

基于小波Galerkin法的矩形薄板二次屈曲分析

张磊, 张文明, 王林, 李世斌

Secondary Buckling Analysis of Thin Rectangular Plates Based on the Wavelet Galerkin Method

ZHANG Lei, ZHANG Wenming, WANG Lin, and LI Shibin

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.21656/1000-0887.430097>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

小波Galerkin法在非线性的分岔问题求解中的应用

Application of the Wavelet Galerkin Method to Solution of Nonlinear Bifurcation Problems

应用数学和力学. 2021, 42(1): 27-35 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410085>

薄板热力耦合的屈曲分析

Thermo-Mechanical Buckling Analysis of Thin Plates

应用数学和力学. 2020, 41(8): 877-886 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400308>

二维瞬态热传导问题的无单元Galerkin法分析

Analysis of 2D Transient Heat Conduction Problems With the Element-Free Galerkin Method

应用数学和力学. 2021, 42(5): 460-469 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.410111>

基于4变量精确平板理论的剪切效应分析

Shear Effect Analysis on Plates Based on the 4-Variable Refined Plate Theory

应用数学和力学. 2018, 39(11): 1268-1281 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390066>

Euler-Bernoulli梁的高阶二次摄动解及收敛性讨论

High-Order Analytical Solutions and Convergence Discussions of the 2-Step Perturbation Method for Euler-Bernoulli Beams

应用数学和力学. 2019, 40(6): 620-629 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.390272>

基于自适应小波神经网络的第二类Fredholm积分方程数值解法

Numerical Solution to the Second Kind of Fredholm Integral Equation Based on the Adaptive Wavelet Neural Network

应用数学和力学. 2019, 40(12): 1399-1408 <https://doi.org/10.21656/1000-0887.400029>



关注微信公众号, 获得更多资讯信息

基于小波 Galerkin 法的矩形薄板二次屈曲分析*

张磊¹, 张文明², 王林¹, 李世斌¹

(1. 国防科技大学 空天科学学院, 长沙 410073;
2. 湖北三江航天集团 红阳机电有限公司, 湖北 孝感 432000)

摘要: 通过经典的弹性矩形薄板, 研究了小波 Galerkin 法 (WGM) 在非线形屈曲问题数值求解方面的应用. 首先, 介绍了基于小波 Galerkin 法的 von Kármán 方程离散格式, 然后提出了离散方程 Jacobi 矩阵和 Hesse 矩阵的一个简便计算方法, 并讨论了基于小波离散格式的特征方程法、扩展方程法和伪弧长法等非线性屈曲分析方法. 其次, 较为详细地分析了弹性矩形薄板的二次屈曲平衡路径以及长宽比、边界条件和双向压缩对波形跳跃的影响. 数值结果表明, 小波 Galerkin 法在求解矩形板屈曲临界载荷时仍然有良好的收敛性, 所获结果与稳定性实验、二次摄动法和非线性有限单元法的结果也非常一致, 而结合不同分岔计算方法的可行性, 更使其可为典型板壳的复杂非线性稳定性问题提供一种高效的空离散方法.

关键词: 小波 Galerkin 法; 矩形薄板; 二次屈曲; 波形跳跃

中图分类号: O343 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430097

Secondary Buckling Analysis of Thin Rectangular Plates Based on the Wavelet Galerkin Method

ZHANG Lei¹, ZHANG Wenming², WANG Lin¹, LI Shibin¹

(1. College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology,
Changsha 410073, P.R.China;

2. Hongyang Electromechanical Co. Ltd., Hubei Sanjiang Aerospace, Xiaogan, Hubei 432000, P.R.China)

Abstract: Application of the wavelet Galerkin method (WGM) to numerical solution of nonlinear buckling problems was studied with classical elastic thin rectangular plates. First, the discretized scheme of the von Kármán equation were introduced, then a simple calculation approach to the Jacobian and Hessian matrices based on the WGM was proposed, and the wavelet discretized scheme-based eigenvalue equation method, the extended equation method and the pseudo arc-length method for nonlinear buckling analysis were discussed. Second, the secondary post-buckling equilibrium paths of elastic thin rectangular plates and the effects of aspect ratios, boundary conditions and bi-directional compression on the mode jumping behaviors, were discussed in detail. Numerical results show that, the WGM possesses good convergence for solving buckling loads on rectangular plates, and the obtained equilibrium paths are in good agreement with those from the stability experiments, the 2-step perturbation method and the nonlinear finite element method. Given the feasibility of combination with different bifurcation computation methods, the WGM makes an efficient spatial discretization method for complex nonlinear stability problems of typical plates and shells.

Key words: wavelet Galerkin method; rectangular thin plate; secondary buckling; mode jumping

* 收稿日期: 2022-03-23; 修订日期: 2022-12-29

基金项目: 湖南省自然科学基金(2019JJ50735)

作者简介: 张磊(1989—), 男, 讲师, 博士(通讯作者). E-mail: leizhg2016@163.com).

引用格式: 张磊, 张文明, 王林, 李世斌. 基于小波 Galerkin 法的矩形薄板二次屈曲分析[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(1): 25-35.

引言

自 20 世纪 90 年代小波分析理论建立以来,小波数值方法因其在非线性和多尺度计算方面的应用潜力,得到了持续不断的关注和研究,尤其是在非线性力学问题求解方面的应用^[1],例如结构大挠度分析^[2]、智能结构振动控制、应力集中和裂纹扩展等应力奇异性问题^[3].为了继续发掘小波方法在非线性和多尺度计算方面的应用潜力,本文在矩形薄板大挠度问题小波解^[2]的基础之上,继续采用小波方法对矩形薄板非线性稳定性问题求解与分析.

对于结构完善的弹性平板,当面内压缩载荷超过 Euler 屈曲临界值,它们就由平直的初始状态进入横向变形的后屈曲状态,并以屈曲波形的形式保持稳定^[4].随着载荷的增加,屈曲波形保持不变而其幅值呈非线性增大.大量理论研究和稳定性实验还表明,矩形薄板在后屈曲变形增大的过程中,还可能存在着另一个临界状态,初次的屈曲模态将由稳定变为不稳定,并伴随着屈曲波形的跳跃现象^[5],这个临界状态被称为二次屈曲.上述受压结构也可能不发生二次屈曲,初始屈曲后直接进入塑性屈服而迅速发生破坏.对于二次屈曲之前的后屈曲阶段,只要给定合适的初始值或摄动参数,就可以跨越 Euler 屈曲临界值而直接利用 Newton 迭代法或者摄动法进行后屈曲分析^[6-7].这类方法对于屈曲波形保持不变的初始后屈曲行为是有效的.然而对于二次屈曲和弹塑性屈曲等大范围屈曲行为,则需借助扩展方程法和延拓法等非线性屈曲分析方法实现不同平衡状态的连续追踪和稳定性判断^[8-9].结构非线性屈曲分析方法中的空间离散一般使用经典的三角级数^[10-11]或非线性有限元格式^[12],其中除 Navier 解和 Levy 解之外,三角级数在大范围后屈曲阶段的截断误差难以保证.而基于大型有限元程序,为了仅利用切线刚度矩阵而避免其导数计算带来的单元改进和内存增加问题,又发展了基于解流形和切向量旋转度等几何近似方法来计算奇异的分岔点和分岔方向^[12].

本文通过结合小波 Galerkin 法和不同的非线性屈曲分析方法来求解矩形薄板二次屈曲问题.首先,给出了屈曲问题控制方程的小波离散格式;然后,提出了基于一个扰动方程的切线刚度矩阵计算方法,并讨论了基于小波离散方程求解二次屈曲临界载荷的特征方程和扩展方程,以及进行后屈曲追踪的伪弧长格式;最后,较为详细地讨论了矩形薄板完整的二次屈曲平衡路径和波形跳跃行为.

1 薄板屈曲方程的离散格式

1.1 矩形薄板的屈曲方程

设边长为 a 和 b ,厚度为 h 的各向同性弹性矩形薄板,两对边上分别承受面内压缩载荷 p_x 和 p_y ,以及面内剪切载荷 τ_{xy} ,矩形薄板屈曲问题的控制方程如下^[4]:

$$\begin{cases} D\nabla^4 w + h(p_x w_{xx} + p_y w_{yy} + 2\tau_{xy} w_{xy}) = hH(w, f), \\ \nabla^4 f = -\frac{E}{2}H(w, w), \quad x \in [0, a], y \in [0, b], \end{cases} \quad (1)$$

其中 $w(x, y)$ 和 $f(x, y)$ 为中面横向位移和应力函数, D 和 E 为矩形薄板的抗弯刚度和弹性模量, ∇^4 为双调和算子,算子 $H(w, f)$ 的表达式为

$$H(w, f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

面内可移的四边简支可等效地表示为^[2]

$$\begin{cases} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, & x = 0, a, \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, & y = 0, b. \end{cases} \quad (3)$$

面内可移的四边固支可等效地表示为^[2]

$$\begin{cases} w = \frac{\partial w}{\partial x} = f = \frac{\partial f}{\partial x} = 0, & x = 0, a, \\ w = \frac{\partial w}{\partial y} = f = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, & y = 0, b. \end{cases} \quad (4)$$

通过以下引入无量纲的量 $\bar{w} = \frac{w}{h}$, $\bar{f} = \frac{f}{Eh^2}$, $\bar{x} = \frac{x}{a}$, $\bar{y} = \frac{y}{b}$, $\beta = \frac{a}{b}$, $\lambda_x = \frac{ca^2}{Eh^2}p_x$, $\lambda_y = \frac{ca^2}{Eh^2}p_y$, $\lambda_{xy} = \frac{ca^2}{Eh^2}\tau_{xy}$, $c = 12(1-\nu^2)$, ν 为材料 Poisson 比, 控制方程可化为无量纲化形式:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}^4 \bar{w} + \lambda_x \bar{w}_{\bar{x}\bar{x}} + \beta^2 \lambda_y \bar{w}_{\bar{y}\bar{y}} + 2\beta \lambda_{xy} \bar{w}_{\bar{x}\bar{y}} = \beta^2 c H(\bar{w}, \bar{f}), \\ \bar{\nabla}^4 \bar{f} = -\frac{\beta^2}{2} H(\bar{w}, \bar{w}), \quad \bar{x} \in [0, 1], \bar{y} \in [0, 1], \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\bar{\nabla}^4 = \partial^4 / \partial \bar{x}^4 + 2\beta^2 \partial^4 / \partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2 + \beta^4 \partial^4 / \partial \bar{y}^4$ 为双调和算子的无量纲形式. 上述方程即为直角坐标系下的 von Kármán 方程, 它具有一定的对称性, 若挠度函数 $w(x,y)$ 是原方程的解, 那么函数 $-w(x,y)$ 和 $w(1-x,y)$ 也是原方程的解.

1.2 小波 Galerkin 法的离散格式

本文采用基于 Coiflet 小波的 Galerkin 法, 其中修正 Coiflet 基函数作为 Galerkin 法的权函数与试函数. 对于定义在有限区间上的函数 $f(x,y) \in L^2[0,1]^2$, 有逼近公式如下:

$$f(x,y) \approx \sum_{k=0}^{2^m} \sum_{l=0}^{2^n} f\left(\frac{k}{2^m}, \frac{l}{2^n}\right) \varphi_{m,k}(x) \varphi_{n,l}(y), \quad (6)$$

其中二维平方可积函数空间的基函数由一维空间基函数的张量积生成, 一维基函数的表达式^[2,13] 具体见文末附录. 为了适用于四阶板壳方程, 选择小波函数消失矩数目为 6 和尺度函数一阶矩为 7 的 Coiflet 小波修正基函数.

为了便于处理控制方程中耦合导数项, 首先忽略无量纲化变量的上标, 且定义下列新函数:

$$\begin{cases} w_1(x,y) = w_{xx}(x,y), w_2(x,y) = w_{xy}(x,y), w_3(x,y) = w_{yy}(x,y), \\ f_1(x,y) = f_{xx}(x,y), f_2(x,y) = f_{xy}(x,y), f_3(x,y) = f_{yy}(x,y). \end{cases} \quad (7)$$

那么方程(5)可写为

$$\begin{cases} \bar{\nabla}^4 w + \lambda_x w_{xx} + \beta^2 \lambda_y w_{yy} + 2\beta \lambda_{xy} w_{xy} = \beta^2 c H(w, f), \\ \bar{\nabla}^4 f = \beta^2 (w_2^2 - w_1 w_3), \end{cases} \quad (8)$$

其中 $H(w, f) = f_1 w_3 + f_3 w_1 - 2f_2 w_2$. 利用修正的基函数逼近下列未知变量:

$$\begin{cases} w(x,y) \approx \sum_{i=1}^{2^m-1} \sum_{j=1}^{2^n-1} w\left(\frac{i}{2^m}, \frac{j}{2^n}\right) \Phi_{m,i}(x) \Phi_{n,j}(y), f(x,y) \approx \sum_{i=1}^{2^m-1} \sum_{j=1}^{2^n-1} f\left(\frac{i}{2^m}, \frac{j}{2^n}\right) \Phi_{m,i}(x) \Phi_{n,j}(y), \\ w_r(x,y) \approx \sum_{i=0}^{2^m} \sum_{j=0}^{2^n} w_r\left(\frac{i}{2^m}, \frac{j}{2^n}\right) \varphi_{m,i}(x) \varphi_{n,j}(y), f_s(x,y) \approx \sum_{i=0}^{2^m} \sum_{j=0}^{2^n} f_s\left(\frac{i}{2^m}, \frac{j}{2^n}\right) \varphi_{m,i}(x) \varphi_{n,j}(y), \\ w_r f_s \approx \sum_{i=0}^{2^m} \sum_{j=0}^{2^n} w_r\left(\frac{i}{2^m}, \frac{j}{2^n}\right) f_s\left(\frac{i}{2^m}, \frac{j}{2^n}\right) \varphi_{m,i}(x) \varphi_{n,j}(y), \\ w_r w_s \approx \sum_{i=0}^{2^m} \sum_{j=0}^{2^n} w_r\left(\frac{i}{2^m}, \frac{j}{2^n}\right) w_s\left(\frac{i}{2^m}, \frac{j}{2^n}\right) \varphi_{m,i}(x) \varphi_{n,j}(y), \end{cases} \quad (9)$$

式中 $\Phi_{m,i}(x)$ 表示满足边界条件的基函数, 代入新函数的表达式且应用 Galerkin 法, 可得

$$A_1 \mathbf{W}_r \approx \mathbf{B}_r \mathbf{W}, A_1 \mathbf{F}_r \approx \mathbf{B}_r \mathbf{F}, \quad r = 1, 2, 3, \quad (10)$$

其中系数矩阵和未知向量分别为

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{1,kl,ij} = \Omega_{kl,ij}\}, B_1 = \{b_{1,kl,ij} = \Upsilon_{kl,ij}^{20,00}\}, B_2 = \{b_{2,kl,ij} = \Upsilon_{kl,ij}^{11,00}\}, B_3 = \{b_{3,kl,ij} = \Upsilon_{kl,ij}^{02,00}\}, \\ \mathbf{W}_r &= \{w_{r,ij} = w_r(i/2^m, j/2^n)\}, \mathbf{W} = \{w_{ij} = w(i/2^m, j/2^n)\}, \\ \mathbf{F} &= \{f_{ij} = f(i/2^m, j/2^n)\}, \mathbf{F}_r = \{f_{r,ij} = f_r(i/2^m, j/2^n)\}, \end{aligned}$$

矩阵元素计算公式为 $\Omega_{kl,ij} = \int_0^1 \varphi_{m,i}(x) \varphi_{m,k}(x) dx \int_0^1 \varphi_{n,j}(y) \varphi_{n,l}(y) dy$ 和 $\Upsilon_{kl,ij}^{de,00} = \int_0^1 \Phi_{m,i}^{(d)}(x) \varphi_{m,k}(x) dx \int_0^1 \Phi_{n,j}^{(e)}(y) \varphi_{n,l}(y) dy$.

代入方程 (8), 且应用 Galerkin 法可得

$$\begin{cases} (\mathbf{A} + \lambda_x \mathbf{C} + \lambda_y \mathbf{D} + \lambda_{xy} \mathbf{E}) \mathbf{W} \approx c \mathbf{A}_2 [(\overline{\mathbf{B}}_1 \mathbf{F}) \circ (\overline{\mathbf{B}}_3 \mathbf{W}) - 2(\overline{\mathbf{B}}_2 \mathbf{F}) \circ (\overline{\mathbf{B}}_2 \mathbf{W}) + (\overline{\mathbf{B}}_3 \mathbf{F}) \circ (\overline{\mathbf{B}}_1 \mathbf{W})], \\ \mathbf{A} \mathbf{F} \approx \mathbf{A}_2 [(\overline{\mathbf{B}}_2 \mathbf{W}) \circ (\overline{\mathbf{B}}_2 \mathbf{W}) - (\overline{\mathbf{B}}_1 \mathbf{W}) \circ (\overline{\mathbf{B}}_3 \mathbf{W})], \end{cases} \quad (11)$$

其中系数矩阵 $\mathbf{A} = \{a_{kl,ij} = \Gamma_{kl,ij}^{40,00} + 2\beta^2 \Gamma_{kl,ij}^{22,00} + \beta^4 \Gamma_{kl,ij}^{04,00}\}$, $\mathbf{A}_2 = \{a_{2,kl,ij} = \beta^2 \Upsilon_{ij,kl}^{00,00}\}$, $\mathbf{C} = \{c_{kl,ij} = \Gamma_{ij,kl}^{20,00}\}$, $\mathbf{D} = \{d_{kl,ij} = \beta^2 \Gamma_{ij,kl}^{02,00}\}$, $\mathbf{E} = \{e_{kl,ij} = 2\beta \Gamma_{ij,kl}^{10,10}\}$, $\overline{\mathbf{B}}_j = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_j$, $\mathbf{A} \circ \mathbf{B} = \{a_{ij} b_{ij}\}$ 表示维数相同矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的 Schur 积, 即对应位置的元素相乘, 矩阵元素为小波连接系数 $\Gamma_{kl,ij}^{de,00} = \int_0^1 \Phi_{m,i}^{(d)}(x) \Phi_{m,k}(x) dx \int_0^1 \Phi_{n,j}^{(e)}(y) \Phi_{n,l}(y) dy$, 只需计算一次.

2 二次屈曲分析的小波方法

2.1 Jacobi 矩阵的计算

Von Kármán 方程是个单向耦合问题, 利用逆算子建立应力函数 f 和挠度函数 w 的映射关系, 并代入到离散代数方程组(11)中, 可化为如下非线性方程的一般形式:

$$\mathbf{G}(\mathbf{W}) \approx (\mathbf{A} + \lambda_x \mathbf{C} + \lambda_y \mathbf{D} + \lambda_{xy} \mathbf{E}) \{w_k\}^T + c \mathbf{A}_2 \{g(w_k)\}^T, \quad (12)$$

其中 g 表示非线性算子. 由向量值函数的广义 Taylor 定理, 可在状态 \mathbf{W}_0 附近对上式进行展开:

$$\mathbf{G}(\mathbf{W}) \approx \mathbf{G}(\mathbf{W}_0) + D_w \mathbf{G}(\mathbf{W}_0) \mathbf{W}_h + \frac{1}{2} D_{ww} \mathbf{G}(\mathbf{W}_0) \mathbf{W}_h^2 + r(\mathbf{W}_h^3), \quad (13)$$

其中 $D_w \mathbf{G}(\mathbf{W}_0)$ 和 $D_{ww} \mathbf{G}(\mathbf{W}_0)$ 即为 \mathbf{W}_0 处的 Jacobi 矩阵和 Hesse 矩阵.

引入另一个应力函数 f_p , 且令面内载荷表示为

$$p_x = \frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}, \quad p_y = \frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 f_p}{\partial x \partial y}, \quad (14)$$

那么无量纲化方程(5)可表示为

$$\begin{cases} \nabla^4 w = \beta^2 c [H(w, f) - H(w, f_p)], & x \in [0, 1], \\ \nabla^4 f = -\frac{\beta^2}{2} H(w, w), & y \in [0, 1]. \end{cases} \quad (15)$$

再将平衡路径上某个平衡状态记为 (w_0, f_0) , 且假设该状态的扰动量为 (w_h, f_h) , 那么控制方程(15)平衡解的扰动形式则为^[11]

$$w = w_0 + w_h, \quad f = f_0 + f_h. \quad (16)$$

将式(16)代入方程(15), 展开上式且考虑状态 (w_0, f_0) 处的平衡关系, 则有

$$\begin{cases} \nabla^4 w_h = \beta^2 c [H(w_h, f_0) + H(w_0, f_h) + H(w_h, f_h) - H(w_h, f_p)], \\ \nabla^4 f_h = -\frac{\beta^2}{2} [H(w_h, w_h) + 2H(w_0, w_h)]. \end{cases} \quad (17)$$

化简后可得原方程的一阶扰动方程

$$\begin{cases} \nabla^4 w_h = \beta^2 c [H(w_h, f_0) + H(w_0, f_h) - H(w_h, f_p) + r(f_h w_h)], \\ \nabla^4 f_h = -\beta^2 H(w_0, w_h) + r(w_h^2) \end{cases} \quad (18)$$

和二阶扰动方程

$$\begin{cases} \nabla^4 w_h = \beta^2 c [H(w_h, f_0) + H(w_0, f_h) + H(w_h, f_h) - H(w_h, f_p) + r(w_h^3)], \\ \nabla^4 f_h = -\frac{\beta^2}{2} [H(w_h, w_h) + 2H(w_0, w_h)]. \end{cases} \quad (19)$$

离散一阶扰动方程(18), 可得

$$\begin{cases} \mathbf{F}_h \approx -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{H}(\overline{\mathbf{B}}_i, \mathbf{W}_0) \mathbf{W}_h, \\ \{(\mathbf{A} + \lambda_x \mathbf{C} + \lambda_y \mathbf{D} + \lambda_{xy} \mathbf{E}) - c \mathbf{A}_2 [H(\overline{\mathbf{B}}_i, \mathbf{F}_0) - H(\mathbf{A}_{f,i}, \mathbf{W}_0)]\} \mathbf{W}_h \approx 0, \end{cases} \quad (20)$$

其中系数矩阵为 $\mathbf{A}_{f,i} = \overline{\mathbf{B}}_i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{H}(\overline{\mathbf{B}}_i, \mathbf{W}_0)$, $\mathbf{H}(\mathbf{A}_{f,i}, \mathbf{W}_0) = \text{diag}(\mathbf{A}_{f,1} \mathbf{W}_0) \mathbf{A}_{f,3} - 2 \text{diag}(\mathbf{A}_{f,2} \mathbf{W}_0) \mathbf{A}_{f,2} + \text{diag}(\mathbf{A}_{f,3} \mathbf{W}_0) \mathbf{A}_{f,1}$, $\mathbf{H}(\mathbf{B}_i, \mathbf{F}_0) = \text{diag}(\overline{\mathbf{B}}_1 \mathbf{F}_0) \overline{\mathbf{B}}_3 - 2 \text{diag}(\overline{\mathbf{B}}_2 \mathbf{F}_0) \overline{\mathbf{B}}_2 + \text{diag}(\overline{\mathbf{B}}_3 \mathbf{F}_0) \overline{\mathbf{B}}_1$.

由式(20)中第二式可得展开式(13)中的一阶扰动项, 即方程(12)的 Jacobi 矩阵:

$$D_w \mathbf{G}(\mathbf{W}_0) = \mathbf{A} + \lambda_x \mathbf{C} + \lambda_y \mathbf{D} - \tau_{xy} \mathbf{E} - cA_2 \mathbf{H}(\bar{\mathbf{B}}_i, \mathbf{F}_0) + cA_2 \mathbf{H}(\mathbf{A}_{f,i}, \mathbf{W}_0). \quad (21)$$

离散二阶扰动方程 (19), 可得

$$\begin{cases} \mathbf{F}_h \approx -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_2 [\mathbf{H}(\bar{\mathbf{B}}_i, \mathbf{W}_0) \mathbf{W}_h + (\bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{W}_h) \circ (\bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{W}_h) - (\bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{W}_h) \circ (\bar{\mathbf{B}}_3 \mathbf{W}_h)], \\ (\mathbf{A} + p_x \mathbf{C} + p_y \mathbf{D} - \tau_{xy} \mathbf{E}) \mathbf{W}_h - cA_2 [\mathbf{H}(\bar{\mathbf{B}}_i, \mathbf{F}_0) \mathbf{W}_h - \\ \mathbf{H}(\bar{\mathbf{B}}_i, \mathbf{F}_h) \mathbf{W}_0 + (\bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{F}_h) \circ (\bar{\mathbf{B}}_3 \mathbf{W}_h) - 2(\bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{F}_h) \circ (\bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{W}_h) + (\bar{\mathbf{B}}_3 \mathbf{F}_h) \circ (\bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{W}_h)] \approx 0. \end{cases} \quad (22)$$

由式 (22) 中第二式可得展开式 (13) 中的二阶扰动项, 即方程 (12) 的 Hesse 矩阵:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} D_{ww} \mathbf{G}(\mathbf{W}_0) \mathbf{W}_h^2 = cA_2 \{ & \mathbf{H}(\bar{\mathbf{B}}_i, \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_2 [(\bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{W}_h) \circ (\bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{W}_h) - (\bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{W}_h) \circ (\bar{\mathbf{B}}_3 \mathbf{W}_h)]) \mathbf{W}_0 + \\ & [\bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{H}(\bar{\mathbf{B}}_i, \mathbf{W}_0) \mathbf{W}_h] \circ [\bar{\mathbf{B}}_3 \mathbf{W}_h] - 2[\bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{H}(\bar{\mathbf{B}}_i, \mathbf{W}_0) \mathbf{W}_h] \circ [\bar{\mathbf{B}}_2 \mathbf{W}_h] + \\ & [\bar{\mathbf{B}}_3 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{H}(\bar{\mathbf{B}}_i, \mathbf{W}_0) \mathbf{W}_h] \circ [\bar{\mathbf{B}}_1 \mathbf{W}_h] \}. \end{aligned} \quad (23)$$

2.2 二次屈曲分析的方法

由隐函数定理可知, 当 Jacobi 矩阵 $D_w \mathbf{G}(\mathbf{W}_0, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_{xy})$ 非奇异时, 方程存在唯一解. 而依据屈曲问题的多解性质可知其 Jacobi 矩阵奇异, 即有

$$\det[D_w \mathbf{G}(\mathbf{W}_0, \lambda_x, \lambda_y, \lambda_{xy})] = 0. \quad (24)$$

方程 (24) 为非线性特征方程, 一般为超越方程, 直接求解非常困难. 考虑仅有 λ_x 的单向屈曲问题, 假设后屈曲平衡状态 w_0 为基本状态, 可得到由位移增量表示的线性特征方程:

$$D_w \mathbf{G}(\mathbf{W}_0, \lambda_x) \mathbf{W}_h = 0. \quad (25)$$

因此二次屈曲的临界条件也可表述为后屈曲路径上某处载荷值恰好为该点处 Jacobi 矩阵 $-\mathbf{C}^{-1}[\mathbf{A} - cA_2 \mathbf{H}(\bar{\mathbf{B}}_i, \mathbf{F}_p) + cA_2 \mathbf{H}(\mathbf{A}_{f,i}, \mathbf{W}_p)]$ 的特征值^[10].

扩展方程法是一种适用于高维分岔问题的直接求解方法, 而且能同时获得分岔点及其特征. 对于单向压缩屈曲问题, 可采用扩展方程为^[9]

$$\begin{cases} \mathbf{G}(\mathbf{W}, \lambda_x) + \mu \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}, \\ D_w \mathbf{G}(\mathbf{W}, \lambda_x) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}, \\ D_w \mathbf{G}(\mathbf{W}, \lambda_x) \mathbf{v} + D_{\lambda_x} \mathbf{G}(\mathbf{W}, \lambda_x) = \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{\varphi} - 1 = 0, \\ \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (26)$$

其中 $D_{\lambda_x} \mathbf{G}(\mathbf{W}, \lambda_x) = \mathbf{C} \mathbf{W}$. 原方程维数为 n , 扩展方程维数为 $3n + 2$, 待求变量为 $\{\mathbf{W}_{\text{cr}}, \boldsymbol{\varphi}_{\text{cr}}, \mathbf{v}_{\text{cr}}, \lambda_{x,\text{cr}}, \mu\}^T$. $\boldsymbol{\varphi}$ 实际上为分岔点处 Jacobi 矩阵的右特征向量, \mathbf{v} 则可以看作位移增量. 对于平凡解支上的初始分岔和非平凡解支上的二次分岔, 上述扩展方程均成立. 采用 Newton 方法求解扩展方程时, 对于初始分岔初始条件 \mathbf{W}_0 取为线性模态的一个较小倍数, $\boldsymbol{\varphi}_0$ 取临界状态附近 $D_x \mathbf{F} = \mathbf{A} + \lambda \mathbf{C}$ 的左特征向量, \mathbf{v}_0 取零向量, λ_x 取为线性临界载荷, μ 取为 0; 对于二次分岔, x_0 和 λ_x 取二次屈曲临界载荷附近的后屈曲状态, $\boldsymbol{\varphi}_0$ 取临界状态附近 $D_x \mathbf{F}$ 最小特征值对应的特征向量, \mathbf{v}_0 则取 $D_{\lambda} \mathbf{F}$, μ 仍然取为 0.

伪弧长法是一种具有大范围收敛性的间接延拓方法, 在分岔点附近对初始值的选取要求不高. 式 (12) 则可进一步化为常微分方程的 Cauchy 问题^[12]:

$$\begin{cases} \frac{dy}{ds} = \boldsymbol{\tau}, \\ \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_{\text{cr}}, \end{cases} \quad (27)$$

其中 $\mathbf{y} = \{\mathbf{W}, \lambda_x\}^T$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}(\mathbf{y}) / \|\mathbf{v}(\mathbf{y})\|$ 是解曲线 $\mathbf{y}(s)$ 的单位切向量, \mathbf{v} 为切向量, $\mathbf{v}(\mathbf{y}) = [J_1, J_2, \dots, J_{n+1}]^T$, 元素为

$$J_i = (-1)^{n+1+i} \det \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y_{i-1}}, \frac{\partial \widehat{\mathbf{G}}}{\partial y_i}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y_{i+1}}, \dots, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y_{n+1}} \right), \text{ 符号 } \wedge \text{ 表示划去该列. 采用预报-修正格式进行解的追踪}^{[9]}: \quad (28)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k-1} + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}_{k-1}) \cdot (s_k - s_{k-1}),$$

$$\begin{cases} \mathbf{y}_k^0 = \mathbf{y}_k, \\ \mathbf{y}_k^l = \mathbf{y}_k^l - \begin{bmatrix} DG(\mathbf{y}_k)^{-1} \\ \tau^T(\mathbf{y}_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{y}_k^{l-1}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (29)$$

式(28)为 Euler 预报格式,式(29)为 Newton 修正格式,迭代序列 $\mathbf{y}_k^0, \mathbf{y}_k^1, \dots, \mathbf{y}_k^l$ 收敛于解曲线 $\mathbf{y}(s)$ 上的某一点, $DG(\mathbf{y}_k)$ 则为预报点 \mathbf{y}_k 处的 Fréchet 导数, DG 的表达式为

$$DG = [D_w G, D_\lambda G]. \quad (30)$$

值得指出的是,扩展方程中的特征向量是求解分岔方向的前提,而分岔方向是进行解支转换的前提,联合使用扩展方程法和伪弧长法有利于开展大范围的后屈曲行为追踪来获取较为真实的失稳过程.

对于多参数屈曲问题,例如 p_x 和 p_y 双向压缩矩形薄板,可采用比例加载的方式求解临界参数,给定 λ_x , $\lambda_y = k\lambda_x$, 则临界参数为 $\lambda_{x,cr}$, $\lambda_{y,cr} = k\lambda_{x,cr}$, 通过改变比例系数 k 可得双参数平面上的相关曲线.平衡状态稳定性由 Lagrange 定理判定,即 Jacobi 矩阵为负定矩阵.

3 数值算例与讨论

3.1 Euler 屈曲算例

小波 Galerkin 方法获得的屈曲系数为 $k_c = \lambda_{x,cr} / (\beta^2 \pi^2)$. 对于长宽比为 1.0, 2.0, 3.0 和 4.0 的四边简支矩形薄板, 屈曲系数的精确值 $k_c=4$, 当 $m=n=4, 5, 6$ 时, 小波 Galerkin 法获得的临界载荷绝对误差 E 与离散方程数目 $(2^n - 1)^2$ 的关系, 如图 1 所示, 表明采用消失矩为 6 的 Coiflet 小波 Galerkin 法在求解矩形板屈曲问题时具有 2.6 阶收敛速度.

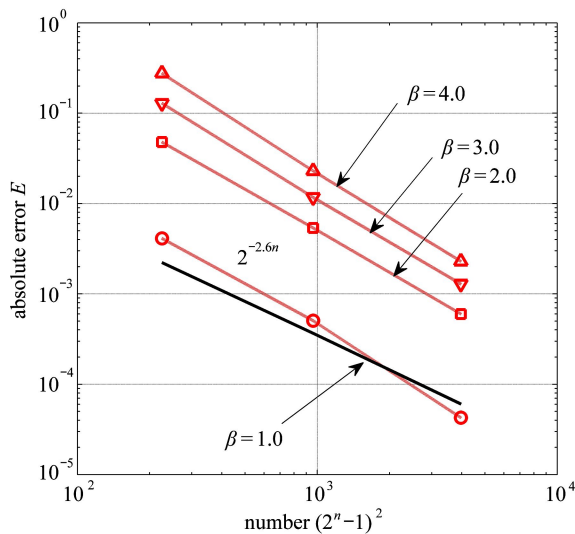


图 1 四边简支板屈曲载荷的收敛阶数
Fig. 1 Convergence orders of buckling loads for 4-edge simply supported plates

对于方形板,四边简支情形的后屈曲平衡路径由二次摄动法获得^[7],四边固支情形由非线性有限单元法和基于 Bior 3.1 的小波 Galerkin 法获得其后屈曲平衡路径^[6],如图 2 所示.本文利用基于 Coiflet 的小波 Galerkin 法求得的后屈曲路径与上述结果是一致的,四边简支情形($m=n=4, 5$)两者的误差在最大挠度 2 倍范围内误差不超过 5%,四边固支情形($m=4$)与已有结果的差别更小.基于 Bior 3.1 的小波 Galerkin 法涉及尺度函数的三重积分以及采用混合法处理边界,而基于 Coiflet 的小波 Galerkin 法仅仅需要计算尺度函数的二重积分.需要指出的是, Euler 后屈曲分析中通常假设模态的波形不变,因此其分析范围不宜取得过大.

3.2 二次屈曲算例

Euler 屈曲系数按大小顺序记为 $k_i, i=1, 2, \dots$. 最小特征值 k_1 附近,平凡解由稳定变为不稳定,高阶特征值 $k_i(i > 1)$ 附近,平凡解均为不稳定.从 k_i 处出发的非平凡解支上仍然有可能发生稳定性的变化,记该解支上的二次屈曲系数为 k_{i2} . 本文采用拓展方程(26)直接求解二次屈曲临界载荷,分解尺度分别取 $(m, n)=(4, 4), (5, 4)$,

(5, 5) 和 (6, 5) 时的方形薄板屈曲系数如图 3 所示, 表明小波 Galerkin 法在求解二次屈曲临界载荷时仍然具有良好的—致性。

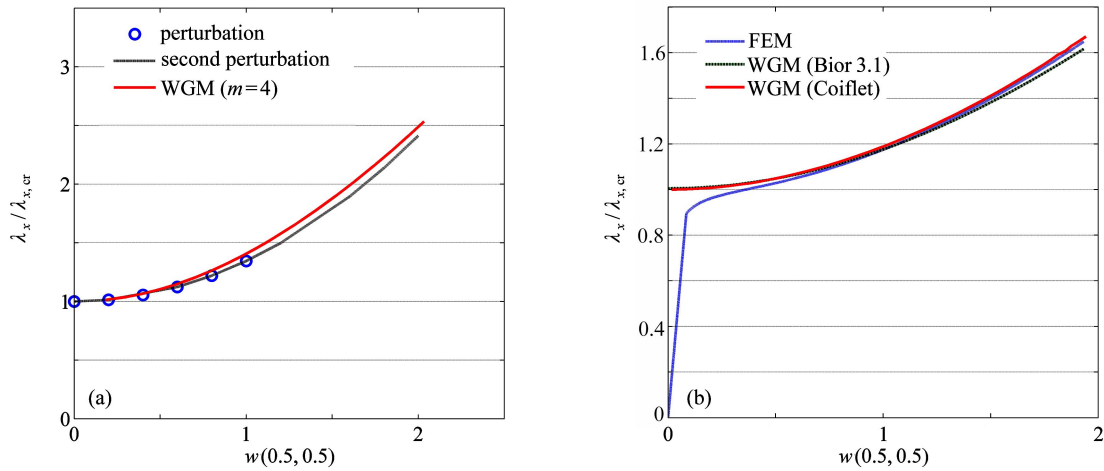


图 2 方形薄板单向压缩的后屈曲路径: (a) 四边简支; (b) 四边固支
Fig. 2 Post-buckling paths of square plates under uniaxial compression: (a) 4-edge simply supported; (b) 4-edge fixed

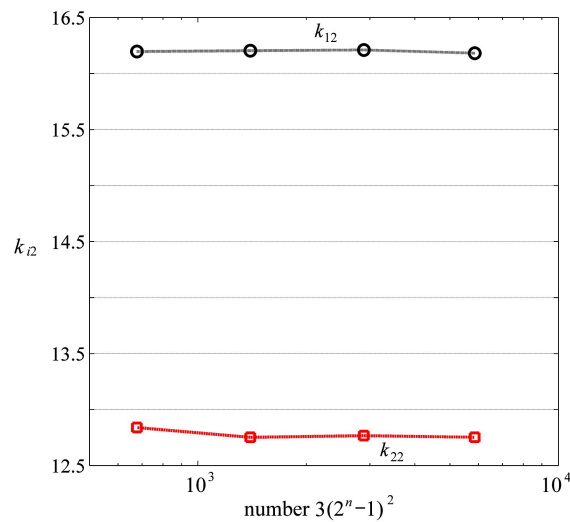


图 3 四边固支方形薄板的二次屈曲系数
Fig. 3 Secondary buckling coefficients of 4-edge fixed square plates

不同长宽比下单向受压四边简支矩形薄板的二次屈曲系数见表 1, 分解尺度取 $m=6, n=4$. 表中结果显示: 对于 $\beta=2.0$ 的简支板, 屈曲系数 $k_1=4.0$, 比值 k_{12}/k_1 和 k_{22}/k_1 分别为 2.78 和 1.34; 对于 $\beta=2.0$ 的固支板, 屈曲系数 $k_1=7.467$, 比值 k_{12}/k_1 为 6.15. $\beta=2.0$ 的铝板受压屈曲实验则显示, 简支板在加载压力为初始临界压力 1.3 倍左右时屈曲波形由两个半波迅速跳跃成三个半波, 固支板从一开始就出现三个半波, 直至出现塑性破坏也没有出现波形跳跃现象^[2]. 由半解析半经验公式可得, $\beta=2.0$ 简支板和固支板的平均破坏应力与 Euler 屈曲应力的比值分别为 5.3 和 3.5^[14]. 可见, 若 k_{12} 对应的二次临界载荷小于屈曲破坏载荷, 则实验能观察到波形跳跃现象, 不过观察到的是不稳定非平凡解支上的失稳点, 即 k_{22} . 这是由于波形跳跃是一个变化迅速的动态过程. Nakamura 和 Uetani 获得的长宽比为 2 简支板的二次屈曲系数为 12.45, 更接近 k_{12} , 这是由于其判定条件为稳定的非平凡解支失稳^[8]. 由非线性有限元获得固支方板的 k_{12} 和 k_{22} 的值分别为 17.46 和 12.53, 与本文结果也较为一致^[12].

为了确定波形跳跃的具体途径, 还应了解不同屈曲模态之间的耦合, 因此需要开展更大范围内的后屈曲平衡路径分析. 对于长宽比为 1.0 和 2.0 的四边简支和四边固支矩形薄板, 联合使用扩展方程和伪弧长法获得了大范围的后屈曲平衡路径追踪并进行了稳定性判定, 分别如图 4 和 5 所示. 结果显示, k_{12} 处既可能发生超

临界分岔也可能发生亚临界分岔, k_{22} 处则一般为亚临界分岔. 四边固支方形薄板的大范围后屈曲路径最为典型, k_{12} 处和 k_{22} 处均发生亚临界分岔且 k_{12} 和 k_{22} 之间存在连续的不稳定解, 这个不稳定的解为前两阶模态的耦合, 且投影到位移-转角组成的平面上为一条闭合曲线. 长宽比为 2.0 的四边固支板和简支板, k_{12} 处分别发生亚临界分岔和超临界分岔.

表 1 单向受压弹性矩形薄板的二次屈曲系数

Table 1 Secondary buckling coefficients of rectangular plates under uniaxial compression

β	4-edge simply supported		4-edge fixed	
	k_{12}	k_{22}	k_{12}	k_{22}
1.0	174.518	7.715	16.210	12.767
1.5	21.693	5.292	24.259	13.066
2.0	11.139	5.351	45.893	13.297
2.5	57.023	4.302	10.315	8.099
3.0	55.059	4.694	52.947	9.087

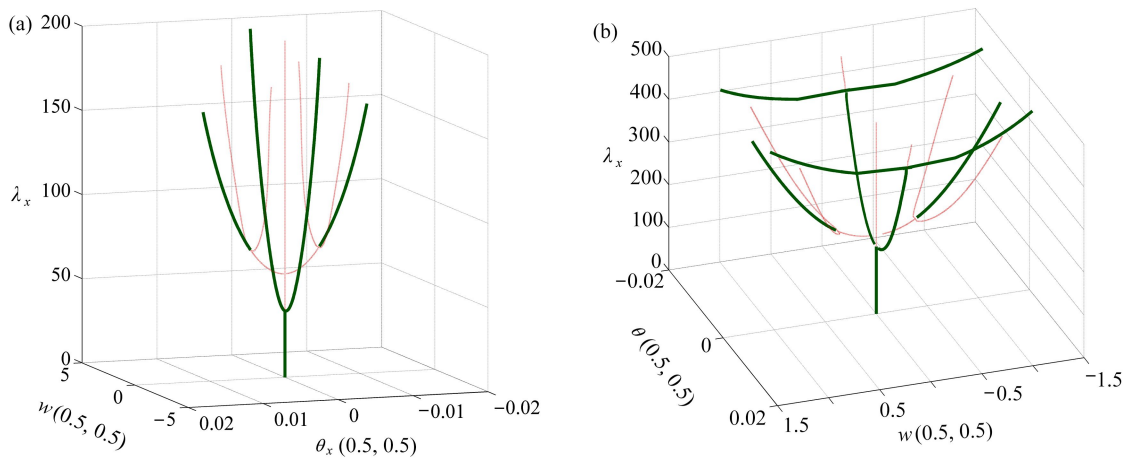


图 4 四边简支薄板二次屈曲平衡路径: (a) $\beta=1.0$; (b) $\beta=2.0$

Fig. 4 Secondary buckling paths of 4-edge simply supported plates: (a) $\beta=1.0$; (b) $\beta=2.0$

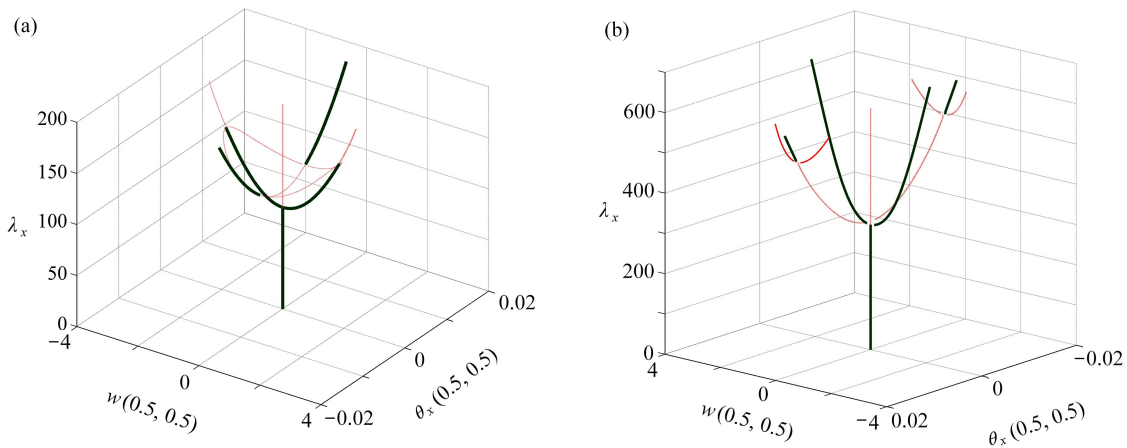


图 5 四边固支薄板二次屈曲平衡路径: (a) $\beta=1.0$; (b) $\beta=2.0$

Fig. 5 Secondary buckling paths of 4-edge fixed plates: (a) $\beta=1.0$; (b) $\beta=2.0$

大量的数值计算表明, 从初始屈曲到二次屈曲的平衡路径可分为两种情形: 一类是随着载荷幅值增大, 屈曲波形不发生改变, 只发生波形幅值增长, 如图 6 给出的方形薄板平衡曲面就是这种情形; 一类是随着载荷增大, 屈曲波形和幅值均发生变化, 如图 7 给出的 $\beta=2.0$ 矩形薄板平衡曲面则是这种情形. 表 1 中二次屈曲系数 k_{12} 的值超过 30 的矩形薄板, 其二次屈曲附近的屈曲波形均会发生变化, 即出现相邻稳定屈曲波形的耦合波形. 最后考虑了双向压缩 $k=0.2$ 下四边固支方板的二次屈曲路径, 如图 8 所示, 可见载荷变化也使得屈曲模态

的耦合通道不再闭合.

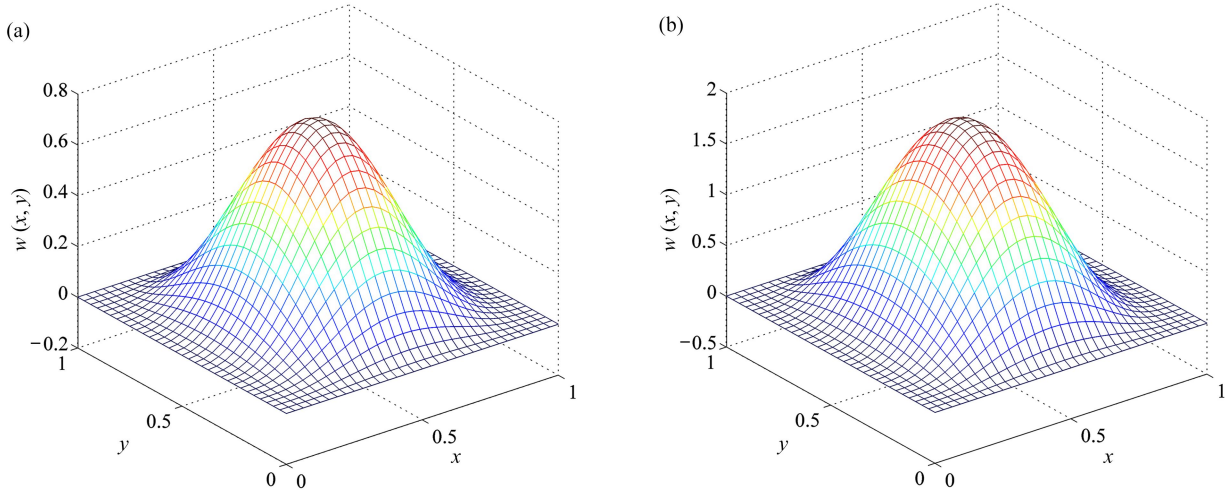


图 6 方形薄板($\beta=1.0$)后屈曲平衡曲面: (a) $\lambda=110$; (b) $\lambda=159.991$
 Fig. 6 Equilibrium surfaces of square plates ($\beta=1.0$) on postbuckling paths: (a) $\lambda=110$; (b) $\lambda=159.991$

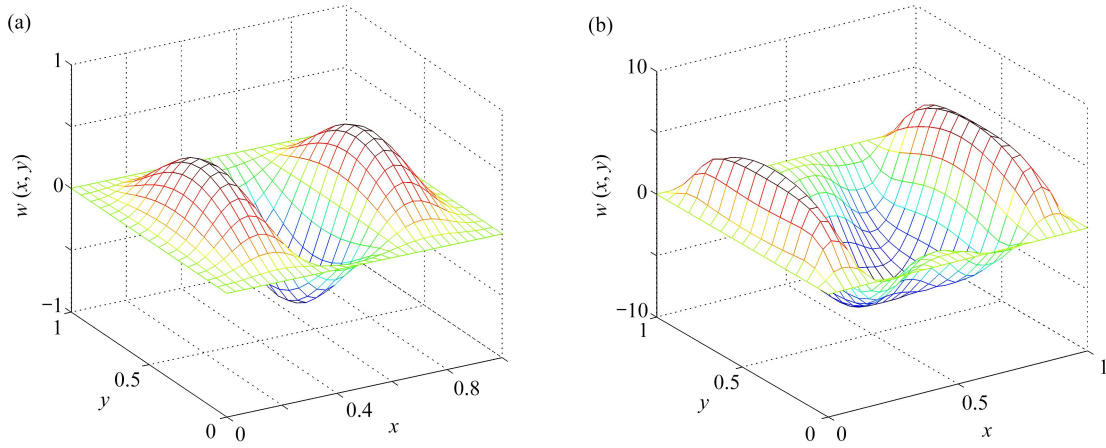


图 7 矩形薄板($\beta=2.0$)后屈曲平衡曲面: (a) $\lambda=350$; (b) $\lambda=1811.765$
 Fig. 7 Equilibrium surfaces of rectangular plates ($\beta=2.0$) on postbuckling paths: (a) $\lambda=350$; (b) $\lambda=1811.765$

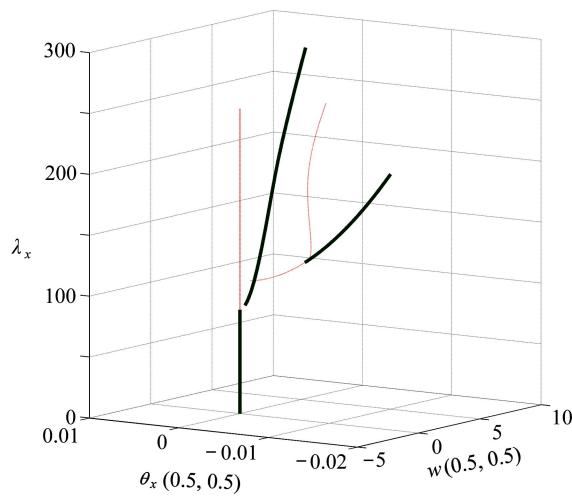


图 8 加载比例 $k=0.2$ 四边固支方板双向压缩的二次屈曲路径
 Fig. 8 Secondary buckling paths of a 4-edge fixed square plate with load ratio $k=0.2$

4 结 论

本文开展了基于 Coiflet 的小波 Galerkin 法在矩形薄板二次屈曲问题中的应用研究,并给出了一个非线性屈曲方程 Jacobi 矩阵的简便计算方法.数值计算结果表明:

- 1) 基于 Coiflet 的小波 Galerkin 法在求解屈曲临界载荷时仍然具有较好的收敛性,且与稳定性实验结果一致;
- 2) 在小范围后屈曲平衡路径追踪方面,小波 Galerkin 法与摄动法和有限单元法等现有结果也是一致的;
- 3) 完善矩形薄板二次屈曲的多参数大范围分析表明,在长宽比、边界条件和双向压缩载荷的影响下其前两阶屈曲模态的闭合耦合通道较为少见,矩形薄板后屈曲状态之间的跳跃可能会涉及更高阶的稳定模态.

附 录

文献 [2,13] 中建立的基于 Coiflet 尺度函数的修正基函数表达式为

$$\varphi_{j,k}(x) = \begin{cases} \sum_{i=2-3N+M_1}^{-1} T_{0,k}\left(\frac{i}{2^j}, \beta_0\right) \phi(2^j x - i + M_1) + \phi(2^j x - k + M_1), & k \in [0, 3], \\ \phi(2^j x - k + M_1), & k \in [4, 2^j - 4], \\ \sum_{i=2^{j+1}}^{2^j-1+M_1} T_{1,2^j-k}\left(\frac{i}{2^j}, \beta_1\right) \phi(2^j x - i + M_1) + \phi(2^j x - k + M_1), & k \in [2^j - 3, 2^j]. \end{cases} \quad (\text{A1})$$

修正系数为

$$T_{0,k}(x, \beta_0) = \sum_{i=0}^3 \beta_{0,i} \frac{\alpha_{0,i,k}}{i!} x^i, \quad T_{1,k}(x, \beta_1) = \sum_{i=0}^3 \beta_{1,i} \frac{\alpha_{1,i,k}}{i!} (x-1)^i, \\ \beta_0 = \{\beta_{0,i} = 1\}, \quad \beta_1 = \{\beta_{1,i} = 1\}, \quad \zeta_0 = \{2^{-ij} \alpha_{0,i,k}\}, \quad \zeta_1 = \{2^{-ij} \alpha_{1,i,k}\}, \quad i, k = 0, 1, 2, 3. \quad (\text{A2})$$

引入 β_0 和 β_1 是为说明边界条件的施加过程,为了满足 $x=0$ 处的齐次边界,仅仅需要令 $\beta_{0,i} = 0$, 而其他元素保持不变即可.根据四点 Mallkov 数值微分公式推导了 ζ_0 和 ζ_1 :

$$\zeta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11/6 & 3 & -3/2 & 1/3 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \zeta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11/6 & -3 & 3/2 & -1/3 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A3})$$

参考文献 (References):

- [1] 刘小靖, 周又和, 王记增. 小波方法及其力学应用研究进展[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(1): 1-13. (LIU Xiaojing, ZHOU Youhe, WANG Jizeng. Research progresses of wavelet methods and their applications in mechanics[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(1): 1-13.(in Chinese))
- [2] ZHANG Lei, WANG Jizeng, ZHOU Youhe. Wavelet solution for large deflection bending problems of thin rectangular plate[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2015, **85**: 355-365.
- [3] LIU X J, LIU G R, WANG J Z, et al. A wavelet multiresolution interpolation Galerkin method for targeted local solution enrichment[J]. *Computational Mechanics*, 2019, **64**: 989-1016.
- [4] 杨晓, 程昌钧. 联合载荷作用下简支矩形板的屈曲和过屈曲[J]. 力学学报, 1992, **24**(1): 82-92. (YANG Xiao, CHENG Changjun. The buckling and post-buckling of simply-supported rectangular plates under combination loads[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1992, **24**(1): 82-92.(in Chinese))
- [5] 周祥玉, 范祖尧. 受压薄板后屈曲性态的试验研究[J]. 上海交通大学学报, 1992, **26**(4): 14-19. (ZHOU Xiangyu, FAN Zuyao. An experiment study of post-buckling behavior of thin plates[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 1992, **26**(4): 14-19.(in Chinese))
- [6] JI Dongmei, CHEN Yanxia, HU Yuren. Application of the method of wavelet weighted residuals to post-buckling behavior of clamped rectangular plates[J]. *Journal of Ship Mechanics*, 2008, **12**(3): 454-463.
- [7] 沈惠申. 板壳后屈曲行为[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2002. (SHEN Huishen. *Postbuckling Behaviors of Plates and Shells*[M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 2002. (in Chinese))

- [8] NAKAMURA T, UETANI K. The secondary buckling and post-secondary-buckling behaviors of rectangular plates[J]. *International Journal of Mechanical Science*, 1979, **21**(5): 265-286.
- [9] REZAIEE P M, MOGHADDASIE B. Stability boundaries of two-parameter non-linear elastic structures[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, **51**(5): 1089-1102.
- [10] 陈晓, 戴诗亮, 许可. 复合材料层合板的二次屈曲和二次分枝点分析[J]. *计算力学学报*, 2002, **19**(2): 42-47. (CHEN Xiao, DAI Shiliang, XU Ke. Analysis of secondary buckling and secondary bifurcation point for composite laminated plates[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2002, **19**(2): 42-47.(in Chinese))
- [11] 吴柏生, 胡守信. 弹性基础上方形板的二次分叉[J]. *吉林大学自然科学学报*, 1993, **4**: 33-41. (WU Baisheng, HU Shouxin. Secondary bifurcation of a square plate on an elastic foundation[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Jilinensis*, 1993, **4**: 33-41.(in Chinese))
- [12] 金明, 黄克服, 武际可. 方板弹性突跳的数值模拟, 第一部分: 理论和计算方案[J]. *工程力学*, 2001, **18**(5): 18-28. (JIN Ming, HUANG Kefu, WU Jike. Numerical simulation of snap through of square plate, part I: theory and numerical methods[J]. *Engineering Mechanics*, 2001, **18**(5): 18-28.(in Chinese))
- [13] 王记增. 正交小波统一理论与方法及其在压电智能结构等力学研究中的应用[D]. 博士学位论文. 兰州: 兰州大学, 2001. (WANG Jizeng. Generalized theory and arithmetic of orthogonal wavelets and applications to researches of mechanics including piezoelectric smart structures[D]. PhD Thesis. Lanzhou: Lanzhou University, 2001. (in Chinese))
- [14] 崔德刚. 结构稳定性设计手册[M]. 北京: 航空工业出版社, 1996. (CUI Degang. *Handbook of Structure Stability Design*[M]. Beijing: Aviation Industry Press, 1996. (in Chinese))