

### 基于黏聚区模型的ENF试件层间裂纹扩展分析

邓 健, 肖鹏程, 王增贤, 邵光冉, 卢天健

### Interlaminar Crack Propagation Analysis of ENF Specimens Based on the Cohesive Zone Model

DENG Jian, XIAO Pengcheng, WANG Zengxian, SHAO Guangran, and LU Tianjian

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.430082>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 圆形杂质对裂纹扩展的影响

Effects of Circular Inhomogeneity on Crack Propagation

应用数学和力学. 2019, 40(2): 189–199 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390136>

#### 求解双材料裂纹结构全域应力场的扩展边界元法

Computation of Total Stress Fields for Cracked Bi-Material Structures With the Extended Boundary Element Method

应用数学和力学. 2019, 40(8): 926–937 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400013>

#### 裂纹面局部均布荷载下 I 型裂纹有限宽板应力强度因子

The Stress Intensity Factor of a Finite Width Plate With a Mode-I Center Crack Subjected to Uniform Stress on the Crack Surface Near the Crack Tip

应用数学和力学. 2020, 41(10): 1083–1091 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410130>

#### 构成单材料裂纹和双材料界面裂纹有限应力集中的一般解析函数

Construction of General Analytic Functions With Finite Stress Concentration for Mono-Material Cracks and Bi-Material Interface Cracks

应用数学和力学. 2018, 39(12): 1364–1376 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390030>

#### 带裂纹十次对称二维准晶平面弹性的无摩擦接触问题

A Frictionless Contact Problem of 2D Decagonal Quasicrystal Plane Elasticity With Cracks

应用数学和力学. 2019, 40(2): 223–236 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390127>

#### 一维六方压电准晶中正n边形孔边裂纹的反平面问题

The Anti-Plane Problem of Regular n-Polygon Holes With Radial Edge Cracks in 1D Hexagonal Piezoelectric Quasicrystals

应用数学和力学. 2020, 41(7): 713–724 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400334>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

# 基于黏聚区模型的 ENF 试件层间裂纹扩展分析\*

邓 健<sup>1,2</sup>, 肖鹏程<sup>1,2</sup>, 王增贤<sup>1,2</sup>, 邵光冉<sup>1,2</sup>, 卢天健<sup>1,2</sup>

(1. 南京航空航天大学 机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016;  
2. 南京航空航天大学 多功能轻量化材料与结构工信部重点实验室, 南京 210016)

(我刊编委卢天健来稿)

**摘要:** 基于经典层合板理论及黏聚区模型, 针对纯 II 型断裂 ENF 试件的裂纹扩展, 建立了含一般分层裂纹层合板的理论模型. 相较于传统的梁理论, 该文模型充分考虑了黏聚区的软化过程, 引入了试件发生失效前的非线性行为, 预测的失效载荷小于梁理论结果, 与文献试验值更为接近. 相比于梁理论 (仅包含断裂韧性单一参数), 该文模型可同时分析界面强度、断裂韧性及界面初始刚度对 ENF 试件载荷-位移曲线的影响. 结果表明: 界面强度主要影响试件失效前的力学行为, 对裂纹扩展基本无影响, 断裂韧性是影响裂纹扩展的主要参数, 界面初始刚度仅影响线弹性加载段; 黏聚区长度随断裂韧性增大而增大, 随界面强度增大而减小; 相较于断裂韧性, 界面强度对黏聚区长度的影响更为明显; 黏聚区尖端到达试件半长处时, 黏聚区的长度呈现一定程度的减小.

**关键词:** ENF 试验; 分层; 黏聚区; 裂纹

**中图分类号:** O33      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.430082

## Interlaminar Crack Propagation Analysis of ENF Specimens Based on the Cohesive Zone Model

DENG Jian<sup>1,2</sup>, XIAO Pengcheng<sup>1,2</sup>, WANG Zengxian<sup>1,2</sup>, SHAO Guangran<sup>1,2</sup>, LU Tianjian<sup>1,2</sup>

(1. State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R.China;

2. MIIT Key Laboratory of Multifunctional Lightweight Materials and Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R.China)

(Contributed by LU Tianjian, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** Based on the classical laminated plate theory and the cohesive zone model, a theoretical model for general delamination cracked laminates was established for crack propagation of pure mode II ENF specimens. Compared with the conventional beam theory, the proposed model fully considered the softening process of the cohesive zone and introduced the nonlinear behavior of ENF specimens before failure. The predicted failure load is smaller than that under the beam theory and closer to the experimental data in literatures. Compared with the beam theory with only fracture toughness considered, the proposed model can simultaneously analyze the influences of the interface strength, the fracture toughness

\* 收稿日期: 2022-03-14; 修订日期: 2022-03-24

**基金项目:** 国家自然科学基金(12002157; 12032010; 11972185); 江苏高校优势学科建设工程; 中央高校基本科研业务费

**作者简介:** 邓健(1990—), 男, 讲师, 博士, 硕士生导师(E-mail: [dengjian@nuaa.edu.cn](mailto:dengjian@nuaa.edu.cn));

卢天健(1964—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: [tjlu@nuaa.edu.cn](mailto:tjlu@nuaa.edu.cn)).

**引用格式:** 邓健, 肖鹏程, 王增贤, 邵光冉, 卢天健. 基于黏聚区模型的 ENF 试件层间裂纹扩展分析[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(5): 515-523.

and the initial interface stiffness on the load-displacement curves in ENF tests. The results show that, the interface strength mainly affects the mechanical behavior of specimens before failure, but has no influence on crack propagation. The fracture toughness is the main parameter affecting crack propagation, and the initial interface stiffness only affects the linear elastic loading stage. The cohesive zone length increases with the fracture toughness and decreases with the interface strength. The effect of the interface strength on the cohesive zone length is more obvious than that of the fracture toughness. When the adhesive zone tip reaches the half length of the specimen, the adhesive zone length will decrease to a certain extent.

**Key words:** ENF test; delamination; cohesive zone; crack

## 引言

为有效分析裂纹的萌生与扩展过程,黏聚区模型(cohesive zone model, CZM)被广泛应用于纤维增强复合材料层合板结构的分层失效与界面脱黏的模拟<sup>[1-2]</sup>.相对于有限元数值方法,解析法形式简单,且不存在数值稳定性的问题,能够以较低成本讨论界面性能参数、本构形式对裂纹扩展和最终失效载荷的影响,有利于深入研究分层损伤扩展的力学行为.此外,理论研究可为断裂韧性试验的设计和数据处理方法的发展提供理论基础,且对数值仿真结果的有效性验证有一定的补充作用,进而促进 CZM 在复杂结构层间损伤分析中的应用<sup>[3-4]</sup>.

端部缺口弯曲(end notched flexure, ENF)试件是评估复合材料层合板 II 型(剪切型)断裂的标准形式,国内外学者针对其裂纹扩展过程的建模、分析和设计展开了广泛研究.例如,Hashemi 等<sup>[5]</sup>基于修正梁理论研究了 ENF 试件的裂纹扩展过程; Carlsson 等<sup>[6]</sup>讨论了横向剪切变形对能量释放率( $G_{II}$ )的影响; Fan 等<sup>[7]</sup>和 Valvo<sup>[8]</sup>指出基于梁理论的 ENF 模型忽略了裂纹尖端的塑性变形;而 Whitney 等<sup>[9]</sup>将裂尖应力奇异性引入 ENF 试件的剪切梁模型.随后 Whitney<sup>[10]</sup>基于 Reissner 变分原理发展了 II 型裂纹扩展的高阶梁模型.此外,Williams<sup>[11]</sup>在分层裂纹长度中引入与材料弹性参数有关的修正量  $\chi$ ,考虑了裂尖变形和转角的影响.陈瑛和乔丕忠<sup>[12]</sup>将双线性黏聚区本构引入到 4ENF 试件中,研究了界面应力分布情况,但并未详细讨论裂纹扩展过程.刘伟先等<sup>[13]</sup>研究了 ENF 试件中的裂纹扩展,认为裂纹扩展之后黏聚区长度保持定值,但仅考虑了 ENF 试件的裂纹长度小于试件半长的情况.

本文基于经典层合板理论及 CZM,建立了含一般分层裂纹层合板的理论模型,对纯 II 型断裂 ENF 试件进行裂纹扩展理论分析.相较于传统的梁理论,该模型充分考虑黏聚区的软化过程,引入了试件发生失效前的非线性行为.将模型预测与试验结果及梁模型预测进行对比,验证了其有效性.基于所提出的模型,研究了典型 ENF 试件载荷-位移曲线和黏聚区长度对界面参数、裂纹长度的响应,并讨论了裂纹长度超过试件半长时,裂纹扩展对黏聚区长度的影响.本文研究不仅为复杂结构的分层裂纹扩展分析提供了理论依据,还为数值仿真提供一个可靠的交叉检验工具.

## 1 含一般分层裂纹的层合板模型

本文考虑含有一般分层裂纹的复合材料层合板,层合板长  $2L$ 、宽  $b$ ,分层后的上下半板的厚度分别为  $h_1$ ,  $h_2$ ,其几何尺寸及坐标系如图 1 所示.如图所示,贯穿层合板的宽度方向且与其长度方向平行的分层裂纹长度为  $a$ ,假设该裂纹仅向层合板内部并沿已有裂纹方向扩展,潜在裂纹在图中以虚线标出.根据黏聚区模型,裂尖区域存在黏聚区,通过界面应力作用于潜在裂纹的上下表面,界面应力分布可由基于相对位移的黏聚区本构关系确定.进一步假设层合板为薄壁结构,符合经典层合板理论的应用范围<sup>[14]</sup>,则上下两半板在各自局部坐标系中的位移场可表示为

$$\begin{cases} u_i(x, z_i) = u_i^0(x) - z_i \frac{dw_i^0(x)}{dx}, & i = 1, 2, \\ w_i(x, z_i) = w_i^0(x), \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $u_i(x, z_i)$ ,  $w_i(x, z_i)$  分别为上下两半板任意一点  $(x, z_i)$  处  $x$ ,  $z$  方向的位移;  $u_i^0(x)$ ,  $w_i^0(x)$  分别为上下两半板中轴线( $z_1=z_2=0$ )的轴向变形和挠度;下标  $i=1$  表示上半板,  $i=2$  表示下半板.

裂纹扩展过程中,假设上下两半板处于小变形状态.根据上下两半板微元段的受力平衡条件(图 1),忽略

高阶项, 则含一般分层裂纹的复合材料层合板(上下两半板)的控制方程为

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dx} = b\tau(x), \\ \frac{dQ_1}{dx} = b\sigma(x) - f(x), \\ \frac{dM_1}{dx} = -\frac{1}{2}h_1b\tau(x) + Q_1(x), \end{cases} \quad (2a)$$

$$\begin{cases} \frac{dN_2}{dx} = -b\tau(x), \\ \frac{dQ_2}{dx} = -b\sigma(x), \\ \frac{dM_2}{dx} = -\frac{1}{2}h_2b\tau(x) + Q_2(x), \end{cases} \quad (2b)$$

式中,  $N$  表示轴向力,  $M$  表示弯矩,  $Q$  表示截面剪力,  $\sigma(x)$ ,  $\tau(x)$  分别为裂尖黏聚区的法向应力和切应力. 根据黏聚区本构关系 (traction-separation, T-S)<sup>[15]</sup>,  $\sigma(x)$ ,  $\tau(x)$  由黏聚区上下界面的相对位移确定. 其中  $f(x)$  为面外分布载荷, 由于本文所讨论的 ENF 仅受到局部集中载荷, 因此  $f(x) = 0$ . 为保持应力方向与相对位移方向一致, 定义法向相对位移  $\Delta_n$  为上半板相对于下半板的张开位移, 轴向相对位移  $\Delta_s$  为上半板相对下半板的滑开位移, 即

$$\begin{cases} \Delta_n = w_1\left(x, -\frac{h_1}{2}\right) - w_2\left(x, \frac{h_2}{2}\right) = w_1^0(x) - w_2^0(x), \\ \Delta_s = u_1\left(x, -\frac{h_1}{2}\right) - u_2\left(x, \frac{h_2}{2}\right) = u_1^0(x) - u_2^0(x) + \left(\frac{h_1}{2} \frac{dw_1}{dx} + \frac{h_2}{2} \frac{dw_2}{dx}\right). \end{cases} \quad (3)$$

本文采用双线性本构 T-S 分析图 1 所示分层裂纹的扩展, 该本构具有理论完善、简洁高效、所需测量及拟合参数较少等特点, 在复合材料层合板分析中得到广泛应用. 如图 2 所示, 双线性 T-S 包含线弹性加载及线性软化两个阶段, 黏聚区材料点以零应力对应零相对位移起始, 在损伤出现之前保持线弹性; 假设界面初始刚度为一个适当的值, 以保证在线弹性阶段, 黏聚区上下表面重合、不会相互嵌入. 界面应力满足损伤起始条件后, 材料点发生线性软化; 持续加载, 直到应力再次为零时, 裂纹发生扩展. 定义临界能量释放率为本构关系曲线与相对位移轴线围成的面积.

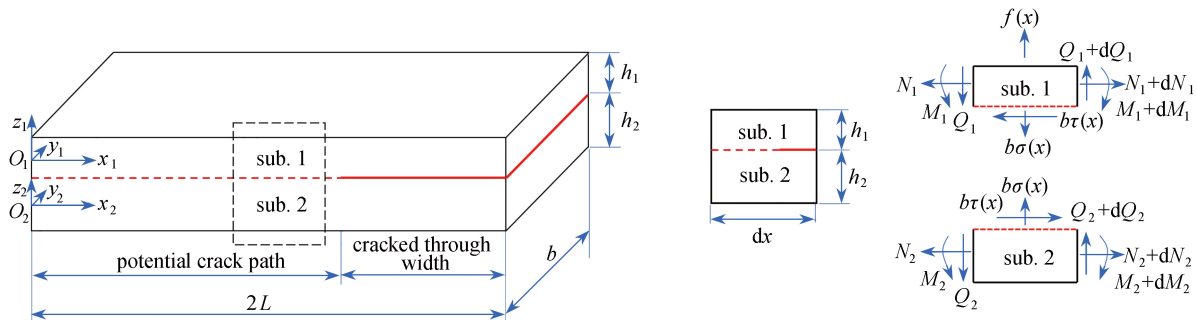


图 1 层合板黏聚区微元受力分析

Fig. 1 Microelement stress analysis of the cohesive zone of the laminates

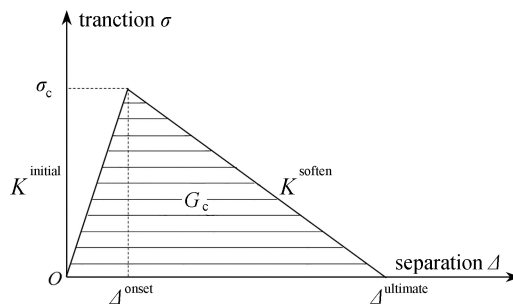


图 2 黏聚区双线性本构模型

Fig. 2 The bilinear constitutive model for the cohesive zone



由此,基于经典层合板理论,本文建立了含一般分层裂纹的复合材料层合板的理论分析模型,包括三个部分:式(1)给出的变形协调条件,式(2)给出的平衡关系以及黏聚区的双线性本构.结合具体层合板结构及加载工况所确定的边界条件和连续性条件,可联立以上微分方程进行求解.

## 2 ENF 试件裂纹扩展分析

为测量复合材料层合板 II 型分层裂纹的临界应变能释放率,通常采用三点弯的方式对 ENF 试件进行加载和约束,如图 3 所示,ENF 试件两端受简支约束,在其中间部位施加垂直于试件表面的下压载荷.加载过程中,预置于 ENF 试件中面的分层裂纹将会沿其中面持续向内部扩展(图 3 中虚线).此外,为研究纯 II 型裂纹扩展,试验过程中应保证 ENF 试件的上下两半板始终闭合且无法向相对位移,即式(3)中  $\Delta_n = 0$ .为满足此要求,ENF 试件的铺层设计为关于中面(断裂面)对称,使得其上下半板的拉伸和弯曲刚度相同.因此,结合式(1)~(3),ENF 试件裂纹扩展的控制方程可简化为

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dx} - \frac{dN_2}{dx} = A_{11s} \frac{d^2 \Delta u}{dx^2} - 2B_{11s} \frac{d^3 w}{dx^3} = 2b\tau, \\ \frac{d^2 M_1}{dx^2} + \frac{d^2 M_2}{dx^2} = B_{11s} \frac{d^3 \Delta u}{dx^3} - 2D_{11s} \frac{d^4 w}{dx^4} = -hb \frac{d\tau}{dx}, \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $A_{11s}$ ,  $B_{11s}$ ,  $D_{11s}$  为层合板半板的拉伸刚度、耦合刚度及弯曲刚度.

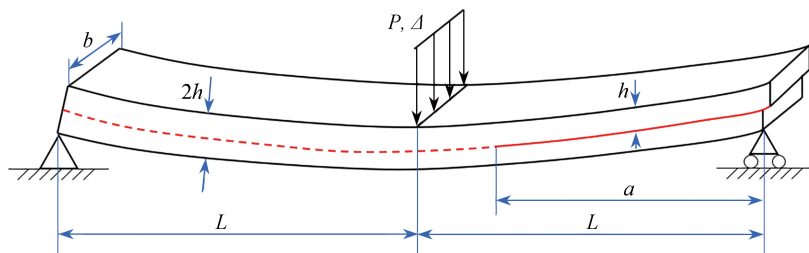


图 3 ENF 试件几何尺寸及加载情况  
Fig. 3 The ENF specimen geometry and loading conditions

### 2.1 位移函数

根据双线性 T-S(图 2),黏聚区切应力  $\tau$  与轴向相对位移  $\Delta_s$  的本构关系可表示为

$$\tau = \begin{cases} K_{ss}^{\text{initial}} \cdot \Delta_s, & \Delta_s \leq \Delta_s^{\text{onset}}, \\ K_{ss}^{\text{soften}} \cdot (\Delta_s - \Delta_s^{\text{onset}}) + \tau_c, & \Delta_s^{\text{onset}} < \Delta_s \leq \Delta_s^{\text{ultimate}}, \\ 0, & \Delta_s > \Delta_s^{\text{ultimate}}, \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $K_{ss}^{\text{initial}}$ ,  $K_{ss}^{\text{soften}}$  分别为 II 型裂纹黏聚区线弹性阶段及线性软化阶段的切线刚度,且  $K_{ss}^{\text{initial}} > 0$ ,  $K_{ss}^{\text{soften}} < 0$ ;  $\Delta_s^{\text{onset}}$  为黏聚区损伤起始时的轴向相对位移,  $\Delta_s^{\text{ultimate}}$  为最终有效相对位移,此时分层裂纹发生扩展;  $\tau_c$  为 II 型裂纹对应的界面应力强度.本文将对挠度函数  $w(x)$  及轴向位移函数  $u(x)$  进行分段求解.

(a) 线弹性阶段  $\Delta_s \leq \Delta_s^{\text{onset}}$ . 此时,黏聚区未发生损伤,控制方程简化为

$$\frac{D_{11s} A_{11s} - B_{11s}^2}{K_{ss}^{\text{initial}} b} \frac{d^6 w^{\text{elastic}}(x)}{dx^6} - \frac{1}{2} (4D_{11s} + 4hB_{11s} + h^2 A_{11s}) \frac{d^4 w^{\text{elastic}}(x)}{dx^4} = 0. \quad (6)$$

位移函数的通解为

$$\begin{cases} w^{\text{elastic}}(x) = a_1 e^{\varphi_1 x} + a_2 e^{-\varphi_1 x} + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_5 x + a_6, \\ u_1^{\text{elastic}}(x) = \frac{2A_{11s} D_{11s} + B_{11s}^2 + hA_{11s} B_{11s}}{2A_{11s} B_{11s} + hA_{11s}^2} \varphi_1 (a_1 e^{\varphi x} - a_2 e^{-\varphi x}) - \frac{3h}{2} a_3 x^2 + a_7 x + a_8, \\ u_2^{\text{elastic}}(x) = -\frac{2A_{11s} D_{11s} + B_{11s}^2 + hA_{11s} B_{11s}}{2A_{11s} B_{11s} + hA_{11s}^2} \varphi_1 (a_1 e^{\varphi x} - a_2 e^{-\varphi x}) + \frac{3h}{2} a_3 x^2 + \\ (2ha_4 + a_7) x + \left( \frac{6B_{11s} + 3hA_{11s}}{bK_{ss}^{\text{initial}}} a_3 + ha_5 + a_8 \right), \end{cases} \quad (7)$$

式中

$$\varphi_1 = \sqrt{bK_{SS}^{initial}(4D_{11s} + 4hB_{11s} + h^2A_{11s}) / (2D_{11s}A_{11s} - B_{11s}^2)}$$

(b) 软化阶段  $\Delta_s^{onset} < \Delta_s \leq \Delta_s^{ultimate}$ . 此时, 黏聚区出现损伤软化现象, 与线弹性阶段类似, 将 T-S 本构关系 (5) 代入式 (4), 并将常微分方程组升幂、消元, 可得控制方程为

$$\frac{D_{11s}A_{11s} - B_{11s}^2}{-K_{SS}^{soften}b} \frac{d^6 w^{soften}(x)}{dx^6} + \frac{1}{2}(4D_{11s} + 4hB_{11s} + h^2A_{11s}) \frac{d^4 w^{soften}(x)}{dx^4} = 0. \quad (8)$$

位移函数的通解为

$$\begin{cases} w^{soften}(x) = a_9 \sin(\varphi_2 x) + a_{10} \cos(\varphi_2 x) + a_{11}x^3 + a_{12}x^2 + a_{13}x + a_{14}, \\ u_1^{soften}(x) = \frac{2A_{11s}D_{11s} + B_{11s}^2 + hA_{11s}B_{11s}}{2A_{11s}B_{11s} + hA_{11s}^2} \varphi_1 (a_9 \cos(\varphi_2 x) - a_{10} \sin(\varphi_2 x)) - \frac{3h}{2} a_{11}x^2 + a_{15}x + a_{16}, \\ u_2^{soften}(x) = -\frac{2A_{11s}D_{11s} + B_{11s}^2 + hA_{11s}B_{11s}}{2A_{11s}B_{11s} + hA_{11s}^2} \varphi_1 (a_9 \cos(\varphi_2 x) - a_{10} \sin(\varphi_2 x)) + \frac{3h}{2} a_{11}x^2 + \\ (2ha_{12} + a_{15})x + \left( \frac{6B_{11s} + 3hA_{11s}}{bK_{SS}^{soften}} a_{11} + ha_{13} + a_{16} - \Delta_s^{ultimate} \right), \end{cases} \quad (9)$$

式中

$$\varphi_2 = \sqrt{-bK_{SS}^{soften}(4D_{11s} + 4hB_{11s} + h^2A_{11s}) / (2D_{11s}A_{11s} - B_{11s}^2)}$$

(c) 当轴向相对位移超过黏聚区最终有效相对位移时, 即  $\Delta_s > \Delta_s^{ultimate}$ , 裂纹扩展. 此时该区域位移不再受黏聚区约束, 控制方程可表示为

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0. \quad (10)$$

位移函数的通解为

$$\begin{cases} w^{cracked}(x) = \frac{1}{6} a_{17}x^3 + \frac{1}{2} a_{18}x^2 + a_{19}x + a_{20}, \\ u_1^{cracked}(x) = \frac{B_{11s}}{2A_{11s}} a_{17}x^2 + a_{23}x + a_{24}, \\ u_2^{cracked}(x) = -\frac{B_{11s}}{2A_{11s}} a_{17}x^2 + (a_{23} - a_{21})x + (a_{24} - a_{20}). \end{cases} \quad (11)$$

综上, ENF 试件的挠度函数可用  $w^{elastic}(x)$ ,  $w^{soften}(x)$ ,  $w^{cracked}(x)$  分段表示, 位移函数则可由  $u_k^{elastic}$ ,  $u_k^{soften}$ ,  $u_k^{cracked}(k = 1, 2)$  分段表示. 其中,  $a_i (i = 1, 2, \dots, 24)$  为待定系数, 可采用边界条件和连续性条件确定.

## 2.2 求解

标准复合材料层合板 ENF 试件两端为简支约束, 除加载点位于上半板外, ENF 试件的约束都施加在下半板. 因此, ENF 试件的边界条件可表示为

$$\begin{cases} N_1(0) = 0, w^{elastic}(0) = 0, M_{reslt}(0) = 0, \\ N_1(2L) = 0, w^{cracked}(2L) = 0, M_{reslt}(2L) = 0, \\ N_2(2L) = 0, u_2^{elastic}(0) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

式中,  $M_{reslt} = M_1 + M_2 + h(N_1 - N_2)/2$  为 ENF 试件中关于中面(断裂面)的合力矩.

当分层裂纹尖端处于软化阶段时, 随相对位移的增加, 黏聚区切应力以切线刚度  $K_{SS}^{soften}$  线性减小, 界面开始出现损伤, 但此时黏聚区的切应力及割线刚度仍为正值, 裂纹未发生扩展, 裂纹长度为  $a$ , 黏聚区长度为  $l_{CZ}$ , 如图 4 所示. 在  $x_E = 2L - a_0 - l_{CZ}$ ,  $x_S = 2L - a_0$ , ENF 试件的位移函数  $w(x)$ ,  $u(x)$  应满足位移连续、转角连续、合力矩连续、剪力及轴力连续条件. 进一步地, 在数值计算过程中, 设定黏聚区长度  $l_{CZ}$  为增量叠加的过程:

$$l_{CZ}^i = l_{CZ}^{i-1} + \delta_{CZ}, l_{CZ}^0 = 0, \quad (13)$$

式中,  $\delta_{CZ}$  为黏聚区长度增量, 本文取值为 0.01 mm. 当裂尖点  $x_S = 2L - a_0$  处的相对位移达到最终有效相对位移时, 即  $\Delta_s(x_S) = \Delta_s^{ultimate}$ , 裂纹即将发生扩展, 此时黏聚区长度达到最大值  $l_{CZ} = l_{CZ}^{max}$ .

特别地,在加载点处存在集中载荷 $P$ ,引起剪力突变,其突变值为载荷 $P$ 的大小,即为

$$P + Q_{\text{reslt}}(L^-) = Q_{\text{reslt}}(L^+). \tag{14}$$

令 $\Delta_s(x_E) = \Delta^{\text{onset}}$ ,可求得加载时线弹性阶段的最大载荷 $P_0$ .

当黏聚区满足裂纹扩展条件时,即 $\Delta_s(x_S) = \Delta^{\text{ultimate}}$ ,裂纹发生扩展,此时裂纹长度 $a > a_0$ .在数值计算过程中,设定裂纹长度 $a$ 为增量叠加的过程:

$$a^j = a^{j-1} + \delta_a, \tag{15}$$

式中, $\delta_a$ 为裂纹长度增量,本文取值为0.001 mm.此外,在裂纹扩展过程中,裂尖点 $x_S = 2L - a$ 处及黏聚区尖端 $x_E = 2L - a - l_{CZ}$ 处的位移应满足以下约束条件:

$$\begin{cases} \Delta_s(x_S) = \Delta^{\text{ultimate}}, \\ \Delta_s(x_E) = \Delta^{\text{onset}}. \end{cases} \tag{16}$$

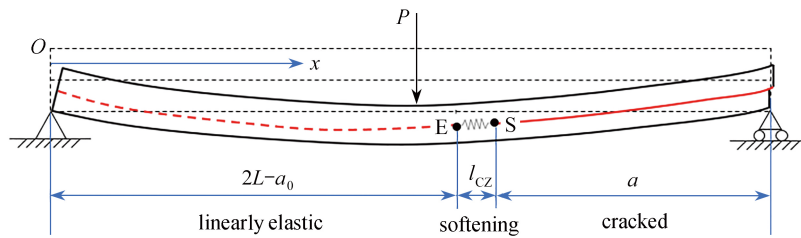


图4 ENF 试件加载软化阶段  
Fig. 4 The loading softening stage of the ENF specimen

### 3 分析与讨论

为验证本文基于 CZM 建立的分层裂纹扩展分析模型的有效性,选取文献 [16] 中的复合材料层合板及界面性能参数,针对给定几何尺寸的试件进行分析.ENF 试件为单向复合材料(HTA6376/C)层合板,相关材料力学性能参数、试件几何尺寸分别如表 1 和表 2 所示.

表 1 ENF 试件材料力学性能参数<sup>[16]</sup>

Table 1 Mechanical properties of the ENF specimen<sup>[16]</sup>

mechanical properties of the HTA6376/C composite single layer plate					
$E_{11}=120$ GPa	$E_{22} = E_{33}=10.5$ GPa	$G_{12} = G_{13}=5.25$ GPa	$G_{23}= 3.48$ GPa	$\nu_{12} = \nu_{13}=0.3$	$\nu_{23}=0.51$
fracture properties of the interfacial cohesive zone					
$G_{Ic}=0.26$ N/mm	$G_{IIc}=1.002$ N/mm	$\sigma_c=30$ MPa	$\tau_c=60$ MPa	$K_{nn}^{\text{initial}}=1 \times 10^3$ GPa/mm	$K_{ss}^{\text{initial}}=1 \times 10^3$ GPa/mm

表 2 ENF 试件几何尺寸<sup>[16]</sup>

Table 2 Geometric dimensions of the ENF specimen<sup>[16]</sup>

specimen effective length $2L$ / mm	specimen width $b$ / mm	specimen thickness $2h$ / mm	initial crack length $a_0$ / mm
100	20	3.1	35

如图 5 所示,本文提出的基于 CZM 裂纹扩展分析模型能够有效地模拟 ENF 试件裂纹扩展过程,采用该模型预测的失效载荷与试验结果误差仅为 5%.此外,由于考虑了黏聚区的软化过程,本文模型预测的载荷-位移曲线在初始弹性加载段之后出现非线性,预测的失效载荷优于传统的梁理论预测.由于梁理论仅在裂纹开始扩展之后引入 II 型临界能量释放率  $G_{IIc}$ ,其对 ENF 试件失效载荷 $P_c$ 的预测值偏大.加载后期,裂纹扩展主要受单参数  $G_{IIc}$  影响,在加本文模型预测的载荷-位移曲线与梁理论结果基本重合(图 5).

基于所提出的 ENF 试件分层裂纹扩展模型,本文进一步分析界面强度、断裂韧性及界面初始刚度对 ENF 试件载荷-位移曲线的影响.首先,界面强度对 ENF 试件失效前的非线性段及最大失效载荷有一定影响,如图 6 所示,随着界面强度增大,失效载荷增大,本文模型预测的载荷-位移曲线不断接近梁理论结果(后者仅考虑弹性阶段,假设界面强度无限大).此处,断裂韧性  $G_{IIc}$  是影响 II 型裂纹扩展的主要参数,随着  $G_{IIc}$  的增加,失效载荷增大,如图 7 所示;由于梁理论未考虑黏聚区软化,其预测的失效载荷为本文模型预测的上阈值.

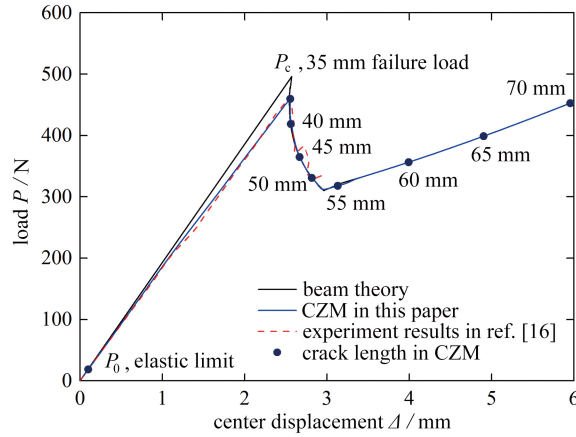


图 5 本文模型与实验结果<sup>[16]</sup>及梁理论预测的对比

Fig. 5 Comparison of the proposed model with the experimental results<sup>[16]</sup> and the beam theory prediction

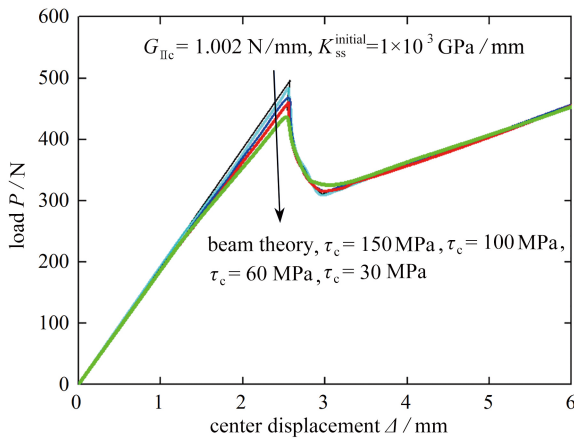


图 6 界面强度对 ENF 试件载荷-位移曲线的影响

Fig. 6 Influences of the interfacial strength on load-displacement curves of the ENF specimen

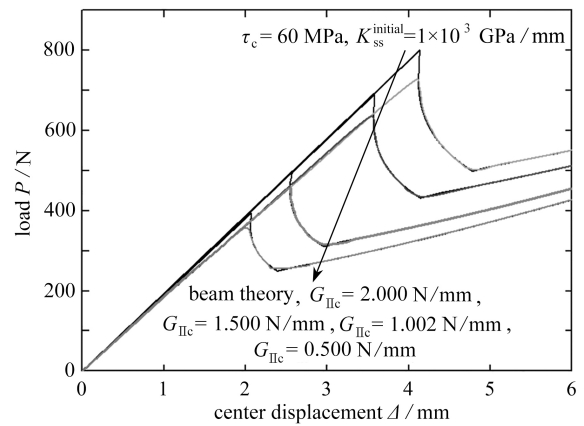


图 7 断裂韧性对 ENF 试件载荷-位移曲线的影响

Fig. 7 Influences of the fracture toughness on load-displacement curves of the ENF specimen

图 8(a) 给出界面初始刚度  $K_{nn}^{initial}$  对 ENF 试件载荷-位移曲线的影响:  $K_{nn}^{initial}$  的变化仅影响线弹性加载段的极限点, 对最大失效载荷无影响; 随着  $K_{nn}^{initial}$  的减小, 线弹性段不断增加, 且试件在达到最大失效载荷前为完全弹性. 结合图 8(b) 可知, T-S 本构中无软化阶段时 ( $K_{ss}^{initial} = 1.8 \text{ GPa/mm}$ ), 界面的损伤起始与裂纹扩展同时发生, 试件中无黏聚区存在; 随着  $K_{ss}^{initial}$  的增大, 非线性段逐步增加, 且线弹性段逐渐与梁模型结果重合. 因此, 选取较大的  $K_{ss}^{initial}$  时, 模型预测更符合试验结果, 且可保证黏聚区上下表面在加载过程不发生较大的干涉.

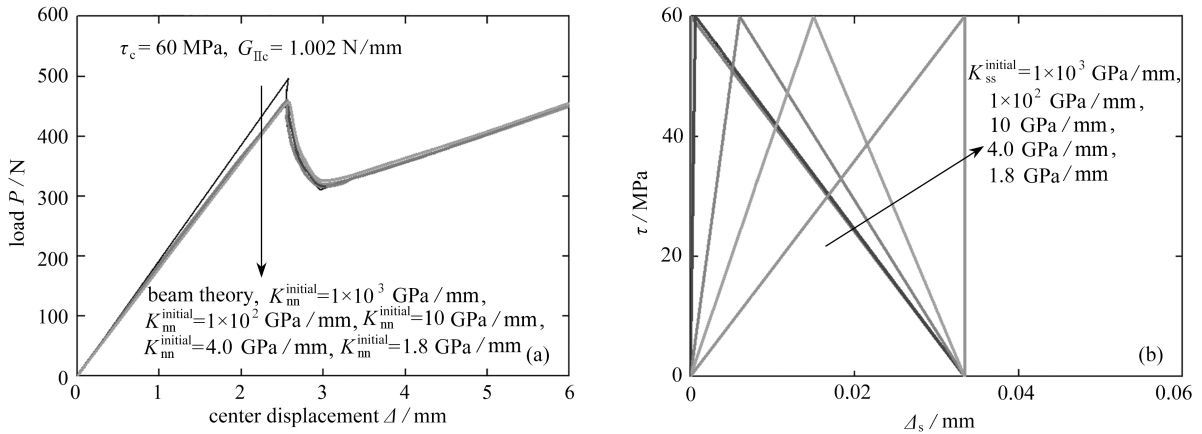


图 8 II 型界面初始刚度的影响: (a) 载荷-位移曲线; (b) II 型裂纹 T-S 本构关系

Fig. 8 Influences of the initial stiffness of the mode II interfaces: (a) load-displacement curves; (b) T-S constitutive relationships of the mode II crack

图9展示了ENF试件II型裂纹黏聚区长度随裂纹扩展的变化:裂纹扩展过程中,当黏聚区尖端到达试件半长处时, $l_{CZ}$ 呈现一定程度的减小,这与I型裂纹的 $l_{CZ}$ 维持不变有所不同,因此,采用基于CZM的有限元方法对含有II型裂纹的结构进行裂纹扩展模拟时,应充分考虑裂纹长度对黏聚区长度和界面单元尺寸的影响,以保证数值模拟结果的准确性。

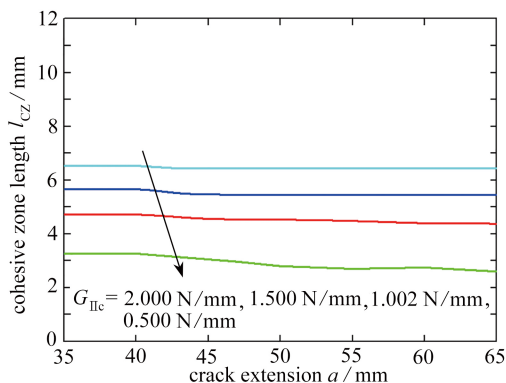


图9 II型裂纹黏聚区长度随裂纹扩展的变化趋势

Fig. 9 Variation tendencies of the cohesive zone length of the mode II crack with the crack growth

图10给出界面参数对II型裂纹黏聚区长度的影响,可见黏聚区长度随断裂韧性增大而增大,随界面强度增大而减小,且界面强度相较于断裂韧性对II型裂纹黏聚区长度的影响更为明显。

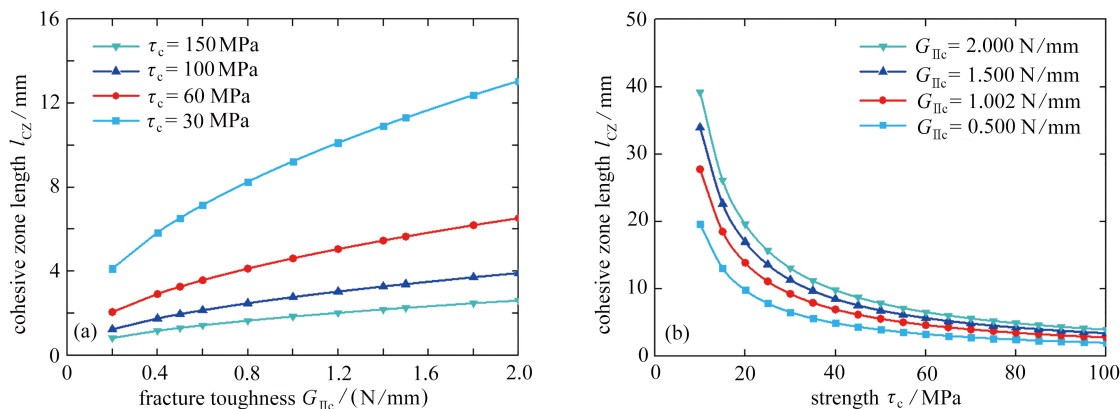


图10 界面参数对II型裂纹黏聚区长度的影响

Fig. 10 Influences of interface parameters on the cohesive zone length of the mode II crack

## 4 结 论

基于经典层合板理论及CZM,本文建立了适用于分析纯II型断裂ENF试件分层裂纹扩展的理论模型,且模型预测的载荷-位移曲线与试验结果吻合较好,验证了其有效性和准确性.随后,本文采用该模型,量化了界面强度、断裂韧性及界面初始刚度对ENF试件载荷-位移曲线的影响,发现界面强度主要影响试件失效前的力学行为,对裂纹扩展基本无影响;断裂韧性是影响裂纹扩展的主要参数;界面初始刚度仅影响线弹性加载段;黏聚区长度随断裂韧性增大而增大,随界面强度增大而减小;相较于断裂韧性,界面强度对裂纹黏聚区长度影响更明显;黏聚区尖端到达试件半长处时,纯II型裂纹黏聚区的长度有一定程度的减小.本文提出的理论模型为复杂结构的分层裂纹扩展分析提供了理论依据,还为数值仿真提供了可靠的交叉检验工具.此外,后续工作应进一步分析多种II型断裂韧性试件的裂纹扩展,如端部加载劈裂试件等,提高预测的准确性及模型的适用性。

### 参考文献(References):

- [1] 赵丽滨, 龚愉, 张建宇. 纤维增强复合材料层合板分层扩展行为研究进展[J]. 航空学报, 2019, 40(1): 522509.



- (ZHAO Libin, GONG Yu, ZHANG Jianyu. A survey on delamination growth behavior in fiber reinforced composite laminates[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2019, **40**(1): 522509.(in Chinese))
- [2] 姚辽军, 赵美英, 万小鹏. 基于CDM-CZM的复合材料补片补强参数分析[J]. 航空学报, 2012, **33**(4): 666-671. (YAO Liaojun, ZHAO Meiyang, WAN Xiaopeng. Parameter analysis of composite laminates with patched reinforcement based on CDM-CZM[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2012, **33**(4): 666-671.(in Chinese))
- [3] BENNATI S, FISICARO P, VALVO P S. An enhanced beam-theory model of the mixed-mode bending (MMB) test, part I: literature review and mechanical model[J]. *Meccanica*, 2013, **48**(2): 443-462.
- [4] BENNATI S, FISICARO P, VALVO P S. An enhanced beam-theory model of the mixed-mode bending (MMB) test, part II: applications and results[J]. *Meccanica*, 2013, **48**(2): 465-484.
- [5] HASHEMI S, KINLOCH A, WILLIAMS J. The analysis of interlaminar fracture in uniaxial fibre-polymer composites[J]. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1990, **427**(1872): 173-199.
- [6] CARLSSON L, GILLESPIE J, PIPES R. On the analysis and design of the end notched flexure (ENF) specimen for mode II testing[J]. *Journal of Composite Materials*, 1986, **20**(6): 594-604.
- [7] FAN C, JAR P, CHENG J. Revisit the analysis of end-notched-flexure (ENF) specimen[J]. *Composites Science and Technology*, 2006, **66**(10): 1497-1498.
- [8] VALVO P S. Does shear deformability influence the mode II delamination of laminated beams?[C]//17th European Conference on Fracture(ECF17). 2008.
- [9] WHITNEY J, GILLESPIE J, CARLSSON L. Singularity approach to the analysis of the end notch flexure specimen[C]//American Society for Composites Second Technical Conference. 1987: 391-398.
- [10] WHITNEY J. Analysis of interlaminar mode II bending specimens using a higher order beam theory[J]. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 1990, **9**(6): 522-536.
- [11] WILLIAMS J. End corrections for orthotropic DCB specimens[J]. *Composites Science and Technology*, 1989, **35**(4): 367-376.
- [12] 陈瑛, 乔丕忠. 4ENF黏聚解析模型分析[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2008, **36**(2): 234-237. (CHEN Ying, QIAO Pizhong. Cohesive analytic model of 4ENF specimen[J]. *Journal of Hohai University (Natural Sciences)*, 2008, **36**(2): 234-237.(in Chinese))
- [13] 刘伟先, 周光明, 王新峰. 复合材料ENF试件裂纹扩展理论分析[J]. 航空学报, 2014, **35**(1): 187-194. (LIU Weixian, ZHOU Guangming, WANG Xinfeng. Theoretical analysis of crack propagation of composite ENF specimens[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2014, **35**(1): 187-194.(in Chinese))
- [14] REDDY J. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*[M]. CRC Press, 2004.
- [15] PARK K, PAULINO G. Cohesive zone models: a critical review of traction-separation relationships across fracture surfaces[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2011, **64**(6): 060802.
- [16] HARPER P, HALLETT S. Cohesive zone length in numerical simulations of composite delamination[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, **75**(16): 4774-4792.