

# 具有时变时滞的离散时间 切换奇异正系统的 $l_1$ 滤波\*

王金玲, 侯玉晓, 李强, 谢宝英

(安徽农业大学 理学院, 合肥 230036)

**摘要:** 该文主要研究了一类具有时变时滞的离散时间切换奇异系统在正性约束下的  $l_1$  滤波器的设计问题。通过构造合适的共正 Lyapunov 函数并且利用平均驻留时间的方法, 以线性规划的形式给出使得相应的滤波误差系统是正的、正则的、因果的、指数稳定的充分条件。另外, 外部扰动输入对系统性能的影响也被加以分析和讨论, 并在稳定性的基础上进一步给出滤波误差系统具有给定  $l_1$  增益性能的充分条件和相应滤波器的设计方法。最后, 通过数值算例来验证所给方法的有效性和可行性。

**关键词:** 时变时滞; 切换奇异系统; 正系统; 平均驻留时间; 指数稳定性; 滤波器设计  
**中图分类号:** O175      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.430125

## The $l_1$ Filter for Discrete-Time Switched Singular Positive Systems With Time-Varying Delays

WANG Jinling, HOU Yuxiao, LI Qiang, XIE Baoying

(School of Science, Anhui Agricultural University, Hefei 230036, P.R.China)

**Abstract:** The design problem of  $l_1$  filters was studied for a class of discrete-time switched singular systems with positive constraints and time-varying delays. Through construction of an appropriate co-positive Lyapunov function and with the average dwell time technique, sufficient conditions in the form of linear programming were provided to ensure the corresponding filtering error system to be positive, regular, causal and exponentially stable. In addition, the effect of the exogenous disturbance input on the system performance was also analyzed and discussed. The sufficient conditions and design mechanisms for the corresponding filter to ensure that the filtering error system has the prescribed  $l_1$  disturbance attenuation performance were also given. Finally, a simulation example was provided to verify the effectiveness and feasibility of the proposed method.

**Key words:** time-varying delay; switched singular system; positive system; average dwell time; exponential stability; filter design

\* 收稿日期: 2022-04-08; 修订日期: 2022-06-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(62003002);安徽省自然科学基金项目(2008085QF327)

作者简介: 王金玲(1989—), 女, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: jinlingwang@ahau.edu.cn);  
侯玉晓(1996—), 女, 硕士生(E-mail: 15201690605@163.com);  
李强(1991—), 男, 副教授, 博士(E-mail: seuliqiang@ahau.edu.cn);  
谢宝英(1981—), 女, 讲师, 硕士(E-mail: xieby1014@163.com).

引用格式: 王金玲, 侯玉晓, 李强, 谢宝英. 具有时变时滞的离散时间切换奇异正系统的  $l_1$  滤波[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(7): 857-869.

## 0 引言

1989年, Dai 出版了关于奇异系统理论的第一本专著, 系统地介绍了有关奇异系统的基本理论, 该著作的发表标志着奇异系统理论的正式形成<sup>[1]</sup>. 奇异系统可以看作是对由微分/差分方程描述的状态空间模型的一种推广. 根据应用领域的不同, 奇异系统又常常被称作描述系统、隐式系统、广义状态空间系统、半状态系统、微分代数系统等<sup>[2-3]</sup>. 由于奇异系统既包含由微分方程(连续系统)或差分方程(离散系统)描述的慢变子系统, 又包含由代数方程描述的快变子系统, 因此, 对奇异系统相关动力学行为的研究往往比由单独的微分或差分方程描述的状态空间模型的研究更复杂<sup>[4]</sup>. 值得指出的是, 奇异系统模型存在于社会生活的诸多领域, 比如常见的 Leontief 经济模型、Hopfield 神经网络模型、害虫治理模型、电路系统、机器人系统、核反应堆系统等<sup>[5]</sup>. 近年来, 这类特殊但与现实密切相关的系统开始受到国内外学者的广泛关注<sup>[6-8]</sup>. 奇异系统具有广泛的应用背景, 其优点是能更确切地反映现实系统中变量之间的关系. 然而, 由奇异系统的定义可知, 很多对于一般系统成立的结论都不能直接应用到该系统中去, 这也是笔者撰写本文的动机之一.

为了更好地刻画越来越复杂的工程实践过程, 由多个子系统和一个切换信号所组成的切换系统应运而生. 切换系统理论能有效地描述很多复杂的动力学行为, 为探索与研究复杂系统的性质提供了一种有效的途径<sup>[9]</sup>. 切换信号的选取对系统的稳定性有很大的影响, 具体地: 即使所有的子系统都是稳定的, 仍然可以通过限定切换信号来使最终的切换系统是不稳定的<sup>[10]</sup>; 另一方面, 当所有的子系统都不稳定时, 在某些特定的切换信号下, 也能使最终的切换系统是稳定的<sup>[11-12]</sup>. 在研究切换系统的稳定性时, 为了降低所得结果的保守性, 目前较为成熟和有效的方法是对切换信号加以平均驻留时间的约束, 即在平均意义下, 限制两个连续切换时刻之间的时间差<sup>[13]</sup>. 另外, 考虑到信息传递的延迟性和外界环境的复杂多变性, 将时变时滞引入到切换系统中进一步完善, 使其更接近真实系统是很有必要的<sup>[14]</sup>. 时滞的存在可能会导致系统性能的破坏, 甚至会改变系统的稳定性, 这是值得探究的外部因素. 近些年来, 时滞切换系统逐渐成为控制领域中一个热门的研究课题, 并且在稳定性分析<sup>[15]</sup>、滤波器设计<sup>[16]</sup>、性能分析<sup>[17]</sup>等方面取得了很多喜人的成果.

前面提到的奇异系统和切换系统, 其状态变量和输出变量可以在整个实数空间中取值. 然而, 很多现实系统都有非负的行为特性, 我们称之为正系统. 与一般动力系统相比, 正系统的最大特性在于其正性, 即系统所有的状态变量和输出变量都只能在实数空间的第一象限内取值<sup>[18]</sup>. 作为一类特殊的动力学系统, 正系统在实际中有着非常广泛的应用. 例如生物学中常见的捕食-被捕食模型、人口模型, 以及很多刻画化工工业生产的模型等都需要用正系统来描述<sup>[19]</sup>. 很显然, 在对这类特殊的系统进行稳定性分析时, 也可以采用经典的二次 Lyapunov 函数方法, 但是这样就不能体现其正性这一有别于一般系统的特性. 因而得到的结果必然会有一定的保守性. 为了充分利用正系统状态变量非负的特性, 本文将通过选取共正 Lyapunov 函数这一线性形式的函数来研究其稳定性. 一般地, 共正 Lyapunov 函数的结构相对简单, 并且相比于二次 Lyapunov 函数来说能得到具有更少保守性的条件, 所得结果对工程实践具有重大的指导价值<sup>[20]</sup>. 众所周知, 在研究奇异系统的稳定性时, 首先要验证其正则性和因果性是否成立, 以确保解的存在唯一性. 当将时变时滞、切换机制和正性引入后, 再分析奇异系统的正则、因果、稳定时难度将大大提升. 和已有文献相比, 本文所考虑的系统更具一般性, 所得结果也更具实用性.

另外, 在状态空间模型中, 往往很难直接测量得到系统的状态, 需要通过系统地输入和输出信息将其重构出来, 这就是所谓的滤波问题. 滤波问题在工程应用, 尤其是在生物学、信号处理、网络控制和过程控制等领域中都具有重要的作用<sup>[21]</sup>. 若所研究的系统中存在外部干扰信号, 我们经常对其设计  $H_\infty$  滤波器, 此滤波器的好处在于: 不需要知道外部干扰信号确切的统计特性, 因而具有一定的鲁棒性. 设计  $H_\infty$  滤波器旨在找到一个估计器使得相应的滤波误差系统是稳定的, 并且扰动输入到估计误差的传递函数的  $H_\infty$  范数小于某个给定的值  $\gamma$ <sup>[22]</sup>. 然而, 对于正系统来说, 考虑到其状态变量和输出变量的正性, 研究其 1-范数更符合实际, 也就是说, 对其设计  $l_1$  滤波器更为合适<sup>[21]</sup>. 现有文献中已有很多关于滤波器设计问题的结果<sup>[23-26]</sup>, 这些文献分别对不确定时滞摄动系统、时变重复过程、切换系统、切换奇异系统设计了合适的滤波器. 然而, 系统固有的正性却均未涉及, 这是书写本文内容的另一个动机. 受上述讨论的启发, 本文旨在研究具有时变时滞的离散时间切换奇异正系统的  $l_1$  滤波器的设计问题. 本文的主要创新点和贡献可以概括为以下几个方面: ①考

虑到现实生产过程和外界干扰的复杂多变性,本文探讨了时变时滞、切换以及系统的正性等普遍存在的现象对奇异系统的影响;② 本文首次对奇异切换正系统设计具有指数稳定性和  $l_1$  增益性能的滤波器;③ 通过利用平均驻留时间和共正 Lyapunov 函数的方法,给出了滤波误差系统指数稳定和  $l_1$  增益性能的充分条件和相应滤波器的设计方法。

本文使用的符号意义如下:  $\mathbf{Z}$  表示非负整数的集合;  $\mathbf{A} \geq \mathbf{0} (\leq \mathbf{0})$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的所有元素均非负(非正),  $\mathbf{A}^T$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的转置,  $\det(\mathbf{A})$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的行列式,  $\deg(\cdot)$  表示多项式的次数,  $\text{rank}(\mathbf{A})$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的秩;  $\mathbf{R}(\mathbf{R}_+)$  表示所有的实数(正实数)所组成的集合,  $R^n$  表示  $n$  维实向量空间,  $R_+^n$  表示  $n$  维正实向量空间,  $R_{0,+}^n$  表示  $n$  维非负实向量空间,  $R^{m \times n}$  表示所有  $m \times n$  维实矩阵所组成的集合;  $A_{p,q}$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $p$  行、第  $q$  列处的元素,  $\mathbf{A}_{r,a}$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $a$  行,  $\mathbf{A}_{e,a}$  表示矩阵  $\mathbf{A}$  的第  $a$  列;  $x_p$  表示向量  $\mathbf{x}$  的第  $p$  个分量,  $\|\mathbf{x}\|_1 \triangleq \sum_{p=1}^n |x_p|$  表示向量  $\mathbf{x} \in R^n$  的 1 范数,  $\|\mathbf{A}\|_1 \triangleq \max_{1 \leq q \leq m} \sum_{p=1}^n |A_{p,q}|$  表示矩阵  $\mathbf{A} \in R^{n \times m}$  的 1 范数,  $\mathbf{x} \in l_1[0, \infty)$  表示向量值函数  $\mathbf{x}: \mathbf{Z} \rightarrow R^n$  满足  $\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{x}(k)\|_1 < \infty$ ;  $\mathbf{1}_n \in R^n$  表示所有元素都为 1 的  $n$  维列向量,对于任意的  $\mathbf{v} \in R^n$ ,  $\bar{\rho}(\mathbf{v})$  表示向量  $\mathbf{v}$  分量的最大值,  $\underline{\rho}(\mathbf{v})$  表示向量  $\mathbf{v}$  分量的最小值。

### 1 问题描述

考虑如下具有时变时滞的离散时间切换奇异系统:

$$\begin{cases} \mathbf{E}\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_{\sigma(k)}\mathbf{x}(k) + \mathbf{A}_{d,\sigma(k)}\mathbf{x}(k-d(k)) + \mathbf{B}_{\sigma(k)}\mathbf{w}(k), \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_{\sigma(k)}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_{\sigma(k)}\mathbf{w}(k), \\ \mathbf{z}(k) = \mathbf{L}_{\sigma(k)}\mathbf{x}(k), \\ \mathbf{x}(\theta) = \boldsymbol{\psi}(\theta), \quad \theta = -\bar{d}, -\bar{d}+1, \dots, 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $k \in \mathbf{Z}, \mathbf{x}(k) \in R^n$  表示在时刻  $k$  处的状态向量,  $\mathbf{y}(k) \in R^m$  是测量输出向量,  $\mathbf{z}(k) \in R^p$  是待估计的输出向量,  $\mathbf{w}(k) \in R^r$  是属于  $l_1[0, \infty)$  的扰动输入向量,  $\boldsymbol{\psi}(\theta) \in R^n$  是系统(1)的初始状态函数,  $\mathbf{E} \in R^{n \times n}$  是满足  $\text{rank}(\mathbf{E}) = s < n$  的奇异矩阵,  $d(k)$  是满足  $0 \leq \underline{d} \leq d(k) \leq \bar{d}$  的时变时滞,  $\bar{d}$  和  $\underline{d}$  分别表示时变时滞的上界和下界,  $\sigma(\cdot): \mathbf{Z} \rightarrow I_N \triangleq \{1, 2, \dots, N\}$  是一个切换信号,  $N$  是子系统的个数,  $\{k_r \in \mathbf{Z} \mid r \in \mathbf{Z}, k_0 = 0\}$  表示切换时间序列,当  $k \in [k_r, k_{r+1})$  时,第  $\sigma(k_r)$  个子系统被激活,  $k_{r+1} - k_r$  表示第  $\sigma(k_r)$  个子系统所运行的时间,  $\mathbf{A}_{\sigma(k)}, \mathbf{A}_{d,\sigma(k)}, \mathbf{B}_{\sigma(k)}, \mathbf{C}_{\sigma(k)}, \mathbf{D}_{\sigma(k)}, \mathbf{L}_{\sigma(k)}$  是具有相应维数的已知常系数矩阵.值得注意的是,由于  $\text{rank}(\mathbf{E}) = s < n$ , 故存在非奇异矩阵  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in R^{n \times n}$  使得

$$\begin{aligned} \mathbf{PEQ} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{s \times s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{PA}_i\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i1} & \mathbf{A}_{i2} \\ \mathbf{A}_{i3} & \mathbf{A}_{i4} \end{pmatrix}, \mathbf{PA}_{d,i}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{d,i1} & \mathbf{A}_{d,i2} \\ \mathbf{A}_{d,i3} & \mathbf{A}_{d,i4} \end{pmatrix}, \mathbf{PB}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{i1} \\ \mathbf{B}_{i2} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}_i\mathbf{Q} &= (\mathbf{C}_{i1} \quad \mathbf{C}_{i2}), \mathbf{L}_i\mathbf{Q} = (\mathbf{L}_{i1} \quad \mathbf{L}_{i2}), \quad i \in I_N. \end{aligned}$$

不失一般性,令

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{s \times s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i1} & \mathbf{A}_{i2} \\ \mathbf{A}_{i3} & \mathbf{A}_{i4} \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{d,i} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{d,i1} & \mathbf{A}_{d,i2} \\ \mathbf{A}_{d,i3} & \mathbf{A}_{d,i4} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{i1} \\ \mathbf{B}_{i2} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}_i = (\mathbf{C}_{i1} \quad \mathbf{C}_{i2}), \mathbf{L}_i = (\mathbf{L}_{i1} \quad \mathbf{L}_{i2}), \end{cases} \quad i \in I_N. \quad (2)$$

本文的目的是设计如下形式的滤波器:

$$\begin{cases} \mathbf{E}\mathbf{x}_f(k+1) = \mathbf{A}_{\sigma(k)}\mathbf{x}_f(k) + \mathbf{K}_{\sigma(k)}(\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}_{\sigma(k)}\mathbf{x}_f(k)), \\ \mathbf{z}_f(k) = \mathbf{L}_{\sigma(k)}\mathbf{x}_f(k), \\ \mathbf{x}_f(0) = \mathbf{x}_{f0}, \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{x}_f(k) \in R^n$  是滤波器的状态向量,  $\mathbf{z}_f(k) \in R^p$  是滤波器的估计输出向量,  $\mathbf{K}_i = (\mathbf{K}_{i1}^T, \mathbf{K}_{i2}^T)^T$  是待设计的滤波器矩阵。

通过定义  $\mathbf{x}_e(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_f(k), \mathbf{z}_e(k) = \mathbf{z}(k) - \mathbf{z}_f(k)$ , 可以得到如下的滤波误差系统:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{E}}\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}_{\sigma(k)}\bar{\mathbf{x}}(k) + \bar{\mathbf{A}}_{d,\sigma(k)}\bar{\mathbf{x}}(k-d(k)) + \bar{\mathbf{B}}_{\sigma(k)}\mathbf{w}(k), \\ \mathbf{z}_e(k) = (\mathbf{0}, \mathbf{L}_{\sigma(k)})\bar{\mathbf{x}}(k), \\ \bar{\mathbf{x}}(\theta) = (\boldsymbol{\psi}^T(\theta), \boldsymbol{\psi}^T(\theta) - \mathbf{x}_{00}^T)^T, \quad \theta = -\bar{d}, -\bar{d}+1, \dots, 0, \end{cases} \quad (4)$$

其中  $\bar{\mathbf{x}}(k) = (\mathbf{x}^T(k), \mathbf{x}_e^T(k))^T$ , 相关的系数矩阵为

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_i - \mathbf{K}_i\mathbf{C}_i \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}}_{d,i} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{d,i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{d,i} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_i \\ \mathbf{B}_i - \mathbf{K}_i\mathbf{D}_i \end{pmatrix}, \quad i \in I_N.$$

为了本文研究的需要,引入下面几个定义、引理和假设.

**定义 1**<sup>[26]</sup> 1) 对于任意的  $i \in I_N$ , 若  $\det(s\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{A}}_i) \neq 0$ , 则称滤波误差系统(4)是正则的;

2) 对于任意的  $i \in I_N$ , 若  $\deg(\det(s\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{A}}_i)) = \text{rank}(\bar{\mathbf{E}})$ , 则称滤波误差系统(4)是因果的.

**定义 2**<sup>[27]</sup> 如果对于任意的非负初始条件  $\bar{\mathbf{x}}(\theta)$  和非负扰动输入  $\mathbf{w}(k)$ , 都有  $\bar{\mathbf{x}}(k) \in R_{0,+}^n$  和  $\mathbf{z}_e(k) \in R_{0,+}^p$  对所有的  $k \in \mathbf{Z}$  成立, 则称滤波误差系统(4)是正的.

**定义 3**<sup>[28]</sup> 当  $\mathbf{w}(k) \equiv \mathbf{0}$  时, 若存在常数  $\tau > 0$  和  $0 < \varpi < 1$ , 使得对于任意的非负初始条件  $\bar{\mathbf{x}}(\theta)$  和切换信号  $\sigma(\cdot)$ , 都有

$$\|\bar{\mathbf{x}}(k)\|_1 \leq \tau \varpi^{k-k_0} \sup_{-\bar{d} \leq \theta \leq 0} \|\bar{\mathbf{x}}(\theta)\|_1, \quad \forall k \in \mathbf{Z}$$

成立, 则称滤波误差系统(4)是指数稳定的.

**定义 4**<sup>[29]</sup> 滤波误差系统(4)指数稳定及零初始条件下, 若对于给定的常数  $\alpha > 0$  和  $\gamma > 0$ , 都有

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha^k \|\mathbf{z}_e(k)\|_1 \leq \gamma \sum_{k=k_0}^{\infty} \|\mathbf{w}(k)\|_1, \quad \forall \mathbf{w}(k) \in l_1[0, \infty) \quad (5)$$

成立, 则称滤波误差系统(4)具有  $l_1$  增益性能指标  $\gamma$ .

**定义 5**<sup>[30]</sup> 对于任意的非负整数  $T_2 > T_1, N_\sigma(T_1, T_2)$  为切换信号  $\sigma(\cdot)$  在区间  $[T_1, T_2]$  上的切换次数, 若存在正常数  $N_0$  和  $T_a$  使得不等式

$$N_\sigma(T_1, T_2) \leq N_0 + \frac{T_2 - T_1}{T_a} \quad (6)$$

成立, 则称  $T_a$  为切换信号  $\sigma(\cdot)$  的平均驻留时间,  $N_0$  为振动界.

**注 1** 不失一般性, 在本文中, 取振动界  $N_0$  为 0, 从上述定义可以看出, 如果切换信号  $\sigma(\cdot)$  满足平均驻留时间的约束, 那么两个连续切换时刻之间的时间差在平均意义下是大于等于  $T_a$  的.

**引理 1**<sup>[31]</sup> 若对所有的  $i \in I_N$ , 都有  $\mathbf{A}_{i4}$  和  $\mathbf{A}_{i4} - \mathbf{K}_{i2}\mathbf{C}_{i2}$  是非奇异的, 则系统(4)是正则的、因果的.

**假设 1** 对所有的  $i \in I_N$ , 系统(1)中的系数矩阵满足:  $\mathbf{A}_{i1} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{i2} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{i3} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{i4}^{-1} \leq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{d,i} \geq \mathbf{0}, \mathbf{B}_i \geq \mathbf{0}$  和  $\mathbf{L}_i \geq \mathbf{0}$ .

对于所有的  $i \in I_N$  及任意给定的正常数  $\xi$ , 当矩阵  $\mathbf{A}_{i4}$  非奇异, 并且  $\mathbf{A}_{i4} - \mathbf{K}_{i2}\mathbf{C}_{i2} = -\xi\mathbf{I}$  时, 滤波误差系统(4)可转化为

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}_1(k+1) = \mathcal{A}_{i1}\bar{\mathbf{x}}_1(k) + \mathcal{A}_{d,i1}\bar{\mathbf{x}}_1(k-d(k)) + \mathcal{A}_{d,i2}\bar{\mathbf{x}}_2(k-d(k)) + \mathcal{B}_{i1}\mathbf{w}(k), \\ \bar{\mathbf{x}}_2(k) = \mathcal{A}_{i3}\bar{\mathbf{x}}_1(k) + \mathcal{A}_{d,i3}\bar{\mathbf{x}}_1(k-d(k)) + \mathcal{A}_{d,i4}\bar{\mathbf{x}}_2(k-d(k)) + \mathcal{B}_{i2}\mathbf{w}(k), \\ \mathbf{z}_e(k) = (\mathbf{0}, \mathbf{L}_{i1})\bar{\mathbf{x}}_1(k) + (\mathbf{0}, \mathbf{L}_{i2})\bar{\mathbf{x}}_2(k), \\ \bar{\mathbf{x}}_1(\theta) = (\boldsymbol{\psi}_1^T(\theta), \boldsymbol{\psi}_1^T(\theta) - \mathbf{x}_{01}^T)^T, \quad \theta = -\bar{d}, -\bar{d}+1, \dots, 0, \\ \bar{\mathbf{x}}_2(\theta) = (\boldsymbol{\psi}_2^T(\theta), \boldsymbol{\psi}_2^T(\theta) - \mathbf{x}_{02}^T)^T, \quad \theta = -\bar{d}, -\bar{d}+1, \dots, 0, \end{cases} \quad (7)$$

其中  $\bar{\mathbf{x}}_1(k) = (\mathbf{x}_1^T(k), \mathbf{x}_{e1}^T(k))^T, \bar{\mathbf{x}}_2(k) = (\mathbf{x}_2^T(k), \mathbf{x}_{e2}^T(k))^T, \mathbf{x}(k) = (\mathbf{x}_1^T(k), \mathbf{x}_2^T(k))^T, \mathbf{x}_e(k) = (\mathbf{x}_{e1}^T(k), \mathbf{x}_{e2}^T(k))^T, \mathbf{x}_1(k), \mathbf{x}_{e1}(k) \in R^s, \mathbf{x}_2(k), \mathbf{x}_{e2}(k) \in R^{n-s}, \boldsymbol{\psi}(\theta) = (\boldsymbol{\psi}_1^T(\theta), \boldsymbol{\psi}_2^T(\theta))^T, \mathbf{x}_{00} = (\mathbf{x}_{01}^T, \mathbf{x}_{02}^T)^T, \boldsymbol{\psi}_1(\theta), \mathbf{x}_{01} \in R^{2s}, \boldsymbol{\psi}_2(\theta), \mathbf{x}_{02} \in R^{2(n-2s)}$ , 相关的系数矩阵为

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{i1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{i1} - \mathbf{A}_{i2}\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{A}_{i3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{i1K} \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{d,i1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{d,i1} - \mathbf{A}_{i2}\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{A}_{d,i3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{d,i1K} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{d,i2} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{d,i2} - \mathbf{A}_{i2}\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{A}_{d,i4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{d,i2K} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B}_{i1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{i1} - \mathbf{A}_{i2}\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{B}_{i2} \\ \mathbf{B}_{i1K} \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{i3} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{A}_{i3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{i3K} \end{pmatrix}, \mathcal{A}_{d,i3} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{A}_{d,i3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{d,i3}/\xi & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{A}_{d,i4} &= \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{A}_{d,i4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{d,i4}/\xi & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathcal{B}_{i2} = \begin{pmatrix} -\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{B}_{i2} \\ \mathbf{B}_{i2K} \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{i1K} = \mathbf{A}_{i1} - \mathbf{K}_{i1}\mathbf{C}_{i1} + (\mathbf{A}_{i2} - \mathbf{K}_{i1}\mathbf{C}_{i2})(\mathbf{A}_{i3} - \mathbf{K}_{i2}\mathbf{C}_{i1})/\xi, \\ \mathbf{A}_{d,i1K} &= \mathbf{A}_{d,i1} + (\mathbf{A}_{i2} - \mathbf{K}_{i1}\mathbf{C}_{i2})\mathbf{A}_{d,i3}/\xi, \mathbf{A}_{d,i2K} = \mathbf{A}_{d,i2} + (\mathbf{A}_{i2} - \mathbf{K}_{i1}\mathbf{C}_{i2})\mathbf{A}_{d,i4}/\xi, \mathbf{A}_{i3K} = (\mathbf{A}_{i3} - \mathbf{K}_{i2}\mathbf{C}_{i1})/\xi, \\ \mathbf{B}_{i1K} &= \mathbf{B}_{i1} - \mathbf{K}_{i1}\mathbf{D}_i + (\mathbf{A}_{i2} - \mathbf{K}_{i1}\mathbf{C}_{i2})(\mathbf{B}_{i2} - \mathbf{K}_{i2}\mathbf{D}_i)/\xi, \mathbf{B}_{i2K} = (\mathbf{B}_{i2} - \mathbf{K}_{i2}\mathbf{D}_i)/\xi. \end{aligned}$$

**引理 2**<sup>[29]</sup> 若对于所有的  $i \in I_N$  和任意给定的正常数  $\xi$ , 都有  $\mathbf{A}_{i4}$  非奇异, 并且  $\mathbf{A}_{i4} - \mathbf{K}_{i2}\mathbf{C}_{i2} = -\xi\mathbf{I}$ , 则系统(4)为正系统当且仅当系统(7)为正系统。

**引理 3**<sup>[32]</sup> 对所有的  $i \in I_N$ , 当  $\mathbf{A}_{i1} - \mathbf{A}_{i2}\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{A}_{i3} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{i1K} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{d,i1} - \mathbf{A}_{i2}\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{A}_{d,i3} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{d,i1K} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{d,i2} - \mathbf{A}_{i2}\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{A}_{d,i4} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{d,i2K} \geq \mathbf{0}, \mathbf{B}_{i1} - \mathbf{A}_{i2}\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{B}_{i2} \geq \mathbf{0}, \mathbf{B}_{i1K} \geq \mathbf{0}, -\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{A}_{i3} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{i3K} \geq \mathbf{0}, -\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{A}_{d,i3} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{d,i3} \geq \mathbf{0}, -\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{A}_{d,i4} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{d,i4} \geq \mathbf{0}, -\mathbf{A}_{i4}^{-1}\mathbf{B}_{i2} \geq \mathbf{0}, \mathbf{B}_{i2K} \geq \mathbf{0}, \mathbf{L}_{i1} \geq \mathbf{0}$ , 以及  $\mathbf{L}_{i2} \geq \mathbf{0}$  都成立时, 滤波误差系统(4)是一个正系统。

本文的主要目的是设计一个形如式(3)的滤波器, 并探索滤波误差系统(4)在  $\mathbf{w}(k) \equiv \mathbf{0}$  情况下的正性、正则性、因果性及指数稳定性, 另外, 在  $\mathbf{w}(k) \neq \mathbf{0}$  的情况下, 外界扰动输入对滤波误差系统性能的影响也被加以分析和讨论。

## 2 稳定性分析

在本节中, 我们将讨论滤波误差系统(4)的稳定性问题, 并通过计算和分析给出该系统是正、正则、因果及指数稳定的充分条件。

**定理 1** 在扰动输入  $\mathbf{w}(k) \equiv \mathbf{0}$  和假设条件 1 下, 考虑滤波误差系统(4). 如果存在标量  $\alpha \in (0, 1), \mu \geq 1$ , 矩阵  $\mathbf{H}_i$ , 以及向量  $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_{i1}^T, \mathbf{v}_{i2}^T)^T, \boldsymbol{\phi}_i = (\boldsymbol{\phi}_{i1}^T, \boldsymbol{\phi}_{i2}^T)^T, \boldsymbol{\varphi}_i = (\boldsymbol{\varphi}_{i1}^T, \boldsymbol{\varphi}_{i2}^T)^T$ , 其中  $\mathbf{v}_{i1}, \mathbf{v}_{i2}, \boldsymbol{\phi}_{i1}, \boldsymbol{\phi}_{i2}, \boldsymbol{\varphi}_{i1}, \boldsymbol{\varphi}_{i2} \in \mathbb{R}_+^n$ , 使得对所有的  $i \in I_N$  都有

$$(\mathbf{H}_i)^T_{c,(s+b)}(\mathbf{C}_{i2})_{c,b_1} - (\mathbf{v}_{i2})_{s+b}(\mathbf{A}_{i4} + \xi\mathbf{I})_{b,b_1} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

$$(\mathbf{v}_{i2})_a(\mathbf{A}_{i1})_{a,a_1} - (\mathbf{H}_i)^T_{c,a}(\mathbf{C}_{i1})_{c,a_1} \geq \mathbf{0}, \quad (9)$$

$$(\mathbf{v}_{i2})_a(\mathbf{A}_{i2})_{a,b} - (\mathbf{H}_i)^T_{c,a}(\mathbf{C}_{i2})_{c,b} \geq \mathbf{0}, \quad (10)$$

$$(\mathbf{v}_{i2})_{s+b}(\mathbf{A}_{i3})_{b,a} - (\mathbf{H}_i)^T_{c,(s+b)}(\mathbf{C}_{i1})_{c,a} \geq \mathbf{0}, \quad (11)$$

$$\|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1 < 1, \quad (12)$$

$$(\mathbf{A}_i - \alpha\mathbf{E})^T\mathbf{v}_{i1} + (\bar{d} - \underline{d} + 1)\boldsymbol{\phi}_{i1} + \boldsymbol{\varphi}_{i1} \leq \mathbf{0}, \quad (13)$$

$$(\mathbf{A}_i - \alpha\mathbf{E})^T\mathbf{v}_{i2} - \mathbf{C}_i^T\mathbf{H}_i\mathbf{1}_n + (\bar{d} - \underline{d} + 1)\boldsymbol{\phi}_{i2} + \boldsymbol{\varphi}_{i2} \leq \mathbf{0}, \quad (14)$$

$$\mathbf{A}_{d,i}^T(\mathbf{v}_{i1} + \mathbf{v}_{i2}) - \alpha\bar{d}\boldsymbol{\phi}_{i1} \leq \mathbf{0} \quad (15)$$

成立, 其中  $\xi$  为任意给定的正常数,  $a, a_1 \in I_s \triangleq \{1, 2, \dots, s\}, b, b_1 \in I_{n-s} \triangleq \{1, 2, \dots, n-s\}$ , 则当切换信号的平均驻留时间满足

$$T_a > T_a^* \triangleq -\frac{\ln \mu}{\ln \alpha} \quad (16)$$

和

$$\mathbf{v}_i \leq \mu\mathbf{v}_j, \boldsymbol{\phi}_i \leq \mu\boldsymbol{\phi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i \leq \mu\boldsymbol{\varphi}_j, \quad \forall i, j \in I_N \quad (17)$$

时, 滤波误差系统(4)是正的、正则的、因果的、指数稳定的. 另外, 滤波器(3)中相应的系数矩阵可以设计为

$$(\mathbf{K}_i)_{g,t} = (\mathbf{v}_{i2})_g^{-1}(\mathbf{H}_i)_{t,g}, \quad (18)$$

其中  $g \in I_n \triangleq \{1, 2, \dots, n\}, t \in I_m \triangleq \{1, 2, \dots, m\}$ .

证明 条件(8)意味着

$$(\mathbf{K}_{i2})_{r,b}(\mathbf{C}_{i2})_{c,b_1} - (\mathbf{A}_{i4} + \xi \mathbf{I})_{b,b_1} = 0,$$

即

$$\mathbf{A}_{i4} - \mathbf{K}_{i2}\mathbf{C}_{i2} = -\xi \mathbf{I},$$

因而,由引理 1 可知,滤波误差系统(4)在假设条件 1 下是正则的、因果的。

另外,由式(18)以及条件  $\mathbf{v}_{i2} \in R_+^n$  可知,不等式(9)—(11)等价于

$$(\mathbf{A}_{i1})_{a,a_1} - (\mathbf{K}_{i1})_{r,a}(\mathbf{C}_{i1})_{c,a_1} \geq 0, (\mathbf{A}_{i2})_{a,b} - (\mathbf{K}_{i1})_{r,a}(\mathbf{C}_{i2})_{c,b} \geq 0, (\mathbf{A}_{i3})_{b,a} - (\mathbf{K}_{i2})_{r,b}(\mathbf{C}_{i1})_{c,a} \geq 0,$$

即

$$\mathbf{A}_{i1} - \mathbf{K}_{i1}\mathbf{C}_{i1} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{i2} - \mathbf{K}_{i1}\mathbf{C}_{i2} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{i3} - \mathbf{K}_{i2}\mathbf{C}_{i1} \geq \mathbf{0}.$$

因此,由引理 2 和引理 3 可知,当  $\mathbf{w}(k) \equiv \mathbf{0}$  时,滤波误差系统(4) 在假设条件 1 下是一个正系统.为了分析滤波误差系统(4)的稳定性,我们构造如下的共正 Lyapunov 函数:

$$V_{\sigma(k)}(k) = V_{\sigma(k)1}(k) + V_{\sigma(k)2}(k), \quad (19)$$

其中

$$V_{\sigma(k)1}(k) = \bar{\mathbf{x}}^T(k)\bar{\mathbf{E}}^T\mathbf{v}_{\sigma(k)},$$

$$V_{\sigma(k)2}(k) = \sum_{l=k-\bar{d}(k)}^{k-1} \alpha^{k-l-1}\bar{\mathbf{x}}^T(l)\boldsymbol{\phi}_{\sigma(k)} + \sum_{l=k-\bar{d}}^{k-1} \alpha^{k-l-1}\bar{\mathbf{x}}^T(l)\boldsymbol{\varphi}_{\sigma(k)} + \sum_{\theta=-\bar{d}+1}^{-\bar{d}} \sum_{l=k+\theta}^{k-1} \alpha^{k-l-1}\bar{\mathbf{x}}^T(l)\boldsymbol{\phi}_{\sigma(k)}.$$

当  $\sigma(k) = i$  时,函数  $V_{\sigma(k)}(k)$  的增量为

$$\Delta V_i(k) = V_i(k+1) - \alpha V_i(k) =$$

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbf{x}}^T(k+1)\bar{\mathbf{E}}^T\mathbf{v}_i - \alpha\bar{\mathbf{x}}^T(k)\bar{\mathbf{E}}^T\mathbf{v}_i + \sum_{l=k+1-\bar{d}(k+1)}^k \alpha^{k-l}\bar{\mathbf{x}}^T(l)\boldsymbol{\phi}_i - \sum_{l=k-\bar{d}(k)}^{k-1} \alpha^{k-l}\bar{\mathbf{x}}^T(l)\boldsymbol{\phi}_i + \\ & \sum_{l=k+1-\bar{d}}^k \alpha^{k-l}\bar{\mathbf{x}}^T(l)\boldsymbol{\varphi}_i - \sum_{l=k-\bar{d}}^{k-1} \alpha^{k-l}\bar{\mathbf{x}}^T(l)\boldsymbol{\varphi}_i + \sum_{\theta=-\bar{d}+1}^{-\bar{d}} \left( \sum_{l=k+1+\theta}^k \alpha^{k-l}\bar{\mathbf{x}}^T(l)\boldsymbol{\phi}_i - \sum_{l=k+\theta}^{k-1} \alpha^{k-l}\bar{\mathbf{x}}^T(l)\boldsymbol{\phi}_i \right) \leq \\ & \bar{\mathbf{x}}^T(k+1)\bar{\mathbf{E}}^T\mathbf{v}_i - \alpha\bar{\mathbf{x}}^T(k)\bar{\mathbf{E}}^T\mathbf{v}_i + \sum_{l=k+1-\bar{d}}^k \alpha^{k-l}\bar{\mathbf{x}}^T(l)\boldsymbol{\phi}_i - \sum_{l=k+1-\bar{d}}^{k-1} \alpha^{k-l}\bar{\mathbf{x}}^T(l)\boldsymbol{\phi}_i - \alpha^{\bar{d}}\bar{\mathbf{x}}^T(k-\bar{d}(k))\boldsymbol{\phi}_i + \\ & \bar{\mathbf{x}}^T(k)\boldsymbol{\varphi}_i - \alpha^{\bar{d}}\bar{\mathbf{x}}^T(k-\bar{d})\boldsymbol{\varphi}_i + \sum_{\theta=-\bar{d}+1}^{-\bar{d}} [\bar{\mathbf{x}}^T(k)\boldsymbol{\phi}_i - \alpha^{-\theta}\bar{\mathbf{x}}^T(k+\theta)\boldsymbol{\phi}_i] \leq \\ & \bar{\mathbf{x}}^T(k+1)\bar{\mathbf{E}}^T\mathbf{v}_i + \bar{\mathbf{x}}^T(k)[\boldsymbol{\varphi}_i + (\bar{d}-\bar{d}+1)\boldsymbol{\phi}_i - \alpha\bar{\mathbf{E}}^T\mathbf{v}_i] - \alpha^{\bar{d}}\bar{\mathbf{x}}^T(k-\bar{d}(k))\boldsymbol{\phi}_i = \\ & \bar{\mathbf{x}}^T(k)[(\bar{d}-\bar{d}+1)\boldsymbol{\phi}_i + \boldsymbol{\varphi}_i + (\bar{\mathbf{A}}_i - \alpha\bar{\mathbf{E}})^T\mathbf{v}_i] + \bar{\mathbf{x}}^T(k-\bar{d}(k))[\bar{\mathbf{A}}_{d,i}^T\mathbf{v}_i - \alpha^{\bar{d}}\boldsymbol{\phi}_i]. \quad (20) \end{aligned}$$

上面的放缩过程用到了时变时滞  $\bar{d}(k)$  的范围以及滤波误差系统(4)的正性,将式(18)代入式(13)—(15),可得

$$(\mathbf{A}_i - \alpha\mathbf{E})^T\mathbf{v}_{i1} + (\bar{d}-\bar{d}+1)\boldsymbol{\phi}_{i1} + \boldsymbol{\varphi}_{i1} \leq \mathbf{0},$$

$$(\mathbf{A}_i - \alpha\mathbf{E} - \mathbf{K}_i\mathbf{C}_i)^T\mathbf{v}_{i2} + (\bar{d}-\bar{d}+1)\boldsymbol{\phi}_{i2} + \boldsymbol{\varphi}_{i2} \leq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{A}_{d,i}^T(\mathbf{v}_{i1} + \mathbf{v}_{i2}) - \alpha^{\bar{d}}\boldsymbol{\phi}_{i1} \leq \mathbf{0}.$$

这意味着下面的不等式是成立的:

$$(\bar{d}-\bar{d}+1)\boldsymbol{\phi}_i + \boldsymbol{\varphi}_i + (\bar{\mathbf{A}}_i - \alpha\bar{\mathbf{E}})^T\mathbf{v}_i \leq \mathbf{0},$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{d,i}^T\mathbf{v}_i - \alpha^{\bar{d}}\boldsymbol{\phi}_i \leq \mathbf{0}.$$

因此  $\Delta V_i(k) \leq 0$ , 即

$$V_i(k+1) \leq \alpha V_i(k). \quad (21)$$

由式(21)可知,当  $k \in [k_r, k_{r+1})$  时,有

$$V_{\sigma(k)}(k) \leq \alpha^{k-k_r} V_{\sigma(k_r)}(k_r). \quad (22)$$

根据式(17)、(22)和定义 5,可得

$$\begin{aligned} V_{\sigma(k)}(k) &\leq \alpha^{k-k_r} V_{\sigma(k_r)}(k_r) \leq \\ &\alpha^{k-k_r} \mu \alpha^{k_r-k_{r-1}} V_{\sigma(k_{r-1})}(k_{r-1}) \leq \dots \leq \\ &\mu^{N_{\sigma(k_0,k)}} \alpha^{k-k_0} V_{\sigma(k_0)}(k_0) \leq (\alpha \mu^{1/T_a})^{k-k_0} V_{\sigma(k_0)}(k_0). \end{aligned} \tag{23}$$

另外,从式(19)中  $V_{\sigma(k)_1}(k)$  的表达式,有

$$\begin{aligned} V_{i1}(k) &= \mathbf{x}^T(k) \mathbf{E}^T \boldsymbol{\nu}_{i1} + \mathbf{x}_e^T(k) \mathbf{E}^T \boldsymbol{\nu}_{i2} = \\ &\mathbf{x}_1^T(k) \boldsymbol{\nu}_{i11} + \mathbf{x}_{e1}^T(k) \boldsymbol{\nu}_{i21} = \bar{\mathbf{x}}_1^T(k) \tilde{\boldsymbol{\nu}}_i, \end{aligned} \tag{24}$$

其中  $\boldsymbol{\nu}_{i1} = (\boldsymbol{\nu}_{i11}^T, \boldsymbol{\nu}_{i12}^T)^T$ ,  $\boldsymbol{\nu}_{i2} = (\boldsymbol{\nu}_{i21}^T, \boldsymbol{\nu}_{i22}^T)^T$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_i = (\boldsymbol{\nu}_{i11}^T, \boldsymbol{\nu}_{i21}^T)^T$ . 联立式(19)和(24),可得

$$V_{\sigma(k)}(k) \geq \beta_1 \|\bar{\mathbf{x}}_1(k)\|_1, \quad V_{\sigma(k_0)}(k_0) \leq \beta_2 \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c}, \tag{25}$$

其中

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c} &\triangleq \sup_{-\bar{d} \leq \theta \leq 0} \|\bar{\mathbf{x}}(\theta)\|_1, \quad \beta_1 \triangleq \min_{\forall i \in I_N} \rho(\tilde{\boldsymbol{\nu}}_i), \\ \beta_2 &\triangleq \max_{\forall i \in I_N} \bar{\rho}(\tilde{\boldsymbol{\nu}}_i) + \frac{(\bar{d} + \underline{d})(\bar{d} - \underline{d} + 1)}{2} \max_{\forall i \in I_N} \bar{\rho}(\boldsymbol{\phi}_i) + \bar{d} \max_{\forall i \in I_N} \bar{\rho}(\boldsymbol{\varphi}_i). \end{aligned}$$

从式(23)和(25)可知,有如下不等式成立:

$$\|\bar{\mathbf{x}}_1(k)\|_1 \leq \frac{\beta_2}{\beta_1} (\alpha \mu^{1/T_a})^{k-k_0} \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c}, \quad \forall k \geq 0, \tag{26}$$

其中  $\tau \triangleq \beta_2/\beta_1 > 1$ ,  $\varpi \triangleq \alpha \mu^{1/T_a} < 1$ . 因而,由定义 3 可知,  $\bar{\mathbf{x}}_1(k)$  是指数稳定的.

接下来,我们将证明  $\bar{\mathbf{x}}_2(k)$  也是指数稳定的,由初始条件可知,当  $k \in [0, d(k)]$  时,有

$$\|\bar{\mathbf{x}}_1(k - d(k))\|_1 \leq \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c} \leq \varpi^{k-d(k)} \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c} \leq \varpi^{-\bar{d}} \varpi^k \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c} \leq \tau \varpi^{-\bar{d}} \varpi^k \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c}. \tag{27}$$

另外,从式(26)可知,当  $k > d(k)$  时,有

$$\|\bar{\mathbf{x}}_1(k - d(k))\|_1 \leq \frac{\beta_2}{\beta_1} \varpi^{k-d(k)} \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c} \leq \tau \varpi^{-\bar{d}} \varpi^k \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c}, \tag{28}$$

继而,易得如下不等式对所有的非负整数  $k$  恒成立:

$$\|\bar{\mathbf{x}}_1(k - d(k))\|_1 \leq \tau \varpi^{-\bar{d}} \varpi^k \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c}. \tag{29}$$

为了记号上的方便,在下面的讨论中,我们令  $\mathbf{p}(k) = \mathcal{A}_{i3} \bar{\mathbf{x}}_1(k) + \mathcal{A}_{d,i3} \bar{\mathbf{x}}_1(k - d(k))$ , 进而可得

$$\|\mathbf{p}(k)\|_1 \leq \|\mathcal{A}_{i3}\|_1 \|\bar{\mathbf{x}}_1(k)\|_1 + \|\mathcal{A}_{d,i3}\|_1 \|\bar{\mathbf{x}}_1(k - d(k))\|_1 \leq \tau_1 \varpi^k \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c}, \tag{30}$$

$\forall k \geq 0,$

其中  $\tau_1 \triangleq \tau \varpi^{-\bar{d}} (\|\mathcal{A}_{i3}\|_1 + \|\mathcal{A}_{d,i3}\|_1)$ .

此外,从方程组(7)中的表达式可知  $\bar{\mathbf{x}}_2(k) = \mathbf{p}(k) + \mathcal{A}_{d,i4} \bar{\mathbf{x}}_2(k - d(k))$ , 因而,对于任意的  $k \geq 0$ , 有

$$\|\bar{\mathbf{x}}_2(k)\|_1 \leq \|\mathbf{p}(k)\|_1 + \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1 \|\bar{\mathbf{x}}_2(k - d(k))\|_1. \tag{31}$$

令  $\delta = \max\{\tau_1, \varpi^{-\bar{d}}\}$ , 若  $k \in [0, d(k)]$ , 则  $k - d(k) \in [-d(k), 0]$ , 此时有

$$\|\bar{\mathbf{x}}_2(k)\|_1 \leq \|\mathbf{p}(k)\|_1 + \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1 \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c} \leq (\|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1 \delta + \delta) \varpi^k \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c}. \tag{32}$$

若  $k \in [d(k), 2d(k)]$ , 那么  $k - d(k) \in [0, d(k)]$ , 由式(31)和(32),可得

$$\|\bar{\mathbf{x}}_2(k)\|_1 \leq (\|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1^2 \delta + \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1 \delta + \delta) \varpi^k \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c}. \tag{33}$$

假设对任意的  $k \in [(r-1)d(k), rd(k)]$ , 都有

$$\|\bar{\mathbf{x}}_2(k)\|_1 \leq (\|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1^r \delta + \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1^{r-1} \delta + \dots + \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1 \delta + \delta) \varpi^k \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c} \tag{34}$$

成立. 那么当  $k \in [rd(k), (r+1)d(k)]$ , 即  $k - d(k) \in [(r-1)d(k), rd(k)]$  时, 通过式(31)和(34), 可得

$$\begin{aligned} \|\bar{\mathbf{x}}_2(k)\|_1 &\leq \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1 (\|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1^r \delta + \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1^{r-1} \delta + \dots + \\ &\|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1 \delta + \delta) \varpi^k \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c} + \|\mathbf{p}(k)\|_1 \leq \\ &(\|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1^{r+1} \delta + \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1^r \delta + \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1^{r-1} \delta + \dots + \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1 \delta + \delta) \varpi^k \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c}. \end{aligned} \tag{35}$$

因而,由归纳假设可知对所有的  $k$ , 都有

$$\|\bar{\mathbf{x}}_2(k)\|_1 \leq (\delta + \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1 \delta + \cdots + \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1^r \delta + \cdots) \bar{\omega}^k \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c}. \quad (36)$$

若  $\|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1 < 1$ , 通过计算可得

$$\|\bar{\mathbf{x}}_2(k)\|_1 \leq (\delta + \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1 \delta + \cdots + \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1^r \delta + \cdots) \bar{\omega}^k \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c} \leq \frac{\delta}{1 - \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1} \bar{\omega}^k \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c}. \quad (37)$$

综上所述, 对于所有的  $k \geq 0$ , 都可以得到下面的不等式:

$$\|\bar{\mathbf{x}}(k)\|_1 \leq M \bar{\omega}^{k-k_0} \|\bar{\mathbf{x}}\|_{1c} = M \bar{\omega}^{k-k_0} \sup_{-\bar{d} \leq \theta \leq 0} \|\bar{\mathbf{x}}(\theta)\|_1,$$

其中  $M = \tau + \delta / (1 - \|\mathcal{A}_{d,i4}\|_1)$ . 因此, 当  $\mathbf{w}(k) \equiv \mathbf{0}$  时, 滤波误差系统(4)是指数稳定的. 证毕.

### 3 $l_1$ 增益分析

在本节中, 我们将讨论滤波误差系统(4)的  $l_1$  增益问题, 并且给出该系统是正、正则、因果及有  $l_1$  增益性能的充分条件.

**定理 2** 在假设条件 1 下, 对于给定的正常数  $\gamma$ , 考虑滤波误差系统(4). 如果存在标量  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $\mu \geq 1$ , 矩阵  $\mathbf{H}_i$ , 以及向量  $\boldsymbol{\nu}_i = (\boldsymbol{\nu}_{i1}^T, \boldsymbol{\nu}_{i2}^T)^T$ ,  $\boldsymbol{\phi}_i = (\boldsymbol{\phi}_{i1}^T, \boldsymbol{\phi}_{i2}^T)^T$ ,  $\boldsymbol{\varphi}_i = (\boldsymbol{\varphi}_{i1}^T, \boldsymbol{\varphi}_{i2}^T)^T$ , 其中  $\boldsymbol{\nu}_{i1}, \boldsymbol{\nu}_{i2}, \boldsymbol{\phi}_{i1}, \boldsymbol{\phi}_{i2}, \boldsymbol{\varphi}_{i1}, \boldsymbol{\varphi}_{i2} \in R_+^n$ , 使得对所有的  $i \in I_N$  都有定理 1 中的条件(9)–(13)、(15)以及

$$(\boldsymbol{\nu}_{i2})_a (\mathbf{B}_{i1})_{a,e} - (\mathbf{H}_i)_{c,a}^T (\mathbf{D}_i)_{c,e} \geq 0, \quad (38)$$

$$(\boldsymbol{\nu}_{i2})_{s+b} (\mathbf{B}_{i2})_{b,e} - (\mathbf{H}_i)_{c,(s+b)}^T (\mathbf{D}_i)_{c,e} \geq 0, \quad (39)$$

$$(\mathbf{A}_i - \alpha \mathbf{E})^T \boldsymbol{\nu}_{i2} - \mathbf{C}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{1}_n + (\bar{d} - \underline{d} + 1) \boldsymbol{\phi}_{i2} + \boldsymbol{\varphi}_{i2} + \mathbf{L}_i^T \mathbf{1}_p \leq \mathbf{0}, \quad (40)$$

$$\mathbf{B}_i^T (\boldsymbol{\nu}_{i1} + \boldsymbol{\nu}_{i2}) - \mathbf{D}_i^T \mathbf{H}_i \mathbf{1}_n - \gamma \mathbf{1}_q \leq \mathbf{0} \quad (41)$$

成立, 其中  $e \in I_q \triangleq \{1, 2, \dots, q\}$ . 则当切换信号的平均驻留时间满足条件(16)、(17), 滤波器(3)中相应的系数矩阵满足条件(18)时, 滤波误差系统(4)是正的、正则的、因果的, 并且有  $l_1$  增益界  $\gamma$ .

**证明** 由式(18)以及条件  $\boldsymbol{\nu}_{i2} \in R_+^n$  可知, 不等式(38)、(39)等价于

$$(\mathbf{B}_{i1})_{a,e} - (\mathbf{K}_{i1})_{r,a} (\mathbf{D}_i)_{c,e} \geq 0, \quad (\mathbf{B}_{i2})_{b,e} - (\mathbf{K}_{i2})_{r,b} (\mathbf{D}_i)_{c,e} \geq 0,$$

即

$$\mathbf{B}_{i1} - \mathbf{K}_{i1} \mathbf{D}_i \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}_{i2} - \mathbf{K}_{i2} \mathbf{D}_i \geq \mathbf{0}.$$

因此, 由引理 3 可知, 滤波误差系统(4)在假设条件 1 下是一个正系统. 另外, 当定理 2 中的条件满足时, 定理 1 中的条件显然是成立的. 因而, 当  $\mathbf{w}(k) \equiv \mathbf{0}$  时, 滤波误差系统(4)是指数稳定的.

为了分析滤波误差系统(4)的  $l_1$  增益性能, 我们选取与式(19)相同的共正 Lyapunov 函数并通过使用类似定理 1 的证明, 可得

$$\begin{aligned} V_i(k+1) - \alpha V_i(k) + \|\mathbf{z}_e(k)\|_1 - \gamma \|\mathbf{w}(k)\|_1 \leq \\ \bar{\mathbf{x}}^T(k) [(\bar{d} - \underline{d} + 1) \boldsymbol{\phi}_i + \boldsymbol{\varphi}_i + (\bar{\mathbf{A}}_i - \alpha \bar{\mathbf{E}})^T \boldsymbol{\nu}_i + \bar{\mathbf{L}}_i^T \mathbf{1}_p] + \\ \bar{\mathbf{x}}^T(k-d(k)) [\bar{\mathbf{A}}_{d,i}^T \boldsymbol{\nu}_i - \alpha \bar{\boldsymbol{\phi}}_i] + \mathbf{w}^T(k) (\bar{\mathbf{B}}_i^T \boldsymbol{\nu}_i - \gamma \mathbf{1}_q), \end{aligned} \quad (42)$$

其中  $\bar{\mathbf{L}}_i = (\mathbf{0}, \mathbf{L}_i)$ . 将式(18)代入式(15)、(40)、(41), 并整理可得

$$V_i(k+1) - \alpha V_i(k) + \|\mathbf{z}_e(k)\|_1 - \gamma \|\mathbf{w}(k)\|_1 < 0. \quad (43)$$

因此, 当  $k \in [k_r, k_{r+1})$  时, 有

$$V_{\sigma(k)}(k) \leq \alpha^{k-k_r} V_{\sigma(k_r)}(k_r) - \sum_{l=k_r}^{k-1} \alpha^{k-l-1} \Gamma(l), \quad (44)$$

其中  $\Gamma(l) = \|\mathbf{z}_e(l)\|_1 - \gamma \|\mathbf{w}(l)\|_1$ . 由式(17)和(44), 可得

$$\begin{aligned} V_{\sigma(k)}(k) \leq \alpha^{k-k_r} V_{\sigma(k_r)}(k_r) - \sum_{l=k_r}^{k-1} \alpha^{k-l-1} \Gamma(l) \leq \\ \mu \alpha^{k-k_{r-1}} V_{\sigma(k_{r-1})}(k_{r-1}) - \mu \sum_{l=k_{r-1}}^{k_r-1} \alpha^{k-l-1} \Gamma(l) - \sum_{l=k_r}^{k-1} \alpha^{k-l-1} \Gamma(l) \leq \cdots \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu^{N_{\sigma}(k_0,k)} \alpha^{k-k_0} V_{\sigma(k_0)}(k_0) - \mu^{N_{\sigma}(k_0,k)} \sum_{l=k_0}^{k_1-1} \alpha^{k-l-1} \Gamma(l) - \dots - \sum_{l=k_r}^{k-1} \alpha^{k-l-1} \Gamma(l) = \\ & \mu^{N_{\sigma}(k_0,k)} \alpha^{k-k_0} V_{\sigma(k_0)}(k_0) - \sum_{l=k_0}^{k-1} \mu^{N_{\sigma}(l,k)} \alpha^{k-l-1} \Gamma(l). \end{aligned} \quad (45)$$

当初始条件为零时,显然有  $V_{\sigma(k_0)}(k_0) = 0$ , 进而有

$$\sum_{l=k_0}^{k-1} \mu^{N_{\sigma}(l,k)} \alpha^{k-l-1} \Gamma(l) \leq 0,$$

即

$$\sum_{l=k_0}^{k-1} \mu^{N_{\sigma}(l,k)} \alpha^{k-l-1} \|z_e(l)\|_1 \leq \gamma \sum_{l=k_0}^{k-1} \mu^{N_{\sigma}(l,k)} \alpha^{k-l-1} \|w(l)\|_1. \quad (46)$$

不等式两边同乘  $\mu^{-N_{\sigma}(k_0,k)}$ , 得

$$\sum_{l=k_0}^{k-1} \mu^{-N_{\sigma}(k_0,l)} \alpha^{k-l-1} \|z_e(l)\|_1 \leq \gamma \sum_{l=k_0}^{k-1} \mu^{-N_{\sigma}(k_0,l)} \alpha^{k-l-1} \|w(l)\|_1. \quad (47)$$

由平均驻留时间的定义、条件(16)及  $\mu \geq 1$  这一事实,可知

$$\mu^{-N_{\sigma}(k_0,l)} \geq \alpha^{l-k_0}, \mu^{-N_{\sigma}(k_0,l)} \leq 1.$$

因而

$$\sum_{l=k_0}^{k-1} \alpha^{k-l-1} \|z_e(l)\|_1 \leq \gamma \sum_{l=k_0}^{k-1} \alpha^{k-l-1} \|w(l)\|_1, \quad (48)$$

进而

$$\sum_{k-1}^{\infty} \sum_{l=k_0}^{k-1} \alpha^{k-1} \|z_e(l)\|_1 \leq \gamma \sum_{k-1}^{\infty} \sum_{l=k_0}^{k-1} \alpha^{k-l-1} \|w(l)\|_1, \quad (49)$$

即

$$\sum_{l=k_0}^{\infty} \alpha^l \|z_e(l)\|_1 \sum_{k=l+1}^{\infty} \alpha^{k-l-1} \leq \gamma \sum_{l=k_0}^{\infty} \|w(l)\|_1 \sum_{k=l+1}^{\infty} \alpha^{k-l-1}, \quad (50)$$

因此

$$\sum_{l=k_0}^{\infty} \alpha^l \|z_e(l)\|_1 \leq \gamma \sum_{l=k_0}^{\infty} \|w(l)\|_1. \quad (51)$$

根据定义 4 可知,滤波误差系统(4) 是正的、正则的、因果的、指数稳定的,并且具有给定的  $l_1$  增益性能指标  $\gamma$ . 证毕.

**注 2** 从定理 1 和定理 2 中的条件可以看出,当时滞的上界  $\bar{d}$  和上下界之差  $\bar{d} - \underline{d}$  越小时,相应的判别条件越容易满足,即当  $\bar{d}$  和  $\bar{d} - \underline{d}$  越小时,系统越容易达到稳定和具有  $l_1$  增益性能指标.

**注 3** 通过使用共正 Lyapunov 函数方法,本文得到了线性规划形式的判定条件,此类条件便于用 MATLAB 工具箱验证求解,且计算复杂度较低.当定理 1 和定理 2 中的条件存在可行解时,对所有的  $i \in I_N$ , 我们都可以给出一组  $\nu_{i2}$  和  $\Pi_i$  的值,使得定理 1 和定理 2 中的条件成立,将  $\nu_{i2}$  和  $\Pi_i$  的值代入式(18)中即可求出待设计滤波器的系数矩阵.

## 4 数值例子

下面我们将通过一个例子来展示本文方法的可行性和有效性.

**例 1** 考虑包含两个子系统的系统(1),相对应的系数矩阵为

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0 & -3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0.09 & 0 & 0.12 & 0.15 \\ 0.13 & 0.07 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.35 & 0.2 \\ 0 & 0.11 & 0 & -2.8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{d,1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{d,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.35 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0.15 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.15 \\ 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}_1 &= \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.01 & 0.01 \\ 0.8 & 0 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.15 & 0.01 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.15 & 0.6 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{L}_1 &= \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 & 0.4 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 & 0.08 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0.15 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}_1 &= \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} 0.55 \\ 0.08 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

显然,本例中的系数矩阵满足假设 1 和条件  $\|\mathcal{A}_{d,ia}\|_1 < 1$ ,通过选取  $\xi = 2, d(k) = 3 \lfloor \sin(k\pi/2) \rfloor + 1, \alpha = 0.7, \mu = 5.1429$ ,以及增益性能指标  $\gamma = 0.9$ ,并且求解定理 1 中的条件,可以得到如下可行解:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (9.9879, 0.4421, 3.4064, 2.6388, 1.9852, 0.6038, 1.6366, 0.5743)^T, \\ \mathbf{v}_2 &= (9.9809, 0.3721, 3.4690, 2.1166, 2.0718, 0.5116, 1.8422, 0.6171)^T, \\ \boldsymbol{\phi}_1 &= (1.3107, 0.0001, 0.0029, 1.3071, 0.0014, 0.0001, 0.0007, 0.0030)^T, \\ \boldsymbol{\phi}_2 &= (1.2900, 0.0001, 0.0017, 0.9254, 0.0072, 0.0001, 0.0030, 0.0115)^T, \\ \boldsymbol{\varphi}_1 &= (0.0124, 0.0004, 0.0058, 0.0040, 0.0072, 0.0004, 0.0022, 0.0030)^T, \\ \boldsymbol{\varphi}_2 &= (0.0063, 0.0005, 0.0045, 0.0174, 0.0268, 0.0004, 0.0132, 0.0115)^T, \\ \mathbf{\Pi}_1 &= \begin{pmatrix} -0.0094 & -0.0094 & -0.0092 & -0.0076 \\ -0.0071 & -0.0071 & -0.0070 & -0.8203 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{\Pi}_2 &= \begin{pmatrix} -0.0052 & -0.0052 & -0.0052 & -0.0049 \\ -0.0114 & -0.0114 & -0.0114 & -0.8229 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

依据式(18)和上面的结果,可以将相应的滤波器矩阵设计为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \begin{pmatrix} -0.0047 & -0.0156 & -0.0056 & -0.0132 \\ -0.0036 & -0.0118 & -0.0043 & -1.4283 \end{pmatrix}^T, \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{pmatrix} -0.0025 & -0.0102 & -0.0028 & -0.0079 \\ -0.0055 & -0.0223 & -0.0062 & -1.3335 \end{pmatrix}^T, \end{aligned}$$

将上式中的滤波器矩阵代入,即可得到滤波误差系统(4)中的各系数均为正.当  $s = 1$  时,计算可得

$$\det(\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{A}}_1) = 1.0533 \neq 0, \det(\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{A}}_2) = 1.2878 \neq 0,$$

另外

$$\begin{aligned} \deg(\det(s\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{A}}_1)) &= \\ \deg(6.0001s^6 - 8.0244s^5 + 3.7788s^4 - 0.7736s^3 + 0.0757s^2 - 0.0034s + 5.5964 \times 10^{-5}) &= \\ \text{rank}(\bar{\mathbf{E}}) &= 6, \\ \deg(\det(s\bar{\mathbf{E}} - \bar{\mathbf{A}}_2)) &= \\ \deg(5.5997s^6 - 6.2705s^5 + 2.2060s^4 - 0.2585s^3 + 0.0111s^2 - 0.0001s - 1.7127 \times 10^{-7}) &= \\ \text{rank}(\bar{\mathbf{E}}) &= 6. \end{aligned}$$

因而,滤波误差系统(4)为正的、正则的、因果的.

根据式(17)可得,  $T_a^* = -\ln\mu/\ln\alpha = 4.5913$ ,因此,可以将平均驻留时间取为  $T_a = 5$ .本例中的初始边界条件取为

$$\bar{\mathbf{x}}(\theta) = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1)^T, \quad \theta = -4, -3, -2, -1, 0, \quad (52)$$

扰动输入取为  $w(k) = 5^{-0.2k}$ .在上面所给的边界条件(52)和如图 1 所示的切换序列下,滤波误差系统(4)的状态轨迹分别如图 2 和图 3 所示.从状态轨迹图 2 和图 3 可知,滤波误差系统(4)是正的、指数稳定的.

在零边界条件和上面所给出的扰动输入下,我们也给出了待估计的输出误差  $z_e(k)$  的图像,详见图 4.此外,通过计算可以得到

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} 0.7^k \|z_e(k)\|_1 = 0.2915, \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} \|w(k)\|_1 = 2.6335,$$

进而

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} 0.7^k \|z_e(k)\|_1 < 0.9 \sum_{k=k_0}^{\infty} \|w(k)\|_1.$$

因此,由定义 4 可知,滤波误差系统(4)有  $l_1$  增益界 0.9.

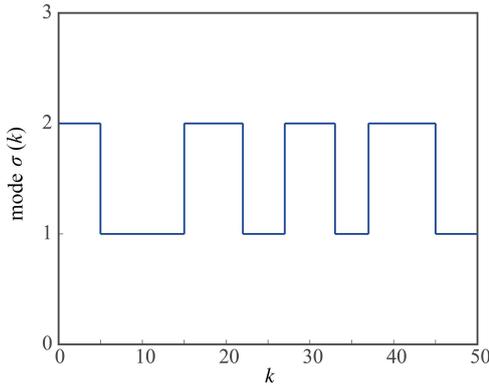


图 1 例 1 中的切换序列

Fig. 1 The switching sequence in example 1

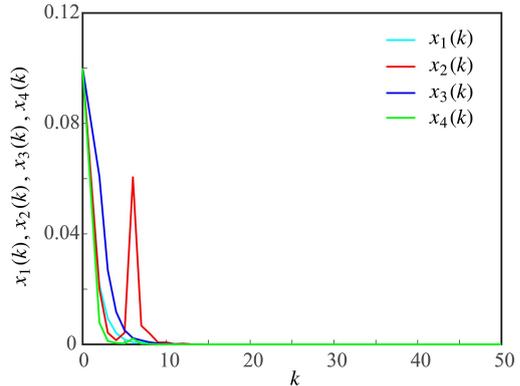


图 2 在  $w(k) \equiv 0$  时,系统(4)中状态  $x(k)$  的轨迹

Fig. 2 Trajectory  $x(k)$  of system (4) with  $w(k) \equiv 0$

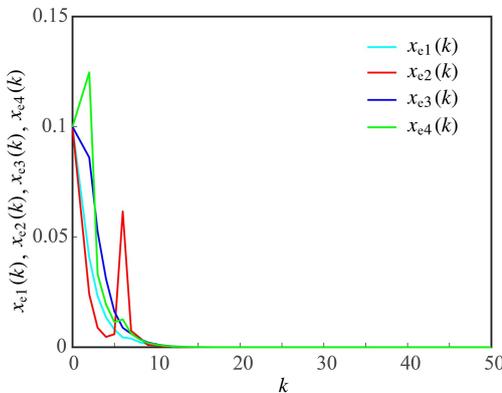


图 3 在  $w(k) \equiv 0$  时,系统(4)中状态  $x_e(k)$  的轨迹

Fig. 3 Trajectory  $x_e(k)$  of system (4) with  $w(k) \equiv 0$

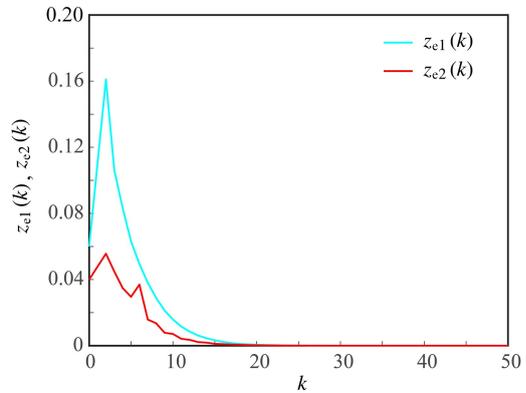


图 4 在  $w(k) = 5^{-0.2k}$  时,系统(4)中  $z_e(k)$  的轨迹

Fig. 4 Trajectory  $z_e(k)$  of system (4) with  $w(k) = 5^{-0.2k}$

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本.

## 5 总 结

本文为一类具有时变时滞的离散时间切换奇异正系统设计了一个合适的滤波器.通过利用共正 Lyapunov 函数和平均驻留时间的方法,给出了使得相应的滤波误差系统满足正性、正则、因果以及指数稳定的充分条件.当外部扰动输入不为零时,进一步给出了滤波误差系统具有给定的  $l_1$  增益性能的限定条件.最后,通过数值仿真检验了本文方法的可行性和有效性.

致谢 本文作者衷心感谢安徽农业大学引进高层次人才项目(rc381901; rc382106)对本文的资助.

## 参考文献 (References):

[1] DAI L. *Singular Control Systems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

- [2] 支慧敏. 基于多不连续 Lyapunov 函数方法的切换奇异系统的稳定性分析[D]. 硕士学位论文. 郑州: 郑州大学, 2019. (ZHI Huimin. Stability analysis of switched singular systems via a multiple discontinuous Lyapunov function approach[D]. Master Thesis. Zhengzhou: Zhengzhou University, 2019. (in Chinese))
- [3] ANH P K, LINH P T, THUAN D D, et al. Stability analysis for switched discrete-time linear singular systems[J]. *Automatica*, 2020, **119**: 109100.
- [4] CARABALLO T, EZZINE F, HAMMAMI M A. On the exponential stability of stochastic perturbed singular systems in mean square[J]. *Applied Mathematics & Optimization*, 2021, **84**: 2923-2945.
- [5] HAN Y, KAO Y, GAO C. Robust observer-based  $H_\infty$  control for uncertain discrete singular systems with time-varying delays via sliding mode approach[J]. *ISA Transactions*, 2018, **80**: 81-88.
- [6] SHI P, WANG H, LIM C C. Network-based event-triggered control for singular systems with quantizations[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, **63**(2): 1230-1238.
- [7] QI W, ZONG G, KARIMI H R. Sliding mode control for nonlinear stochastic singular semi-Markov jump systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, **65**(1): 361-368.
- [8] 杨冬梅, 李祉含. 广义非线性脉冲切换系统的指数稳定和  $L_2$  增益控制[J]. 东北大学学报, 2021, **42**(6): 908-912. (YANG Dongmei, LI Zhihan. Exponential stability and  $L_2$  gain control of generalized nonlinear impulsive switched systems[J]. *Journal of Northeastern University*, 2021, **42**(6): 908-912. (in Chinese))
- [9] 王一晶, 王龙. 切换系统的自适应广义预测控制[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(5): 595-601. (WANG Yijing, WANG Long. Adaptive generalized predictive control for switched systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, **26**(5): 595-601. (in Chinese))
- [10] LIBERZON D. *Switching in Systems and Control*[M]. Birkhäuser Boston, 2003.
- [11] SUN Z, GE S S. *Switched Linear Systems: Control and Design*[M]. London: Springer-Verlag, 2005.
- [12] 菲利普维奇 V. 切换系统的全局指数稳定性[J]. 应用数学和力学, 2011, **32**(9): 1118-1126. (FILIPOVIC V. Global exponential stability of switched systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, **32**(9): 1118-1126. (in Chinese))
- [13] WANG J, LIANG J. Robust finite-horizon stability and stabilization for positive switched FM- II model with actuator saturation[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2020, **35**: 100829.
- [14] 曹娟, 任凤丽. Markov 切换时滞基因调控网络的均方同步和随机无源同步[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(2): 198-206. (CAO Juan, REN Fengli. Mean square synchronization and random passive synchronization of Markov switched delay gene regulatory networks[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(2): 198-206. (in Chinese))
- [15] WANG J, HOU Y, JIANG L, et al. Robust stability and stabilization of 2D positive system employing saturation[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2021, **40**(3): 1183-1206.
- [16] WANG D, SHI P, WANG J, et al. Delay-dependent exponential  $H_\infty$  filtering for discrete-time switched delay systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, **22**(13): 1522-1536.
- [17] PENG X, WU H. Non-fragile robust finite-time stabilization and  $H_\infty$  performance analysis for fractional-order delayed neural networks with discontinuous activations under the asynchronous switching[J]. *Neural Computing and Applications*, 2020, **32**(8): 4045-4071.
- [18] 刘婷婷, 杨轩, 黄丽琼. 切换非线性正系统的有限时间稳定性[J]. 控制与决策, **37**(7): 1915-1920. (LIU Tingting, YANG Xuan, HUANG Liqiong. Finite time stability of switched nonlinear positive systems[J]. *Control and Decision*, **37**(7): 1915-1920. (in Chinese))
- [19] QI W, ZONG G, CHENG J, et al. Robust finite-time stabilization for positive delayed semi-Markovian switching systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, **351**(12): 139-152.
- [20] KNORN F, MASON O, SHORTEN R. On linear co-positive Lyapunov functions for sets of linear positive systems[J]. *Automatica*, 2009, **45**(8): 1943-1947.
- [21] LIANG J, WANG J, HUANG T.  $l_1$  filtering for continuous-discrete T-S fuzzy positive Roesser model[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, **355**(15): 7281-7305.
- [22] 潘圣韬, 孙继涛. 不确定离散脉冲系统的鲁棒  $H_\infty$  滤波问题[J]. 应用数学和力学, 2009, **30**(2): 221-228. (PAN Shengtao, SUN Jitao. Robust  $H_\infty$  filtering of uncertain discrete impulsive systems[J]. *Applied Mathematics*

- and Mechanics*, 2009, **30**(2): 221-228. (in Chinese))
- [23] 孙凤琪. 不确定时滞摄动滤波误差动态系统的稳定性分析[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(8): 899-911. (SUN Fengqi. Stability analysis of uncertain time-delay perturbed filtering error dynamic system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(8): 899-911. (in Chinese))
- [24] WANG F, WANG Z, LIANG J, et al. Resilient filtering for linear time-varying repetitive processes under uniform quantizations and round-Robin protocols[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2018, **65**(9): 2992-3004.
- [25] SHEN H, HUANG Z, CAO J, et al. Exponential  $H_\infty$  filtering for continuous-time switched neural networks under persistent dwell-time switching regularity[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, **50**(6): 2440-2449.
- [26] CHARQI M, CHAIBI N, TISSIR E H.  $H_\infty$  filtering of discrete-time switched singular systems with time-varying delays[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2020, **34**(4): 444-468.
- [27] WANG J, LIANG J, ZHANG C T. Dissipativity analysis and synthesis for positive Roesser systems under the switched mechanism and Takagi-Sugeno fuzzy rules[J]. *Information Sciences*, 2021, **546**: 234-252.
- [28] LI S, XIANG Z. Dwell-time conditions for exponential stability and standard  $L_1$ -gain performance of discrete-time singular switched positive systems with time-varying delays[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2020, **38**: 100939.
- [29] LI S, LIN H. On  $l_1$  stability of switched positive singular systems with time-varying delay[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, **27**(16): 2798-2812.
- [30] 黄金杰, 郝现志, 潘晓真. 基于模型依赖驻留时间的异步切换控制[J]. 控制与决策, 2021, **36**(3): 609-618. (HUANG Jinjie, HAO Xianzhi, PAN Xiaozhen. Asynchronous switched control based on model dependent dwell time[J]. *Control and Decision*, 2021, **36**(3): 609-618. (in Chinese))
- [31] XU S, LAM J. *Robust Control and Filtering of Singular Systems*[M]. Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
- [32] WANG J, LIANG J, ZHANG C T, et al. Event-triggered non-fragile control for uncertain positive Roesser model with PDT switching mechanism[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, **406**(10): 126266.