　http://www.applmathmech.cn

一类格竞争系统的双稳周期行波解*

李　俭

(西安电子科技大学 数学与统计学院, 西安 710071)

摘要: 该文研究了一类格竞争系统的双稳周期行波解的存在性.首先, 将两种群竞争系统转化为合作系统;其次,构造合作系统的上下解,并建立比较原理,得到当初始函数满足一定条件时,解在无穷远处是收敛的;最后,利用黏性消去法证明系统连接两个稳定周期平衡点的行波解的存在性.

关　键　词: 格竞争系统;　双稳周期行波解;　比较原理;　黏性消去法

中图分类号: O175.14　　**文献标志码**: A　　DOI: 10.21656/1000-0887.430071

Bistable Periodic Traveling Wave Solutions to Lattice Competitive Systems

LI Jian

(*School of Mathematics and Statistics*, *Xidian University*, *Xi' an* 710071, *P.R.China*)

Abstract: The existence of bistable periodic traveling wave solutions to lattice competitive systems was studied. Firstly, the lattice competitive system of 2 species was transformed into a cooperative system. Then, the principle of comparison was established and a pair of upper and lower solutions were given to obtain the convergence of the solution at infinity, with the initial function satisfying certain conditions. By means of the vanishing viscosity method and the principle of comparison, the existence of the traveling wave solution connecting 2 stable periodic equilibrium points of the system, was proved.

Key words: lattice competitive system; bistable periodic traveling wave; principle of comparison; vanishing viscosity method

0　引　　言

本文主要研究下面的格竞争系统双稳周期行波解的存在性:

$$\begin{cases} u_j'(t) = d_1(u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j) + u_j(r_1(t) - a_1(t)u_j - b_1(t)v_j), \\ v_j'(t) = d_2(v_{j+1} + v_{j-1} - 2v_j) + v_j(r_2(t) - a_2(t)v_j - b_2(t)u_j), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $u_j(t)$, $v_j(t)$ 表示 u, v 两个物种在 t 时刻、位置 j 处的种群密度, d_1, d_2 分别是物种 u, v 的扩散系数, $r_i(t)$ 是种群内的内禀增长率, $b_i(t)$ 是两种群之间的竞争系数, $a_i(t)$ 表示种群自身的死亡率. $r_i(t)$, $a_i(t)$, $b_i(t)$ $(i=1,2) \in C^2(\mathbb{R})$ 且为 T- 周期函数,即 $\forall t > 0$, $r_i(t+T) = r_i(t)$, $a_i(t+T) = a_i(t)$, $b_i(t+T) = b_i(t)$, 此外, $d_i > 0$, $a_i(t) > 0$, $b_i(t) > 0$, $\forall t \in [0,T]$.

系统(1)为下面时间周期 Lotka-Volterra 竞争扩散系统的空间离散形式:

* **收稿日期**: 2022-03-07; **修订日期**: 2022-04-11

作者简介: 李俭(1998—), 男, 硕士(E-mail: 2084043762@qq.com).

引用格式: 李俭. 一类格竞争系统的双稳周期行波解[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(4): 471-479.

$$\begin{cases}u_t = d_1 u_{xx} + u(r_1(t) - a_1(t)u - b_1(t)v),\\ v_t = d_2 v_{xx} + v(r_2(t) - a_2(t)v - b_2(t)u).\end{cases}$$

目前,有关 Lotka-Volterra 竞争系统行波解的研究已经越来越广泛.Bao 和 Wang 在文献[1]中研究了时间周期 Lotka-Volterra 竞争系统双稳周期行波解的存在性和稳定性.Fang 和 Zhao 在文献[2]中研究了部分退化反应扩散系统的的单调行波解.Li 在文献[3]中研究了一类部分退化合作系统行波解的存在性.Zhao 和 Ruan 在文献[4]中研究了 Lotka-Volterra 竞争扩散系统的时间周期行波解的存在性、唯一性和渐近稳定性.Hao、Li 和 Wang 在文献[5]中研究了 Lotka-Volterra 竞争系统空间周期的整体解和传播动力学.Bao、Li 和 Wang 在文献[6]中研究了 Lotka-Volterra 竞争扩散系统的时间周期行波解的渐进行为.在实际生活中,种群的活动空间通常是不连续的,因此考虑空间离散模型对生物种群动力学的研究具有重要的实际意义,同时,离散化后形成的格微分方程具有更丰富的动力学行为.Guo 和 Wu 在文献[7-8]中分别讨论了自治情形下 Lotka-Volterra 格竞争系统的单稳和双稳行波解的存在性和单调性.Wang 和 Ou 在文献[9]中讨论了 Lotka-Volterra 格竞争系统的传播方向和波速符号.Shen 在文献[10]中讨论了二维格反应扩散方程双稳周期行波解的存在性与唯一性.考虑到物种的生存环境(例如温度)和物种的死亡率、出生率会随季节发生周期性改变,故在模型中加入周期.综上,研究系统(1)的周期行波解对于预测物种的竞争情况有重大意义.为方便讨论,给出假设条件:

(A1)(双稳性假设)

$$\bar r_1 < \min_{t\in[0,T]}\left(\frac{b_1(t)}{b_2(t)}\right)\bar r_2,\ \min_{t\in[0,T]}\left(\frac{a_2(t)}{a_1(t)}\right)\bar r_1 > \bar r_2,$$

其中 $$\bar r_i = \frac{1}{T}\int_0^T r_i(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

系统(1)所对应的空间齐次系统为

$$\begin{cases}u'(t) = u(r_1(t) - a_1(t)u - b_1(t)v),\\ v'(t) = v(r_2(t) - a_2(t)v - b_2(t)u).\end{cases} \tag{2}$$

在假设条件(A1)下,系统(2)存在 4 个非负的周期解 $(0,0)$,$(p(t),0)$,$(0,q(t))$,$(u^\star(t),v^\star(t))$,此时,$(p(t),0)$,$(0,q(t))$ 在$\mathbb{R}_+$的内部是稳定的,$(u^\star(t),v^\star(t))$ 是不稳定的.其中 $p(t)$,$q(t)$ 表示如下:

$$\begin{cases}p(t) = \dfrac{p_0\mathrm{e}^{\int_0^t r_1(s)\mathrm{d}s}}{1 + p_0\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^s r_1(v)\mathrm{d}v} a_1(s)\mathrm{d}s},\ p(0) = \dfrac{\mathrm{e}^{\int_0^T r_1(s)\mathrm{d}s} - 1}{\int_0^T \mathrm{e}^{\int_0^s r_1(v)\mathrm{d}v} a_1(s)\mathrm{d}s},\\ q(t) = \dfrac{q_0\mathrm{e}^{\int_0^t r_2(s)\mathrm{d}s}}{1 + q_0\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^s r_2(v)\mathrm{d}v} b_2(s)\mathrm{d}s},\ q(0) = \dfrac{\mathrm{e}^{\int_0^T r_2(s)\mathrm{d}s} - 1}{\int_0^T \mathrm{e}^{\int_0^s r_2(v)dv} b_2(s)\mathrm{d}s}.\end{cases}$$

为方便讨论,先做一个变换:

$$\bar u_j(t) = \frac{u_j(t)}{p(t)},\ \bar v_j(t) = \frac{q(t) - v_j(t)}{q(t)}, \tag{3}$$

并将 $(\bar u_j(t),\bar v_j(t))$ 仍用$(u_j(t),v_j(t))$ 表示,得到一个合作系统:

$$\begin{cases}u_j'(t) = d_1(u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j) + u_j[a_1(t)p(t)(1 - u_j) - b_1(t)q(t)(1 - v_j)],\\ v_j'(t) = d_2(v_{j+1} + v_{j-1} - 2v_j) + (1 - v_j)[a_2(t)p(t)u_j - b_2(t)q(t)v_j].\end{cases} \tag{4}$$

由变换(3),系统(1)的周期解 $(0,0)$,$(0,q(t))$,$(p(t),0)$,$(u^\star(t),v^\star(t))$ 为对应系统(4) 的周期解$(0,1)$,$(0,0)$,$(1,1)$,$(u^*(t),v^*(t))$.定义:$\mathbf{0} = (0,0)$,$\mathbf{1} = (1,1)$.因此研究系统(1)连接两个稳定半平凡平衡点的双稳周期行波解就转化成了研究系统(4)连接两个稳定边界平衡点的双稳周期行波解.令

$$\begin{cases}f_1(u_j,v_j,t) = u_j[a_1(t)p(t)(1 - u_j) - b_1(t)q(t)(1 - v_j)],\\ f_2(u_j,v_j,t) = (1 - v_j)[a_2(t)p(t)u_j - b_2(t)q(t)v_j].\end{cases}$$

下面给出周期行波解的定义.

定义 1 系统(4)的一个解称为连接 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{1}$ 的周期行波解,若存在一个函数 $U(\cdot,\cdot) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ 和一

个常数 $c \in \mathbb{R}$ 满足：

(i) $u_j(t)=U(\xi,t),\xi=j+ct,U(\xi,t)$ 关于 t 是周期的，即有 $U(\xi,t+T)=U(\xi,t),\forall t\in\mathbb{R}$.

(ii) $U(-\infty,t)=\lim_{\xi\to-\infty}U(\xi,t)=\mathbf{0}$ 和 $U(\infty,t)=\lim_{\xi\to\infty}U(\xi,t)=\mathbf{1}$，且关于 $t\in[0,T]$ 是一致收敛的.

进一步，若 $U(\xi,t)$ 关于 $\xi\in\mathbb{R}$ 还是单调非减的，则称 $U(\xi,t)$ 是一个周期波前解.

本文通过构造合作系统(4)的上下解，并且建立比较原理，进而证明了当初始函数满足一定条件时，解在无穷远处收敛，并采用黏性消去法证明了系统(4)连接 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{1}$ 的双稳周期行波解的存在性.具体的思路是 $\forall D>0$，构造一个系统(4)的波相系统的辅助系统：

$$\begin{cases}u_t(\xi,t)+cu_\xi=D_1u_{\xi\xi}+d_1[(u(\xi+1,t)+u(\xi-1,t)-2u(\xi,t))]+\\ \qquad f_1(u(\xi,t),v(\xi,t),t),\\ v_t(\xi,t)+cv_\xi=D_2v_{\xi\xi}+d_2[(v(\xi+1,t)+v(\xi-1,t)-2v(\xi,t))]+\\ \qquad f_2(u(\xi,t),v(\xi,t),t).\end{cases}\tag{5}$$

根据文献[1]，$\forall D\in(0,1]$，系统(5)存在一个连接 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{1}$ 的双稳周期行波解 $\boldsymbol{V}^D(j+c_Dt,t)=(V_1^D(j+c_Dt,t),V_2^D(j+c_Dt,t))$，令 $D\to0$，可得系统(4)的行波解的存在性.由于格微分方程所对应的行波解没有好的光滑性，给研究带来了技术上的困难，为了克服该困难，证明 $\{\boldsymbol{V}^D(\xi,t)\}$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ 中是列紧的.

本文的剩余部分内容如下：第 1 节给出了一些假设条件、重要函数及引理；第 2 节给出了系统(4)的一对上下解和比较原理；第 3 节利用黏性消去法证明了系统(4)双稳周期行波解的存在性；最后一节给出了本文的结论.

1　预 备 知 识

令

$$\boldsymbol{u}=(u,v)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},t)=(f_1(u,v,t),f_2(u,v,t))^{\mathrm{T}},\ \Delta_2[\boldsymbol{u}]=\boldsymbol{u}(\xi+1,t)+\boldsymbol{u}(\xi-1,t)-2\boldsymbol{u}(\xi,t).$$

假设：

(H1)　$\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$，$(\boldsymbol{u},t)\to\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},t)\in\mathcal{C}^2$，

(H2)　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},t+T)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},t)$，

(H3)　系统 $\boldsymbol{u}'(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},t)$ 有 3 个周期解，$\mathbf{0},\bar{\boldsymbol{\omega}}(t),\mathbf{1}$ 且存在 $\boldsymbol{\delta}_0\gg\mathbf{0}$，满足 $\boldsymbol{\delta}_0\leqslant\bar{\boldsymbol{\omega}}(t)\leqslant\mathbf{1}-\boldsymbol{\delta}_0$.

由文献[11]，令 $\boldsymbol{E}:(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^k_+)$ 是 k 维序 Banach 空间，定义范数 $\|x\|=\|(x_1,\cdots,x_k)\|=\max\{|x_i|;1\leqslant i\leqslant k\},\forall x\in\mathbb{R}^k$.对于 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\cdots,\eta_k),\boldsymbol{\eta}'=(\eta'_1,\cdots,\eta'_k),\forall 1\leqslant i\leqslant k$，若 $\eta_i\geqslant\eta'_i$，则称 $\boldsymbol{\eta}\geqslant\boldsymbol{\eta}'$.若 $\eta_i>\eta'_i$，则称 $\boldsymbol{\eta}\gg\boldsymbol{\eta}'$.若 $\boldsymbol{\eta}\geqslant\boldsymbol{\eta}'$ 且 $\boldsymbol{\eta}\neq\boldsymbol{\eta}'$，则称 $\boldsymbol{\eta}>\boldsymbol{\eta}'$.令 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{R}^k$ 中的所有有界双边点序列组成的集合，对于 $u=(u_j)_{j\in\mathbb{Z}},v=(v_j)_{j\in\mathbb{Z}}\in\mathcal{C}$，类似上面的定义，有 $\forall j\in\mathbb{Z}$，若 $u_j\geqslant v_j$，则称 $u\geqslant v$.若 $u_j>v_j$，则称 $u\gg v$.若 $u\geqslant v$ 且 $u\neq v$，则称 $u>v$.任意 $\mathbb{R}^m$ 中的向量可认为是 $\mathbb{R}^m$ 中的常数点序列，且令

$$\mathbb{R}^m_r:=\{u\in\mathbb{R}^m:r\geqslant u\geqslant0\},\ \mathcal{C}_r:=\{u\in\mathcal{C}:r\geqslant u\geqslant0\},\qquad\forall r\in\mathbb{R}^m.$$

令 $\delta(s)\in\mathcal{C}^\infty(-\infty,\infty)$ 满足当 $|s|\leqslant1$ 时，$\delta(s)\geqslant0$；当 $|s|>1$ 时，$\delta(s)\equiv0$，并且 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(s)\mathrm{d}s=1$. $\forall h>0$，令 $\delta_h(s)=\dfrac{1}{h}\delta\left(\dfrac{s}{h}\right)$，则 $\delta_h(s)\in\mathcal{C}^\infty(-\infty,\infty)$，且当 $|s|\leqslant h$ 时，$\delta_h(s)\geqslant0$；当 $|s|>h$ 时，$\delta(s)_h\equiv0$，并且 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta_h(s)\mathrm{d}s=1$.

对于给定的一个在 $\mathbb{R}$ 上局部可积的函数 $v(x)$ 和一个正数 $h>0$，令 $v^h(x)=\int_{\mathbb{R}}\dfrac{1}{h}\delta\left(\dfrac{x-y}{h}\right)v(y)\mathrm{d}y$，如果有 $\lim_{h\to0}\dfrac{1}{h}\int_{|x-x_0|\leqslant h}|v(x)-v(x_0)|\mathrm{d}x=0$，则称 x_0 为 $v(x)$ 的一个 Lebesgue 极限点，当 x_0 为 $v(x)$ 的 Lebesgue 极限点时，有 $\lim_{h\to0}v^h(x_0)=v(x_0)$.

引理 1　令 $v(x)$ 是 $K_{r+2\rho}=\{x\in\mathbb{R}:|x|\leqslant r+2\rho\}(r>0,\rho>0)$ 上的可积函数，且对 $|\Delta x|\leqslant\rho,s\in$

$[0,r+\rho]$,有 $J_s(v,\Delta x)\equiv\int_{K_s}|v(x+\Delta x)-v(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant w_s(|\Delta x|)$,其中 $w_s(\cdot)$ 是一个连续非减函数且 $w_s(0)=0$,则对 $h\leqslant\rho$,有 $J_r(v^h,\Delta x)\leqslant w_{r+h}(|\Delta x|)$ 且 $\int_{K_s}||v|-v(\operatorname{sign}v)^h|\,\mathrm{d}x\leqslant 2w_r(h)$.

证明 该引理的证明可参考文献[12].

2 上下解与比较原理

本节给出了系统(4)的上下解,建立了无界域上的比较原理,根据文献[13-16],首先给出上下解的定义.

定义 2 若一对连续函数 $(u(\xi,t),v(\xi,t))$ 在 $\mathbb{R}\times[0,+\infty)$ 上除了有限个点 (ξ_i,t_i),$i=1,2,\cdots,n$ 外都是可微的,且满足对 $\forall t\geqslant 0,\xi\in\mathbb{R}$ 成立

$$\begin{cases}u_t(\xi,t)+cu_\xi(\xi,t)\leqslant d_1\Delta_2[u(\xi,t)]+f_1(u(\xi,t),v(\xi,t),t),\\ v_t(\xi,t)+cv_\xi(\xi,t)\leqslant d_2\Delta_2[v(\xi,t)]+f_2(u(\xi,t),v(\xi,t),t),\end{cases}\tag{6}$$

则称 $(u(\xi,t),v(\xi,t))$ 是系统(4)的下解.通过改变不等式的方向可得系统上解的定义.

令

$$\zeta(s)=\frac{1}{2}\left(1+\tanh\frac{s}{2}\right),\qquad s\in\mathbb{R}.\tag{7}$$

则有 $0<\zeta(s)<1$, $\zeta'(s)=\zeta(s)(1-\zeta(s))$, $\zeta''(s)=\zeta(s)(1-\zeta(s))(1-2\zeta(s))$.因此 $\zeta'(s)>0$, $|\zeta''(s)|\leqslant 1$, 基于以上理论基础,给出系统(4)的上下解.

引理 2 $\forall\alpha_\pm\in\mathbb{R}^2$ 且 $\alpha_-\ll\alpha_+$,当 C 充分大时,则函数

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}^+(\xi,t)=\boldsymbol{u}(t;\alpha^+)\zeta(\xi+Ct)+\boldsymbol{u}(t;\alpha^-)(1-\zeta(\xi+Ct)),\\ \boldsymbol{v}^-(\xi,t)=\boldsymbol{u}(t;\alpha^-)\zeta(\xi+Ct)+\boldsymbol{u}(t;\alpha^+)(1-\zeta(\xi+Ct))\end{cases}$$

是系统(4)的一对上下解,其中 $\boldsymbol{u}(t;\alpha_\pm)$ 是 $\boldsymbol{u}'(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},t)$, $\boldsymbol{u}(0,\alpha)=\alpha\in\mathbb{R}^2$ 的解.

证明 在该引理的证明中,仅证明 $\boldsymbol{v}^+(\xi,t)$ 是一个上解, 下解的证明可类似得到.首先,令

$$\mathfrak{L}_i[\boldsymbol{v}^+](\xi,t)=(v_i^+)_t-d_i\Delta_2[v_i^+]-f_i(\boldsymbol{v}^+,t),$$

则

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_i[\boldsymbol{v}^+](\xi,t)&=(v_i^+)_t-d_i\Delta_2[v_i^+]-f_i(\boldsymbol{v}^+,t)=\\&(\boldsymbol{u}_i(t;\alpha_+)-\boldsymbol{u}_i(t;\alpha_-))(C\zeta'(\xi+Ct)-d_i\Delta_2\zeta(\xi+Ct))+\\&f_i(\boldsymbol{u}(t;\alpha_+),t)\zeta(\xi+Ct)+f_i(\boldsymbol{u}(t;\alpha_-),t)(1-\zeta(\xi+Ct))-\\&f_i(\boldsymbol{u}(t;\alpha_+)\zeta(\xi+Ct)+\boldsymbol{u}(t;\alpha_-)(1-\zeta(\xi+Ct)),t).\end{aligned}$$

对任意的 $\xi\in\mathbb{R},t>0$, 由 Taylor 展开公式得

$$\begin{aligned}&\zeta f_i(\boldsymbol{u}(t;\alpha_+),t)+(1-\zeta)f_i(\boldsymbol{u}(t;\alpha_-),t)-f_i(\boldsymbol{u}(t;\alpha_+)\zeta+\boldsymbol{u}(t;\alpha_-)(1-\zeta),t)=\\&\quad\zeta[f_i(\boldsymbol{u}(t;\alpha_+),t)-f_i(\boldsymbol{u}(t;\alpha_+)\zeta+\boldsymbol{u}(t;\alpha_-)(1-\zeta),t)]+\\&\quad(1-\zeta)[f_i(\boldsymbol{u}(t;\alpha_-),t)-f_i(\boldsymbol{u}(t;\alpha_+)\zeta+\boldsymbol{u}(t;\alpha_-)(1-\zeta),t)]-\\&\quad f_i(\boldsymbol{u}(t;\alpha_+)\zeta(\xi+Ct)+\boldsymbol{u}(t;\alpha_-)(1-\zeta),t)=\\&\quad\frac{\zeta(1-\zeta)}{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left[(1-\zeta)\frac{\partial^2 f_i(\bar{y}(\xi,t),t)}{\partial\xi_j\xi_k}+\zeta\frac{\partial^2 f_i(\tilde{y}(\xi,t),t)}{\partial\xi_j\xi_k}\right]\times\\&\quad(\boldsymbol{u}_j(t;\alpha_+)-\boldsymbol{u}_j(t;\alpha_-))(\boldsymbol{u}_k(t;\alpha_+)-\boldsymbol{u}_k(t;\alpha_-)),\end{aligned}$$

其中 $\bar{y}(\xi,t),\tilde{y}(\xi,t)\in(\boldsymbol{u}(t;\alpha_-),\boldsymbol{u}(t;\alpha_+))$.

令

$$\begin{aligned}C:=\max&\left\{\frac{d_i\Delta_2\zeta(\xi+Ct)}{\zeta(\xi+Ct)(1-\zeta(\xi+Ct))}\right\}+\frac{1}{2}\sup\left\{\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left[(1-\zeta)\frac{\partial^2 f_i(z(\xi,t),t)}{\partial\xi_j\xi_k}+\right.\right.\\&\left.\left.\zeta\frac{\partial^2 f_i(z(\xi,t),t)}{\partial\xi_j\xi_k}\right]\times\frac{(\boldsymbol{u}_j(t;\alpha_+)-\boldsymbol{u}_j(t;\alpha_-))(\boldsymbol{u}_k(t;\alpha_+)-\boldsymbol{u}_k(t;\alpha_-))}{\boldsymbol{u}_i(t;\alpha_+)-\boldsymbol{u}_i(t;\alpha_-)}\right\},\qquad i=1,2,\end{aligned}$$

其中, $z(\xi,t)\in(\boldsymbol{v}(t;\alpha_-),\boldsymbol{v}(t;\alpha_+))$, $t\geqslant 0$.则

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}_i[\boldsymbol{v}^+](\xi,t)\geqslant\\&(\boldsymbol{u}_i(t;\alpha_+)-\boldsymbol{u}_i(t;\alpha_-))\zeta(\xi+Ct)(1-\zeta(\xi+Ct))\left\{C-\frac{d_i\Delta_2\zeta(\xi+Ct)}{\zeta(\xi+Ct)(1-\zeta(\xi+Ct))}-\right.\\&\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left[(1-\zeta)\frac{\partial^2 f_i(\bar{y}(\xi,t),t)}{\partial\xi_j\xi_k}+\zeta\frac{\partial^2 f_i(\tilde{y}(\xi,t),t)}{\partial\xi_j\xi_k}\right]\times\\&\frac{(\boldsymbol{u}_j(t;\alpha_+)-\boldsymbol{u}_j(t;\alpha_-))(\boldsymbol{u}_k(t;\alpha_+)-\boldsymbol{u}_k(t;\alpha_-))}{\boldsymbol{u}_i(t;\alpha_+)-\boldsymbol{u}_i(t;\alpha_-)}\geqslant 0.\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{v}^+(\xi,t)$ 是系统(4)的上解，引理得证.

引理 3　对任意给定的 $L>0,\boldsymbol{d}=\operatorname{diag}(d_1,d_2)$，令 $\bar{\boldsymbol{u}}(\xi,t),\underline{\boldsymbol{u}}(\xi,t):\mathbb{R}\times[0,\infty)\to[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ 是两个连续的函数满足：

(i) $\begin{cases}\bar{\boldsymbol{u}}_t+c\bar{\boldsymbol{u}}_\xi\geqslant\boldsymbol{d}\Delta_2[\bar{\boldsymbol{u}}(\xi,t)]+\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{u}}(\xi,t),t),\\ \underline{\boldsymbol{u}}_t+c\underline{\boldsymbol{u}}_\xi\leqslant\boldsymbol{d}\Delta_2[\underline{\boldsymbol{u}}(\xi,t)]+\boldsymbol{f}(\underline{\boldsymbol{u}}(\xi,t),t),\end{cases}\quad\forall\xi\in\mathbb{R}\setminus[-L,L],\ t>0;$

(ii) $\bar{\boldsymbol{u}}(\xi,0)\geqslant\underline{\boldsymbol{u}}(\xi,0),\forall\xi\in\mathbb{R}$，且 $\bar{\boldsymbol{u}}(\xi,t)\geqslant\underline{\boldsymbol{u}}(\xi,t),\forall\xi\in[-L,L],\ t\geqslant 0$.

则 $\bar{\boldsymbol{u}}(\xi,t)\geqslant\underline{\boldsymbol{u}}(\xi,t),\forall\xi\in\mathbb{R},t\geqslant 0$.

证明　令 $\boldsymbol{w}(\xi,t)=(w_1(\xi,t),w_2(\xi,t)):=\bar{\boldsymbol{u}}(\xi,t)-\underline{\boldsymbol{u}}(\xi,t),\forall\xi\in\mathbb{R},t\geqslant 0$.则 $\boldsymbol{w}(\xi,t)\in[-\mathbf{1},\mathbf{1}]$ 且满足 $\forall i=1,2$ 有

$$(w_i)_t+c(w_i)_\xi\geqslant d_i\Delta_2[w_i]+f_i(\bar{\boldsymbol{u}},t)-f_i(\underline{\boldsymbol{u}},t),\qquad\xi\in\mathbb{R}\setminus[-L,L],\ t\geqslant 0.\tag{8}$$

选择充分大的 $K>0$，满足 $(7/4)K-|c|-(3/2)L_f-\max\{d_1,d_2\}>0$，其中

$$L_f=\max_{1\leqslant i\leqslant 2}\sup_{\boldsymbol{u}\in[\mathbf{0},\mathbf{1}],t\geqslant 0}\left|\frac{\partial f_i(\boldsymbol{u},t)}{\partial\boldsymbol{u}_i}\right|.$$

假定结论不成立，则存在 $i\in\{1,2\},\varpi>0$ 和 $t_0>0$，满足 $\forall\xi\in\mathbb{R},t\in[0,t_0),w_i(\xi,t)>-\varpi e^{2Kt}$，$\inf_{\xi\in\mathbb{R}}w_i(\xi,t_0)=-\varpi e^{2Kt_0}$ 且当 $k\neq i$ 时，$w_k(\xi,t)\geqslant 0$，存在一个有界集 $S\subseteq\mathbb{R}$ 满足 $\forall\xi\in S,\ w_i(\xi,t_0)\leqslant-(15/16)\varpi e^{2Kt_0}$.

令 $\zeta_0(\xi)$ 是一个光滑函数，满足 $\min_{\xi\in\mathbb{R}}\zeta_0(\xi)=1$，当 $\xi\in S$，$\zeta_0(\xi)=1$，$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\zeta_0(\xi)=\zeta_0(\pm\infty)=3$，$|\zeta_0'(\cdot)|\leqslant 1,|\zeta_0''(\cdot)|\leqslant 1$. $\forall\alpha\in[0,1]$，定义函数：$z(\xi,t,\alpha)=-\varpi(3/4+\alpha\zeta_0(\xi))e^{2Kt}$，则 $(\partial/\partial\alpha)z(\xi,t,\alpha)=-\varpi\zeta_0(\xi)e^{2Kt}<0,\forall\alpha\in[0,1],\xi\in\mathbb{R},t\in[0,T]$，成立

$$z\left(\xi,t,\frac{1}{4}\right)=-\varpi\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\zeta_0(\xi)\right)e^{2Kt}\leqslant-\varpi e^{2Kt}\leqslant w_i(\xi,t),\qquad\forall\xi\in\mathbb{R},\ t\in[0,t_0],$$

$$z\left(\xi,t_0,\frac{1}{8}\right)=-\varpi\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\zeta_0(\xi)\right)e^{2Kt_0}=-\frac{7}{8}\varpi e^{2Kt_0}>w_i(\xi,t_0),\qquad\forall\xi\in S.$$

定义 $\alpha^*=\inf\{\alpha\in(1/8,1/4]\mid w_i(\xi,t)\geqslant z(\xi,t,\alpha),\forall\xi\in\mathbb{R},t\in[0,t_0]\}$.根据定义，有 $w_i(\xi,t)\geqslant z(\xi,t,\alpha^*)$，由于 $w_i(\xi,0)\geqslant 0>z(\xi,0,\alpha^*)$；$z(\pm\infty,t,\alpha^*)\leqslant-(9/8)\varpi e^{2Kt}<w_i(\xi,t),\forall\xi\in\mathbb{R},t\in[0,t_0]$；$w_i(\xi,t)>z(\xi,t,\alpha^*),\xi\in[-L,L],t\in[0,t_0]$；令 $H(\xi,t)=w_i(\xi,t)-z(\xi,t,\alpha^*)$ 在 $(\xi_1,t_1)\in\mathbb{R}\setminus[-L,L]\times[0,t_0]$ 处达到最小值 0，则 $H(\xi_1,t_1)=0,H_t(\xi_1,t_1)\leqslant 0,H_\xi(\xi_1,t_1)=0$，由式(8)且 $w_k(\xi,t)\geqslant 0$ 可得

$$\begin{aligned}0\geqslant{}&H_t(\xi_1,t_1)+cH_\xi(\xi_1,t_1)-d_i[H(\xi_1+1,t_1)+H(\xi_1-1,t_1)-2H(\xi_1,t_1)]\geqslant\\&f_i(\bar{\boldsymbol{u}},t)-f_i(\underline{\boldsymbol{u}},t)-[z_t+cz_\xi-d_i(z(\xi+1,t)+z(\xi-1,t)-2z(\xi,t))]\mid_{(\xi_1,t_1)}=\\&\sum_{k=1}^{2}f_i(\boldsymbol{\eta}(\xi_1,t_1),t_1)w_k(\xi_1,t_1)+\varpi\left[2K\left(\frac{3}{4}+\alpha^*\zeta_0(\xi)\right)e^{2Kt_1}+c\alpha^*\zeta_0(\xi)e^{2Kt_1}\right]\geqslant\\&\partial_if_i(\boldsymbol{\eta}(\xi_1,t_1),t_1)w_i(\xi_1,t_1)+\left(\frac{7}{4}K-|c|-d_i\right)\varpi e^{2Kt_1}=\\&-\partial_if_i(\boldsymbol{\eta}(\xi_1,t_1),t_1)\varpi\left(\frac{3}{4}+\alpha^*\zeta_0(\xi)\right)e^{2Kt_1}+\left(\frac{7}{4}K-|c|-d_i\right)\varpi e^{2Kt_1}\geqslant\end{aligned}$$

$$\left[\frac{7}{4}K - |c| - \frac{3}{2}L_f - \max\{d_1, d_2\}\right]\varpi\,\mathrm{e}^{2Kt_1} > 0,$$

其中 $\boldsymbol{\eta}(\xi_1, t_1) = \theta\bar{\boldsymbol{u}}(\xi_1, t_1) + (1-\theta)\underline{\boldsymbol{u}}(\xi_1, t_1), \theta \in (0,1)$，由上述不等式，得到矛盾。所以 $\bar{\boldsymbol{u}}(\xi, t) \geqslant \underline{\boldsymbol{u}}(\xi, t)$，$\forall \xi \in \mathbb{R}, t \geqslant 0$。引理得证。

3　双稳周期行波解的存在性

本节利用黏性消去法证明双稳周期行波解的存在性，假设条件（A1）对系统（4）成立，在之后出现的定理和引理的叙述中，不再赘述。基于第 2 节的理论，考虑下面的辅助系统：

$$\begin{cases} u_t(\xi,t) + cu_\xi(\xi,t) = D_1 u_{\xi\xi} + d_1[u(\xi+1,t) + u(\xi-1,t) - 2u(\xi,t)] + f_1(\boldsymbol{u}(\xi,t),t), \\ v_t(\xi,t) + cv_\xi(\xi,t) = D_2 v_{\xi\xi} + d_2[v(\xi+1,t) + v(\xi-1,t) - 2v(\xi,t)] + f_2(\boldsymbol{v}(\xi,t),t). \end{cases} \tag{9}$$

根据文献[11]和文献[17]中的定理 5.1 和注 5.1 有：

引理 4　对 $D > 0$，系统（9）有一个唯一的周期行波解 $\boldsymbol{u}^D(\xi,t) = \phi^D(\xi + c_D t, t)$。其中 $\phi^D(0,0) = \bar{\boldsymbol{w}}(0)$，$c_D$ 是一个常数且 $\chi_+^D(0;\delta) - \chi_-^D(0;\delta) = O(1)$，其中 $\phi^D(\chi_\pm^D(0;\delta)) = \bar{\boldsymbol{w}}(0) \pm \delta$。

基于以上结果，下面研究 $\{\phi^D(\xi,t) : D > 0\}$ 在 $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ 中的列紧性。令 $\boldsymbol{V}^D(\xi,t) = \phi^D(\xi,t)$，则 $\boldsymbol{V}^D(\xi,t)$ 满足方程：

$$\boldsymbol{u}_t + c_D \boldsymbol{u}_\xi = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{\xi\xi} + d\Delta_2[\boldsymbol{u}] + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u},t), \tag{10}$$

其中　$\boldsymbol{A} = (D_1, D_2)^{\mathrm{T}}$.

注 1　由引理 3 及双稳性假设，若 $\forall \xi \in \mathbb{R}, \boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{u}_0(\xi) \leqslant \boldsymbol{1}$，则有 $\boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{u}(\xi,t;\boldsymbol{u}_0) \leqslant \boldsymbol{1}$；由引理 4，若 $\forall \xi \in \mathbb{R}, \boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{u}_0(\xi) \leqslant \boldsymbol{1}$ 且 $\boldsymbol{u}_0(\infty) = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{u}_0(-\infty) = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{u}(+\infty, t; \boldsymbol{u}_0) = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{u}(-\infty, t; \boldsymbol{u}_0) = \boldsymbol{0}$.

引理 5　$\{\boldsymbol{V}^D(\xi,t) : D > 0\}$ 在 $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ 是列紧的.

证明　该引理的证明思路来源于文献[18]的引理 4.1，只需证明 $\forall i = 1,2$，$\{V_i^D(\xi,t) : D \in (0,1]\}$ 在 $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ 是列紧的.

对任意的 $i = 1,2$，因为 $0 \leqslant V_i^D(\xi,t) \leqslant 1$ 且关于 ξ 单调，因此 $\forall r > 0$，存在一个连续非减函数 $W_r(\cdot)$ 满足 $W_r(0) = 0$ 且

$$\int_{|\xi| \leqslant r} |V_i^D(\xi + \Delta\xi, t) - V_i^D(\xi,t)|\,\mathrm{d}\xi \leqslant W_r|\Delta\xi|. \tag{11}$$

下面证明存在一个连续非减函数 $\bar{W}_r(\cdot)$ 满足 $\bar{W}_r(0) = 0$ 且

$$\int_{|\xi| \leqslant r} |V_i^D(\xi, t + \Delta t) - V_i^D(\xi,t)|\,\mathrm{d}\xi \leqslant \bar{W}_r|\Delta t|. \tag{12}$$

对给定的 $r > 0, 0 < h < r$，令

$$\beta(\xi) := \begin{cases} \operatorname{sign}(V_i^D(\xi, t+\Delta t) - V_i^D(\xi,t)), & |\xi| \leqslant r - h, \\ 0, & |\xi| > r - h, \end{cases}$$

$$g(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h}\delta\left(\frac{\xi - y}{h}\right)\beta(y)\,\mathrm{d}y, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

其中 $\delta(s)$ 已经在预备知识中给出。不难得到 $g(\xi)$ 的紧支集 $\operatorname{supp} g \subseteq K_r := \{\xi \in \mathbb{R} \mid |\xi| \leqslant r\}$，且 $|g(\xi)| \leqslant 1$，$|g_\xi| \leqslant C_1/h$，$|g_{\xi\xi}| \leqslant C_2/h^2$，$C_1, C_2$ 是依赖于 D, h 的常数，基于上述理论，有

$$\begin{aligned} &\int_{|\xi| \leqslant r} g(\xi)[V_i^D(\xi, t+\Delta t) - V_i^D(\xi,t)]\,\mathrm{d}\xi = \\ &\quad \int_{|\xi| \leqslant r}\int_t^{t+\Delta t} g(\xi)(V_i^D)_t(\xi,t)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi = \\ &\quad \int_t^{t+\Delta t}\int_{|\xi| \leqslant r} g(\xi)[-c_D(V_i^D)_\xi + A(V_i^D)_{\xi\xi} + d_i\Delta_2 V_i^D + f_i(\boldsymbol{V}^D(\xi,t),t)]\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi = \\ &\quad \int_t^{t+\Delta t}\int_{|\xi| \leqslant r} [c_D V_i^D g_\xi + AV_i^D g_{\xi\xi} + d_i V_i^D \Delta_2 g(\xi) + f_i(\boldsymbol{V}^D(\xi,t),t)g(\xi)]\,\mathrm{d}t\mathrm{d}\xi \leqslant \end{aligned}$$

$$C_r \Delta t \max_{|\xi| \leqslant r}[|g| + |g_\xi| + |g_{\xi\xi}|],$$

其中 C_r 是一个依赖于 r 的常数.根据文献[10]的引理 2.1，$\forall h \in (0, \min\{1, r/2\}]$，有

$$\begin{aligned}
&\int_{|\xi| \leqslant r} |V_i^D(\xi, t+\Delta t) - V_i^D(\xi, t)| \mathrm{d}\xi \leqslant \\
&\quad \int_{|\xi| \leqslant r-h} |V_i^D(\xi, t+\Delta t) - V_i^D(\xi, t)| \mathrm{d}\xi + C_3 h \leqslant \\
&\quad \int_{|\xi| \leqslant r-h} (V_i^D(\xi, t+\Delta t) - V_i^D(\xi, t)) g(\xi) \mathrm{d}\xi + C_4 W_{r-h}(h) + C_3 h \leqslant \\
&\quad \int_{|\xi| \leqslant r} (V_i^D(\xi, t+\Delta t) - V_i^D(\xi, t)) g(\xi) \mathrm{d}\xi + C_4 W_r(h) + C_3 h \leqslant \\
&\quad C_5\left(\frac{|\Delta t|}{h^2} + W_r(h) + h\right),
\end{aligned}$$

其中，C_3, C_4, C_5 是依赖于 D, h, t 的常数.令 $\bar{W}_r(\Delta t) := C_5 \min_{h \in (0, \min\{0, r/2\}]}[|\Delta t|/h^2 + W_r(h) + h]$，则

$$\int_{|\xi| \leqslant r} |V_i^D(\xi, t+\Delta t) - V_i^D(\xi, t)| \mathrm{d}\xi \leqslant \bar{W}_r |\Delta t|.$$

再由式(11)、(12)可得，$\{V_i^D(\xi, t): D \in (0,1]\}$ 在 $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ 是列紧的，引理得证.

由引理 4，对 $D_1 > 0, D_2 > 0$，系统(9)有唯一的周期行波解 $\boldsymbol{u}^D(\xi, t) = \boldsymbol{\phi}^D(\xi + c_D t, t)$.由引理 5，令 $D_k \to 0, c_0 \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\phi}^0(\cdot, \cdot) \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$，满足

$$\boldsymbol{\phi}^{D_k}(\xi, t) \to \boldsymbol{\phi}^0(\xi, t), \qquad \text{a.e.} \quad (\xi, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

因此存在一个可测集 $E_0 \subseteq \mathbb{R}$ 满足 $m(\mathbb{R} \setminus E_0) = 0$，$\forall t \in E_0$，有

$$\boldsymbol{\phi}^{D_k}(\xi, t) \to \boldsymbol{\phi}^0(\xi, t), \qquad \text{a.e.} \quad (\xi, t) \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

由 $\boldsymbol{\phi}^D(\xi, t)$ 关于 ξ 的单调性，假设 $0 \in E_0$，$\forall t \in \mathbb{R} \setminus E_0$，存在 $\{D_{k'}\} \subset \{D_k\}$ 满足

$$\boldsymbol{\phi}^{D_{k'}}(\xi, t) \to \boldsymbol{\phi}^0(\xi, t), \qquad \text{a.e.} \quad (\xi, t) \in \mathbb{R}.$$

由于 $\boldsymbol{\phi}^0(\xi, t)$ 关于 ξ 是单调的，则 $\mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{\phi}^0(\xi, t) \leqslant \mathbf{1}$. $\forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^2$，令 $\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi, t) := \boldsymbol{\phi}^0(\xi + c_0 t, t)$，断言

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi, t) = \tilde{\boldsymbol{u}}(\xi, 0) + \int_0^t [d\Delta_2 \tilde{\boldsymbol{u}}(\xi, \tau) + \boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi, \tau), \tau)] \mathrm{d}\tau.$$

令 $\boldsymbol{\phi}^k(\xi, t) := \boldsymbol{\phi}^{D_k}(\xi, t)$，$\boldsymbol{V}^k(\xi, t) = \boldsymbol{\phi}^k(\xi + c_0 t, t)$.由系统(9)，得

$$\boldsymbol{\phi}_t^k + c_{D_k} \boldsymbol{\phi}_\xi^k = D_k \boldsymbol{\phi}_{\xi\xi} + d\Delta_2 \boldsymbol{\phi}^k + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\phi}^k, t),$$

则有

$$\boldsymbol{V}_t^k + (c_{D_k} - c_0) \boldsymbol{V}_\xi^k = D_k \boldsymbol{V}_{\xi\xi} + d\Delta_2 \boldsymbol{V}^k + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}^k, t).$$

对给定的 $0 < t < \infty$，存在 $\{D_{k'}\} \subset \{D_k\}$ 满足 $\forall \tau \in (\mathbb{R} \cap [0, t]) \cup \{0, t\}$，成立

$$\boldsymbol{V}^{k'}(\xi, \tau) \to \tilde{\boldsymbol{u}}(\xi, \tau), \qquad \text{a.e.} \quad (\xi, t) \in \mathbb{R}.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理，对任何具有紧支集的 $s(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$，有

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \tilde{\boldsymbol{u}}(\xi, t) s(\xi) \mathrm{d}\xi = \lim_{k' \to \infty} \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{V}^{k'}(\xi, t) s(\xi) \mathrm{d}\xi = \\
&\quad \lim_{k' \to \infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \boldsymbol{V}^{k'}(\xi, 0) s(\xi) \mathrm{d}\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} ((c_D^{k'} - c_0) \boldsymbol{V}^{k'}(\xi, \tau) s_\xi(\xi) + D_{k'} \boldsymbol{V}^{k'}(\xi, \tau) s_{\xi\xi}) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau + \right. \\
&\quad \left. \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (d\Delta_2 \boldsymbol{V}^{k'}(\xi, \tau) s(\xi) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{V}^{k'}(x, \tau), \tau) s(\xi)) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau \right\} = \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \tilde{\boldsymbol{u}}(\xi, 0) s(\xi) \mathrm{d}\xi + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (d\Delta_2 \tilde{\boldsymbol{u}}(\xi, \tau) + \boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{u}}(x, \tau), \tau) s(\xi)) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

根据 Fubini 定理得

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi, t) = \tilde{\boldsymbol{u}}(\xi, 0) + \int_0^t [d\Delta_2 \tilde{\boldsymbol{u}}(\xi, \tau) + \boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi, \tau), \tau)] \mathrm{d}\tau, \qquad \text{a.e.} \quad (\xi, t) \in \mathbb{R}.$$

基于上述理论，下面给出存在性结果.

定理 1　令 $\boldsymbol{\phi}^0(\xi, t)$ 由式(13)所定义，则 $\boldsymbol{u}^{\pm}(\xi, t) = \boldsymbol{\phi}^{\pm}(\xi + c_0 t, t)$ 是系统(4)连接 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{1}$ 的双稳周期行

波解.其中 $\phi^{\pm}(\xi,t)=\phi^0(\xi\pm 0,t)$.

证明 由上述断言和 $\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi,t)$ 关于 ξ 的单调性可得

$$\begin{cases}\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi-0,t)=\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi-0,0)+\int_0^t[d\Delta_2\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi-0,\tau)+\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi-0,\tau),\tau)]\mathrm{d}\tau,\\ \tilde{\boldsymbol{u}}(\xi+0,t)=\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi+0,0)+\int_0^t[d\Delta_2\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi+0,\tau)+\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi+0,\tau),\tau)]\mathrm{d}\tau.\end{cases}$$

考虑

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_t=d\Delta_2\boldsymbol{u}(\xi,t)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(\xi,t),t),\\ \boldsymbol{u}(\xi,0)=\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi-0,0),\end{cases}\tag{14}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{u}_t=d\Delta_2\boldsymbol{u}(\xi,t)+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}(\xi,t),t),\\ \boldsymbol{u}(\xi,0)=\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi+0,0).\end{cases}\tag{15}$$

令 $\boldsymbol{u}^-(\xi,t)$ 和 $\boldsymbol{u}^+(\xi,t)$ 是问题(14)和(15)的解,由问题(14)和(15)的解的唯一性得 $\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi-0,t)=\boldsymbol{u}^-(\xi,t)$, $\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi+0,t)=\boldsymbol{u}^+(\xi,t)$, $\forall\xi\in\mathbb{R},t\geqslant 0$.

注意到 $\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi,t)=\phi^0(\xi+c_0t,t)$, 因此

$$\boldsymbol{u}^-(\xi,t)=\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi-0,t)=\phi^0(\xi+c_0t-0,t)=\phi^+(\xi+c_0t,t),\boldsymbol{u}^+(\xi,t)=\tilde{\boldsymbol{u}}(\xi+0,t)=\phi^0(\xi+c_0t+0,t)=\phi^+(\xi+c_0t,t).$$

则 $\phi^{\pm}(\xi,t+T)=\phi^{\pm}(\xi,t)$.下证 $\phi^0(\infty,t)=\boldsymbol{1},\phi^0(-\infty,t)=\boldsymbol{0}$.

由引理 2 可知, $\boldsymbol{v}^+(\xi,t)$ 是系统(4)的上解,由比较原理,有

$$\boldsymbol{v}^+(\xi,t)\geqslant\phi^0(\xi+ct+0,t),\qquad \text{a.e.}\quad(\xi,t)\in\mathbb{R}.$$

根据双稳假设条件, $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{v}^+(-\infty,nT)=\boldsymbol{0}$,由于 $\phi^0(\xi\pm 0,t)$ 关于 t 是周期的,所以有 $\phi^0(-\infty,0)=\boldsymbol{0}$.类似可证 $\phi^0(\infty,0)=\boldsymbol{1}$,再根据注 1, $\forall t\geqslant 0,\phi^0(-\infty,t)=\boldsymbol{0},\phi^0(\infty,t)=\boldsymbol{1}$, 定理证毕.

4 结 论

本文致力于研究格竞争系统的双稳周期行波解.首先,将非单调的竞争系统转化为合作系统,其次,建立了无界域上的比较原理,给出合作系统的一对上下解,最后利用黏性消去法和比较原理的方法证明格竞争系统连接两个稳定周期平衡点行波解的存在性.本文仅研究了格竞争系统双稳周期行波解的存在性,对于行波解的唯一性、稳定性、单调性以及双稳行波的波速符号等问题尚未有任何结果,这将是笔者下一步需要解决的问题.

参考文献(References):

[1] BAO X X, WANG Z C. Existence and stability of time periodic traveling waves for a periodic bistable Lotka-Volterra competition system[J]. *Journal of Differential Equations*, 2013, **255**: 2402-2435.

[2] FANG J, ZHAO X Q. Monotone wavefronts for partially degenerate reaction-diffusion systems[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2009, **21**: 663-680.

[3] LI B. Traveling wave solutions in partially degenerate cooperative reaction-diffusion systems[J]. *Journal of Differential Equations*, 2012, **252**(9): 4842-4861.

[4] ZHAO G Y, RUAN S G. Existence, uniqueness and asymptotic stability of time periodic traveling waves for a periodic Lotka-Volterra competition system with diffusion[J]. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2011, **95**(6): 627-671.

[5] HAO Y X, LI W T, WANG J B. Propagation dynamics of Lotka-Volterra competition systems with asymmetric dispersal in periodic habits[J]. *Journal of Differential Equations*, 2021, **300**: 185-225.

[6] BAO X X, LI W T, WANG Z C. Time periodic traveling curved fronts in the periodic Lotka-Volterra competition diffusion system[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2017, **29**: 981-1016.

[7] GUO J S, WU C H. Wave propagation for a two-component lattice dynamical system arising in strong competi-

tion models[J]. *Journal of Differential Equations*, 2011, **250**: 3504-3533.

[8] GUO J S, WU C H. Traveling wave front for a two-component lattice dynamical system arising in competition models[J]. *Journal of Differential Equations*, 2012, **252**: 4357-4391.

[9] WANG H Y, OU C H. Propagation direction of the traveling wave for the Lotka-Volterra competitive lattice system[J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2021, **33**: 1153-1174.

[10] SHEN W X. Traveling waves in time periodic lattice differential equations[J]. *Nonlinear Analysis*, 2003, **54**(2): 319-339.

[11] ZHANG K F, ZHAO X Q. Spreading speed and traveling waves for a spatially discrete SIS epidemic model[J]. *Nonlinearity*, 2008, **21**(1): 97-112.

[12] KRUXZKOV S N. First order quasilinear equations in several independent variables[J]. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1970, **10**: 217-243.

[13] GUO J S, HAMEL F. Front propagation for discrete periodic monostable equations[J]. *Mathematische Annalen*, 2006, **335**: 489-525.

[14] CHEN X F, GUO J S, WU C C. Traveling waves in discrete periodic media for bistable dynamics[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2008, **189**: 189-236.

[15] 陈妍. 时间周期的离散 SIS 模型的传播动力学[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(10): 1155-1163.(CHEN Yan. Propagation dynamics of a discrete SIS model with time periodicity[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(10): 1155-1163.(in Chinese))

[16] 郑景盼. 三物种竞争-扩散系统双稳行波解的波速符号[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(12): 1296-1305.(ZHENG Jingpan. The wave speed signs for bistable traveling wave solutions in 3-species competition-diffusion systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(12): 1296-1305.(in Chinese))

[17] SHEN W X. Traveling waves in time almost periodic structures governed by bistable nonlinearities, Ⅱ: existence[J]. *Journal of Differential Equations*, 1999, **159**(1): 55-101.

[18] WU S L, HSU C H. Periodic traveling fronts for partially degenerate reaction-diffusion systems with bistable and time-periodic nonlinearity[J]. *Advances in Nonlinear Analysis*, 2020, **9**: 923-957.