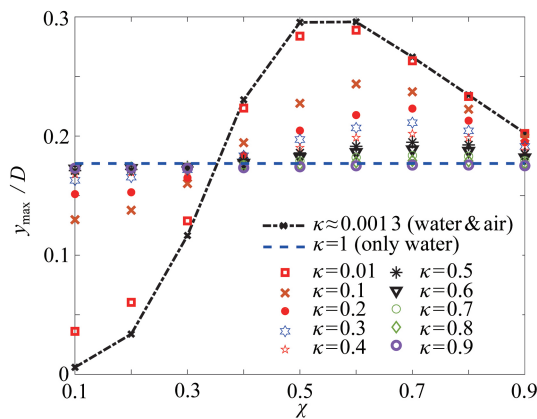


图 5  $U_{r1} = U_{r2} = 5$  时, 不同密度比作用下圆柱体自由端振幅随流体分布比的变化曲线  
Fig. 5 The relationship between the amplitude at the free end of the cylinder and the fluid distribution ratios with different fluid density ratios,  $U_{r1} = U_{r2} = 5$

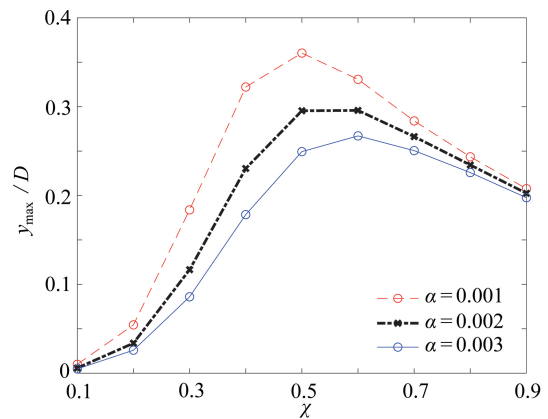


图 6  $U_{r1} = U_{r2} = 5$  时, 不同黏弹性参数作用下圆柱体自由端振幅随流体分布比的变化曲线  
Fig. 6 The relationship between the amplitude at the free end of the cylinder and the fluid distribution ratios with different viscoelastic coefficients,  $U_{r1} = U_{r2} = 5$

为了探究气-液两种横流作用下圆柱体涡激振动的具体运动形式, 图 7 和图 8 分别给出了不同分布比  $\chi$  作用下圆柱体自由端振动响应的相图和功率谱密度图. 由图 7 可知, 当  $\chi$  为 0.3 和 0.6 时, 圆柱体的相图均为标准极限环; 当  $\chi$  为 0.9 和 1 时, 圆柱体的相图均为有限数目的圆环. 分布比  $\chi$  分别为 0.3 和 0.9 时, 圆柱体振动响应的功率谱密度曲线如图 8(a) 和 (b) 所示, 可以发现, 两条曲线均十分光滑. 但是,  $\chi=0.3$  时的曲线仅含一个主峰,  $\chi=0.9$  时的曲线有多个峰值. 结合图 7 和图 8 可知, 当分布比  $\chi$  接近 1 时, 圆柱体做多周期运动, 当分布比远离 1 时, 圆柱体做单周期运动.

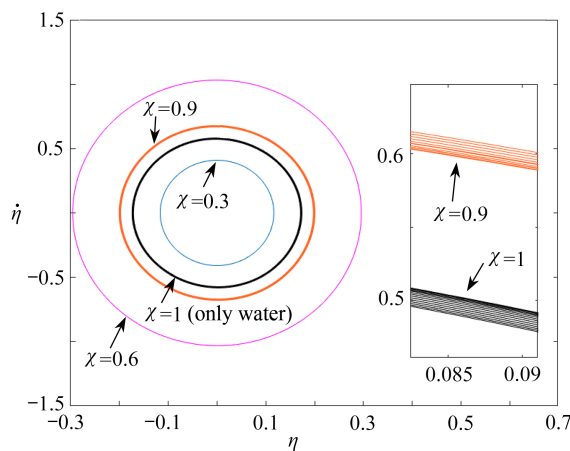


图 7  $U_{r1} = U_{r2} = 5$  时, 不同流体分布比作用下的相图  
Fig. 7 The phase portrait with different fluid distribution ratios,  $U_{r1} = U_{r2} = 5$



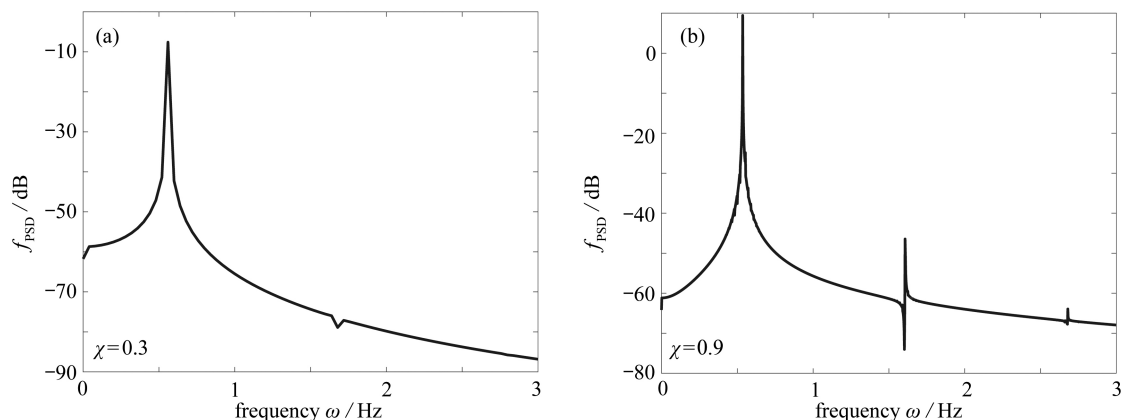


图 8  $U_{r1} = U_{r2} = 5$  时, 不同流体分布比作用下的功率谱密度图

Fig. 8 The power-spectrum-density diagrams with different fluid distribution ratios,  $U_{r1} = U_{r2} = 5$

## 4 结 论

本文构建了悬臂柱体结构受气-液两种不同横流作用下涡激振动的理论模型. 基于 Galerkin 法和 Runge-Kutta 法进行了数值求解, 研究了柱体结构在气-液两种横流作用下的涡激振动机理和规律. 研究表明, 圆柱体的涡激振动响应主要受到液流的影响, 其主要原因为液流的密度远大于气流. 当流体分布比越大, 即液流占比越大时, 圆柱体的涡激振动锁频区越大. 但是, 圆柱体在锁频区内的最大振幅随着分布比的增大呈现先增大后减小的趋势, 且峰值出现在分布比约为 0.5 附近. 此外, 该峰值随着流体密度比的减小呈现明显的增大趋势. 这说明, 当两种横流间的密度相差越大, 其可能出现的振幅极值也越大. 因此, 为防止柱体结构出现过大幅度的振动, 应避免两种横流均等分布的情况. 当分布比较小时, 柱体结构做单周期运动, 而当分布比接近 1 时, 柱体结构做多周期运动. 本文的研究成果对潜艇侦查望远镜结构的设计、分析与使用具有一定的理论指导意义.

### 参考文献 (References):

- [1] LANGRE E. Frequency lock-in is caused by coupled-mode flutter[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2006, **22**(6/7): 783-791.
- [2] BRIKA D, LANEVILLE A. Vortex-induced vibrations of a long flexible circular cylinder[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1993, **250**: 481-508.
- [3] ZHOU C Y, SO R M C, LAM K. Vortex-induced vibrations of an elastic circular cylinder[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1999, **13**(2): 165-189.
- [4] 孙云卿, 吴志强, 章国齐, 等. 海洋立管双模态动力学分岔分析[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(5): 480-490. (SUN Yunqing, WU Zhiqiang, ZHANG Guoqi, et al. Bifurcation analysis of dual-mode dynamics for marine risers[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(5): 480-490. (in Chinese))
- [5] BISHOP R E D, HASSAN A. The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1964, **277**(1368): 51-75.
- [6] GRIFFIN O M, SKOP R A, KOOPMANN G H. The vortex-excited resonant vibrations of circular cylinders[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1973, **31**(2): 235-249.
- [7] SKOP R, GRIFFIN O. On a theory for the vortex-excited oscillations of flexible cylindrical structures[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1975, **41**(3): 263-274.
- [8] SKOP R A, BALASUBRAMANIAN S. A new twist on an old model for vortex-excited vibration[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1997, **11**(4): 395-412.
- [9] FACCHINETTI M L, LANGRE E, BIOLLEY F. Coupling of structure and wake oscillators in vortex-induced vibrations[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2004, **19**(2): 123-140.
- [10] VIOLETTE R, LANGRE E, SZYDLOWSKI J. Computation of vortex-induced vibrations of long structures using a wake oscillator model: comparison with DNS and experiments[J]. *Computers & Structures*, 2007,

- 85(11/14): 1134-1141.
- [11] PAÏDOUSSIS M P, SEMLER C. Nonlinear dynamics of a fluid-conveying cantilevered pipe with an intermediate spring support[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1993, **7**(3): 269-298.
- [12] MUNIR A, ZHAO M, WU H, et al. Numerical investigation of the effect of plane boundary on two-degree-of-freedom of vortex-induced vibration of a circular cylinder in oscillatory flow[J]. *Ocean Engineering*, 2018, **148**: 17-32.
- [13] YANG W, AI Z, ZHANG X D, et al. Nonlinear three-dimensional dynamics of a marine viscoelastic riser subjected to uniform flow[J]. *Ocean Engineering*, 2018, **149**: 38-52.
- [14] GE Fei, LONG Xu, WANG Lei, et al. Flow-induced vibrations of long circular cylinders modeled by coupled nonlinear oscillators[J]. *Science in China (Series G): Physics, Mechanics and Astronomy*, 2009, **52**(7): 1086-1093.
- [15] GABBAI R D, BENAROYA H. An overview of modeling and experiments of vortex-induced vibration of circular cylinders[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, **282**(3/5): 575-616.
- [16] BLEVINS R. *Flow-Induced Vibrations*[M]. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [17] KEBER M, WIERCIGROCH M. Dynamics of a vertical riser with weak structural nonlinearity excited by wakes[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **315**(3): 685-699.
- [18] DAI Huliang, WANG Lin, QIAN Qin, et al. Vortex-induced vibrations of pipes conveying fluid in the subcritical and supercritical regimes[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2013, **39**: 322-334.