

基于有理插值方法模拟 SMAs 循环加载下的变形行为*

王晓明¹, 肖衡²

(1. 宁波职业技术学院 应用力学研究所, 浙江 宁波 315000;
2. 暨南大学 力学和建筑工程学院, 广州 510632)

摘要: 提出了一个有限弹塑性模型, 用来模拟形状记忆合金 (shape memory alloys, SMAs) 在循环荷载下的变形行为。首先, 通过分析上下屈服阶段形函数的特点, 利用有理插值方法给出循环荷载下的应力-应变函数显式表达, 可以精确匹配任意形状的实验数据; 其次, 基于对数客观率, 构建了有限弹塑性 J2 流模型, 耦合了屈服中心的移动和屈服面的增大; 再次, 从单轴情况出发, 推导得到了单个循环下的三个硬化函数显式表达, 再引入局部因子和多轴扩展不变量, 构造了光滑统一且多轴有效的硬化函数; 最后, 将模型得到的结果与经典实验结果比较, 证明了新方法的有效性。该文创新点如下: 第一, 通过改进传统的背应力演化方程, 使得新模型产生强烈的 Bauschinger 效应, 从而使新方法具备模拟 SMAs 特殊变形行为的能力; 第二, 新的光滑统一硬化函数在单个循环下会自动退化, 得到精确符合实验数据的结果; 第三, 利用本构方程推导得到有效塑性功演化规律, 而有理插值得到的形函数中包含有效塑性功的参数, 给出这些参数方程以后使得模型具备了预测变形的能力。

关键词: J2 流模型; 形状记忆合金; 对数客观率; 屈服; 硬化函数; 形函数

中图分类号: O343; O345 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430279

Deformation Behavior Modeling of SMAs Under Cyclic Loading Based on Rational Interpolation

WANG Xiaoming¹, XIAO Heng²

(1. *Institute of Applied Mechanics, Ningbo Polytechnic,
Ningbo, Zhejiang 315000, P.R.China;*

2. *School of Mechanics and Construction Engineering, Jinan University,
Guangzhou 510632, P.R.China*)

Abstract: A finite elastoplasticity model was proposed to simulate deformation behaviors of SMAs under cyclic loading. First, the explicit formulations of shape functions were given with the rational interpolation method to exactly match any given experimental data. Second, a finite elastoplasticity J2 flow model based on the logarithmic objective rate was built to couple the moving of the yielding center and the expanding of the yielding surface. Third, 3 explicit hardening functions under the single loading cycle were deduced in the uniaxial case, to

* 收稿日期: 2022-09-05; 修订日期: 2022-10-27

基金项目: 浙江省教育厅科研项目(Y202147389; FG2022042); 国家自然科学基金项目(1217020816)

作者简介: 王晓明(1987—), 男, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: wangxiaoming.g@163.com);

肖衡(1963—), 男, 教授, 博士生导师(E-mail: hxiao@jnu.edu.cn).

引用格式: 王晓明, 肖衡. 基于有理插值方法模拟 SMAs 循环加载下的变形行为[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(6): 694-707.

construct the smooth, unified and multiaxial hardening function through introduction of the local factor and the multiaxial extended invariant. Finally, the model results were compared with the classical test data to prove the effectiveness of the new model. The research results show that, the new model can produce intense Bauschinger effects and simulate the complex deformation of SMAs through improvement of the evolution equation of the back stress. The new smooth unified hardening function can automatically degenerate under the single loading cycle to give results exactly matching the test data. The effective plastic work evolution law deduced with the constitutional equation, and the parameter equations dependent on the effective plastic work contained in the shape functions through rational interpolation, enable the proposed model to predict deformations well.

Key words: J2 flow model; SMAs; logarithmic objective rate; yielding; hardening function; shape function

0 引 言

因具有独特的形状记忆效应(shape memory effect, SME)、伪弹性(pseudo-elasticity, PE)、拉伸-压缩不对称以及生物兼容性等特征,形状记忆合金(SMAs)被广泛应用于航空航天^[1]、机器人制造^[2]、生物医疗^[3]等领域。SMAs 构件在实际使用过程中往往需要受到反复加载-卸载的作用,应力-应变关系从一开始的塑性变形逐渐转变为伪弹性变形。通过构建 SMAs 本构模型,模拟其在循环荷载作用下的变形行为,具有十分重大的工程价值。

SMAs 自从被发现以来就受到了巨大的关注,尤其是近几十年来,其本构建模的理论不断被提出,综述文献也有很多^[4-9],我们大致可以将这些理论分为三大类,即微观模型、介观模型和宏观模型。微观模型在晶格和晶粒尺度上描述晶核生长、马氏体孪晶生长等特征。其中,Falk^[10-11]基于 Ginzburg-Landau 理论提出了多项式^[12]势能模型。Daw 等^[13]运用分子动力学理论构建了 SMAs 微结构模型。介观模型首先需要建立微观尺度下的本构关系,然后通过平均方法等尺度转换方法建立宏观本构。其中,Wang 等^[14]基于马氏体相变^[15-16]和晶体塑性理论构建了三维模型,研究了马氏体塑性变形产生的不可恢复变形。Taylor 等^[17]引入微平面理论,认为 SMAs 的多轴宏观力学行为是不同取向微平面单轴相应的叠加。该方法随后被用于模拟超弹性、伪弹性行为^[18]。宏观模型不再考虑材料内部结构理论,而是从宏观特征出发推导本构方程。其中,Tanaka^[19]利用非线性弹性方法构建了一个一维本构模型,其马氏体体积分数演化方程通过一种分段方程给出;Brinson^[20]进一步发展了他的理论,将马氏体体积分数分解为自适应部分和非自适应部分;Lagoudas 等^[21]利用弹塑性理论构建了 SMAs 宏观本构,马氏体相变、退孪晶等热力学过程受到加载函数和流动法则的影响;Zaki 等^[22]通过热力学势函数构建了三维模型,引入了三个新的内变量来解释循环作用下的 SMAs “训练”(training)和双程形状记忆效应(TWSME)。

近几十年以来,关于 SMAs 循环荷载作用下的实验研究有很多^[22-24],这些实验结果表明,循环荷载下,马氏体在正相变、逆相变作用下,塑性不可恢复变形逐渐累计,相变转化初始应力和耗散能逐渐减少,相变硬化逐渐增大。每一个循环下的应力-应变关系从初始的塑性变形,逐渐转化为伪弹性变形。当循环达到一定量以后,应力-应变滞回圈趋于一种稳定状态,且累计的塑性变形等量变成饱和状态。通过透射电子显微镜(TEM)技术研究循环作用下 SMAs 的微观结构,科研工作者们发现,不可恢复变形累积的主要微观机制是奥氏体相的滑移和不完全拟相变形成的残余马氏体相^[25]。

在实验的基础上,众多学者提出了 SMAs 本构模型对循环加载下的变形行为进行模拟,可参考综述文献^[26]。这些模型分别从宏观唯象和微结构机制两个方向进行建模。早期的唯象模型^[4,20,27]只考虑了循环作用下的马氏体相变,无法模拟塑性应变累积、残余马氏体相退化等情况。Bo 和 Lagoudas^[28-30]在原模型的基础上,引入了新的内变量来表征马氏体相变和塑性变形相互作用产生的影响,提出了一个改进的模型;Auricchio 等^[31-32]考虑了相变阈值和残余变形量,模拟了 SMAs 的“训练”和双程形状记忆效应;Zaki 和 Moumni^[33]引入了马氏体体积分数和马氏体定向应变张量两个状态变量来解释伪弹性和单程形状记忆效应,后续又提出了包括累积马氏体体积分数在内的三个新的内变量来表征循环加载下的变形特征。另外,微结构理论从 SMAs 微观机制推导模拟循环加载变形。Patoor 等^[34-35]基于物理应变机制和局部热力学势的定义构建了动力

学表述的微结构模型,马氏体体积分数作为内变量用来描述内结构状态的演化;Huang等^[36]发展了一种单晶模型,利用一定数量随机方向的单晶颗粒通过平均方法构建了多晶 SMA 本构模型;Lagoudas 和 Entchev^[37]提出了一个致密 SMA 三维本构模型,用来解释循环荷载下的相变、塑性应变以及滞回圈形状和大小的演化规律;Kang等^[38]通过“应变控制”的循环加载实验发现了 SMA 的荆轮变形行为.随后,Yu等^[39-40]基于晶体塑性理论解释了循环加载下的非弹性变形机制,如马氏体相变、相变诱导塑性、马氏体再定向等.

以上模型在模拟循环加载下 SMA 塑性变形和伪弹性变形的时候,通常需要分别引入额外的内变量,这些量的演化方程需要引入多个隐式参数,这就给计算带来了非常大的挑战.为了解决以上问题,一种显式方法被提出,用于构造 SMA 和类橡胶材类的本构模型^[40-49].本文在之前研究^[50]的基础上,基于有理插值的方法,提出了一种新的有限弹塑性 J2 流模型,用来同时精确模拟 SMA 在循环荷载下的塑性变形和伪弹性变形.

全文主要安排如下:首先,基于有理插值的方法给出了循环加载下的形函数形式,对任意形状的应力-应变滞回圈都能精确模拟;其次,构建了新的有限弹塑性 J2 流模型;再次,从单轴情况出发,经过多轴扩展、局部因子引入等步骤,得到了多轴有效的硬化模量显式表达;最后,选取经典的实验数据和新模型得到的结果进行对比,证明了该方法的有效性,并给出了结论.

1 基于有理插值的形函数

在控制最大应力不变的前提下,对 SMA 试件进行反复加载-卸载,其应力-应变关系如图 1 所示.先分析循环荷载下应力-应变关系的特征,再分别分析每一次循环过程中,加载和卸载情况下的形函数,最后利用有理插值具体给出屈服阶段的形函数表达,对任意形状的应力-应变滞回圈都可以精确模拟.使用的应力为 Kirchhoff 应力,应变为对数应变,也称为 Hencky 应变,并用有效塑性功代替传统的塑性功.

1.1 循环荷载下的变形特征

图 1 表示从第 1 次到第 n 次循环下的应力-应变关系.对图 1 分析可知,循环荷载下 SMA 应力-应变关系特征如下:

1) 每一次加载-卸载循环都会形成一个不完全封闭的滞回圈.从第一个循环到最后一个循环总共产生 n 个应力-应变滞回圈,其中第 n 个循环已经完全封闭且稳定.

2) 每一个应力-应变滞回圈由加载和卸载两部分组成.其中,加载部分包括弹性阶段和上屈服阶段,卸载部分包括弹性阶段和下屈服阶段.

3) 每一次循环结束以后,SMA 会产生一定量的塑性变形,假设第 i 次循环结束后的塑性变形量(不可恢复变形量)为 h_i^p . h_i^p 的初始值 $h_i^p = 0$,随着循环次数的增加, h_i^p 逐渐变大,即 $h_i^p > h_{i-1}^p$,每一次循环增加的不可恢复变形量逐渐减小,即

$$h_2^p - h_1^p > h_3^p - h_2^p > \dots > h_i^p - h_{i-1}^p > \dots > h_n^p - h_{n-1}^p, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

4) 当循环次数接近甚至到达 n 时,应力-应变滞回圈稳定,且不可恢复变形量不再继续增加,此时

$$\lim_{i \rightarrow n} (h_i^p - h_{i-1}^p) = 0.$$

1.2 加载和卸载阶段形函数

如图 2 所示,选取其中第 i 次循环的应力-应变滞回圈,并单独分析其形函数, $i = 1, 2, 3, \dots, n$.图中点 P_0 表示第 i 次循环起始点,也可以认为是第 $i-1$ 次循环的终止点,该点的应力为 0,应变和有效塑性功分别表示为 h_{i-1}^p 和 ϑ_{i-1} . P_0P_1 段表示初始加载弹性阶段,假设弹性模量为 E_i ,加载阶段的应力和应变用 $\bar{\tau}$ 和 \bar{h} 表示,则该阶段的应力-应变关系为

$$\bar{h} = \frac{\bar{\tau}}{E_i} + h_{i-1}^p. \quad (1)$$

点 P_1 表示加载部分从弹性阶段变成屈服阶段的过渡点,该点的应力即为屈服强度,用 r_0 表示,应变用 h_{0i} 表示,而有效塑性功与点 P_0 一样,为 ϑ_{i-1} . P_1P_2 段表示加载部分的屈服阶段,也就是上屈服阶段,该段的应力-

应变形函数用

$$\bar{h} = p(\bar{\tau}) \tag{2}$$

来表示,其具体形式将在后面通过有理插值的方法得到.点 P_2 表示卸载点,该点的应力、应变和有效塑性功分别用 $\bar{\tau}_i^*$, \bar{h}_i^* 和 ϑ_i^* 表示. P_2Q_1 段表示卸载部分开始的弹性阶段,假设弹性模量在同一循环内保持不变,卸载阶段的应力和应变用 $\underline{\tau}$ 和 \underline{h} 表示,此时的应力-应变关系为

$$\underline{h} = \frac{(\underline{\tau} - \bar{\tau}_i^*)}{E_i} + \bar{h}_i^* . \tag{3}$$

点 Q_1 表示卸载部分弹性阶段结束点,也是下屈服阶段起始点,该点的应力和应变分别用 $\underline{\tau}_i^*$ 和 \underline{h}_i^* 表示,有效塑性功保持 ϑ_i^* 不变. Q_1Q_2 段表示下屈服阶段,该段用

$$\underline{h} = q_i(\underline{\tau}) \tag{4}$$

表示.点 Q_2 的应力为 0,应变为 h_i^p ,有效塑性功为 ϑ_i .如果卸载到点 Q_2 以后继续反向加载,形函数将沿着 Q_2T 线段移动, P_1P_2 和 T 在同一直线上.

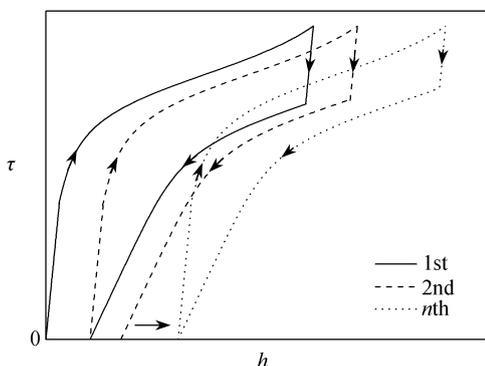


图 1 循环荷载下的应力-应变示意图

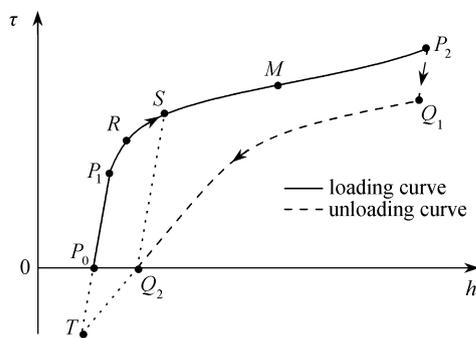


图 2 第 i 次循环下的应力-应变示意图

Fig. 1 Schematic of stress-strain curves under cyclic loading Fig. 2 Schematic of stress-strain curve in the i th cycle

形函数中关键点应力、应变和有效塑性功如表 1 所示.根据式(1)–(4)可得

$$\begin{cases} h_{0i} = r_0/E + h_{i-1}^p, \\ \bar{h}_i^* = p_i(\bar{\tau}_i^*), \\ \underline{h}_i^* = (\underline{\tau}_i^* - \bar{\tau}_i^*)/E + \bar{h}_i^*, \\ h_i^p = q_i(0). \end{cases} \tag{5}$$

表 1 形函数中关键点应力、应变和有效塑性功

Table 1 Stresses, strains and effective plastic works of key points in the shape function

points	τ	h	ϑ
P_0	0	h_{i-1}^p	ϑ_{i-1}
P_1	r_0	h_{0i}	ϑ_{i-1}
P_2	$\bar{\tau}_i^*$	\bar{h}_i^*	ϑ^*
Q_1	$\underline{\tau}_i^*$	\underline{h}_i^*	ϑ_i^*
Q_2	0	h_i^p	ϑ_i

1.3 上下屈服形函数关系

笔者之前的研究中^[47]用了一种线性关系来表示上下屈服应力之间的一一对应关系,即为

$$\bar{\tau} = b_i \underline{\tau} + \mu_{0i} . \tag{6}$$

任意一个下屈服形函数中的点必然有一个点和上屈服形函数对应,比如图 2 中的点 T 对应点 P_1 ,点 Q_2 对应点 S ,点 Q_1 对应点 P_2 .其中 b_i 是可调参数,若 $b_i = 1$,则表示上下屈服形函数平行,这种情况可以处理简单的

伪弹性特性^[41],而 μ_{0i} 则表示图2中点S所对应的应力大小。

利用方程(2)、(4)和(6),得到上下屈服形函数之间的关系为

$$q_i(\underline{\tau}) = p_i(b_i \underline{\tau} + \mu_{0i}) - p_i(\mu_{0i}) + (1 - b_i) \underline{\tau} / E_i + h_i^p, \quad (7)$$

即只要给定上屈服形函数的具体形式,就可以通过方程(7)推导得到下屈服形函数。

1.4 基于双曲正切函数的有理插值方法

基于双曲正切函数的形函数形式,可以精确匹配上屈服流的应力-应变数据,其具体形式为

$$\begin{cases} p_i(\bar{\tau}) = \frac{r_0}{E_i} + \xi_1(\bar{\tau} - r_0) + [\xi_2(\bar{\tau} - r_0 - r_{mi}) + \gamma]A(\bar{\tau}) + h_{i-1}^p, \\ A(\bar{\tau}) = \frac{1}{2}[\tanh(\beta_1(\bar{\tau} - r_0 - r_{mi})) + \tanh(\beta_1 r_{mi})], \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\xi_1, \xi_2, r_{mi}, \gamma$ 和 β_1 可以通过实验数据确定。图2中的上屈服部分大致分为4个阶段:①阶段为初始屈服阶段,图中用 P_1R 段表示;②阶段为屈服急剧加强阶段,图中用 RS 段表示;③阶段为极度屈服阶段,图中用 SQ_2 段表示;若继续加载,则会出现二次强化的④阶段。 ξ_1 表示进入①阶段后的初始斜率; $\xi_1 + \xi_2$ 表示进入②阶段后的初始斜率; $r_0 + r_{mi}$ 表示进入③阶段后的应力大小; γ 表示从应力从 r_0 增大到 $r_0 + r_{mi}$ 所产生的应变大小; β_1 则表示从①阶段过度到②阶段,斜率变化的快慢程度。其中 r_{mi}, h_{i-1}^p 和 E_i 会随着有效塑性功的积累慢慢变大直到稳定到某一值,其余参数不变。

此外, $A(\bar{\tau})$ 具备如下性质:

$$A(\bar{\tau}) = \begin{cases} 0, & \bar{\tau} \in [r_0, r_0 + r_{mi}), \\ 0.5, & \bar{\tau} = r_0 + r_{mi}, \\ 1, & \bar{\tau} \in (r_0 + r_{mi}, \infty). \end{cases} \quad (9)$$

将方程(8)代入到方程(7)中,可以得到下屈服段的形函数,其中涉及到的两个关键参数为 b_i 和 μ_{0i} 。接下来给出这两个参数的确定方法。

假设上屈服阶段和下屈服阶段的曲线斜率分别为 $\bar{\zeta}_i$ 和 $\underline{\zeta}_i$,则由方程(2)、(4)和(7)可得

$$\begin{cases} \bar{\zeta}_i = p'_i(\bar{\tau}), \\ \underline{\zeta}_i = q'_i(\underline{\tau}) = b_i p'_i(b_i \underline{\tau} + \mu_{0i}) + (1 - b_i). \end{cases} \quad (10)$$

从以上方程可以得到

$$b_i = \frac{E_i^{-1} - \underline{\zeta}_i^{-1}}{E_i^{-1} - \bar{\zeta}_i^{-1}}. \quad (11)$$

点S的应力和应变为 μ_{0i} 和 $h_i^p + \mu_{0i}/E_i$,将该点数据代入到方程(8)中,得到

$$u_{0i} = \frac{h_i^p - r_0/E_i + \xi_1 r_0 + A(\mu_{0i})[\xi_2(-r_0 - r_{mi}) + \gamma]}{\xi_1 + A(\mu_{0i})\xi_2 - E_i^{-1}}. \quad (12)$$

利用方程(9)可得

$$u_{0i} = \begin{cases} \frac{h_i^p - r_0/E_i + \xi_1 r_0}{\xi_1 - E_i^{-1}}, & u_{0i} \in [r_0, r_0 + r_{mi}), \\ \frac{h_i^p - r_0/E_i + \xi_1 r_0 - \xi_2(r_0 + r_{mi}) + \gamma}{\xi_1 + \xi_2 - E_i^{-1}}, & u_{0i} \in [r_0 + r_{mi}, \infty). \end{cases} \quad (13)$$

2 有限弹塑性 J2 流模型

有限弹塑性本构模型的类型有很多,本文采用基于对数客观率的表述形式^[51]。首先通过伸缩率分解的形式给出基本方程,然后耦合强化效应,改进背应力演化方程。

2.1 基于伸缩率分解的基本方程

基于 Euler 表述的有限弹塑性模型满足自洽条件^[51],其基本方程是基于伸缩率的分解的形式,即

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p, \quad (14)$$

其中 \mathbf{D} 为速度梯度的对称部分,也就是伸缩率, \mathbf{D}^e 表示弹性部分, \mathbf{D}^p 表示塑性部分.

弹性部分可以通过 Hooke 定律给出

$$\mathbf{D}^e = \frac{1 + \nu}{E} \dot{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \dot{\boldsymbol{\tau}}) \mathbf{I}, \quad (15)$$

式中 ν 表示 Poisson 比, E 表示弹性模量, \mathbf{I} 表示单位二阶张量, $\dot{\boldsymbol{\tau}}$ 表示 Kirchhoff 应力的对数客观率,任意二阶张量 \mathbf{S} 的对数客观率通常表示为

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S}, \quad (16)$$

$\boldsymbol{\Omega}$ 是对数自旋^[52], $\dot{\mathbf{S}}$ 表示时间导数.

塑性部分通过流动法则^[53]给出:

$$\mathbf{D}^p = \frac{\xi}{u} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \dot{\boldsymbol{\tau}} \right) \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \quad (17)$$

式中, ξ 表示塑性指数,加载情况下,其值为 1,卸载情况下为 0, u 表示塑性模量, f 表示 von Mises 屈服函数,其表达式为

$$f = \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\alpha})^2 - \frac{1}{3} r^2, \quad (18)$$

$\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ 表示 Kirchhoff 应力偏量部分,即 $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{3} (\text{tr} \boldsymbol{\tau}) \mathbf{I}$, r 表示屈服强度, $\boldsymbol{\alpha}$ 表示背应力, r 代表了屈服面半径大小,描述各向同性强化; $\boldsymbol{\alpha}$ 代表了屈服面中心的移动,描述了各向异性强化.

2.2 强化效应耦合

有效塑性功随着塑性流的发展单调递增,且和热力学内耗散直接相关.因此本文用有效塑性功代替传统的塑性功,其表达为

$$\dot{\vartheta} = (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\alpha}) : \mathbf{D}^p. \quad (19)$$

为了使本构模型耦合屈服面半径大小和屈服中心移动,屈服强度 r 不仅依赖于有效塑性功 ϑ ,还和背应力相关,即

$$r = r(\vartheta, \zeta), \quad (20)$$

其中 ζ 的大小完全依赖背应力张量,其表达为

$$\zeta = \sqrt{1.5 \text{tr} \boldsymbol{\alpha}^2}. \quad (21)$$

背应力的演化方程遵循新的各向异性强化法则:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = c \mathbf{D}^p - \omega \dot{\vartheta} \boldsymbol{\alpha}, \quad (22)$$

这里的 $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ 也采用对数客观率,有且只有这种形式才能使得方程满足自洽条件^[51].为了描述 SMA 复杂的变形行为,我们改进了传统的 Armstrong-Frederick 方程,Prager 模量 c 和滞回模量 ω 满足以下条件:

$$\begin{cases} c = c(\vartheta, \zeta), \\ \omega = \omega(\vartheta, \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\alpha}). \end{cases} \quad (23)$$

方程(20)和(23)确保了模型耦合两种强化效应,3个硬化含函数 c , ω 和 r 的具体形式将在第 3 节中给出.接下来需要确定塑性模量 u 的表示,可以由以下公式推导^[47]:

$$u = - \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} : (\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\alpha}) - \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \mathbf{H} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \quad (24)$$

其中 4 阶张量 \mathbf{H} 为

$$\mathbf{H} = c \boldsymbol{\Pi} - (\tilde{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\alpha}) \otimes \boldsymbol{\alpha}, \quad (25)$$

$\boldsymbol{\Pi}$ 是单位 4 阶单位张量.根据前面的分析,屈服函数依赖于有效塑性功、Kirchhoff 应力和背应力,即 $f = f(\boldsymbol{\tau}$,

α, ϑ). 利用方程(18), 将 $\frac{\partial f}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial f}{\partial \tau}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ 代入到方程(24), 得到

$$u = \frac{2}{3} cr^2 + \frac{4}{9} r^3 r' - \frac{4}{9} \omega r^3 \tilde{r}' + \frac{4}{9} \zeta^{-1} r^2 (1.5c\tilde{r}' - \zeta\omega r)\Lambda, \quad (26)$$

其中

$$r' = \frac{\partial r}{\partial \vartheta}, \quad \tilde{r}' = \frac{\partial r}{\partial \zeta}, \quad \Lambda = \frac{3}{2r} \alpha : (\tilde{\tau} - \alpha).$$

3 硬化函数

为了从第2节构建的有限弹塑性 J2 流模型中推导得到符合要求的结果, 需要给出硬化函数 c, ω 和 r 的具体形式. 首先推导得到单个循环下的硬化函数形式, 再给出有效塑性功的演化规律, 最后引入依赖塑性功的局部因子, 构造统一光滑的硬化函数显式表达.

3.1 单个循环下的硬化函数

单循环下的硬化函数推导需要从塑性坡度出发, 利用方程特点分别给出 c_i, ω_i 和 r_i , 再通过推导相邻循环下屈服函数的表达, 证明其符合内循环一致性条件.

3.1.1 塑性坡度

由方程(17)、(18)、(19), 再结合塑性模量的表达(方程(24)), 推导得到单轴情况下有

$$r'_i r_i - \omega_i r_i (\tilde{r}'_i \zeta + \Lambda_i r'_i) + 1.5c_i \zeta^{-1} (\zeta + \Lambda_i \tilde{r}'_i) = K_i(\tau), \quad (27)$$

下标“ i ”表示是第 i 次循环. 其中 r'_i, \tilde{r}'_i 和 Λ_i 在方程(27)中给出, $K_i(\tau)$ 表示塑性坡度, 在上屈服阶段形式为 $\bar{K}_i(\bar{\tau})$, 而下屈服阶段为 $\underline{K}_i(\underline{\tau})$, 它们的具体形式为

$$K_i(\tau) = \begin{cases} \bar{K}_i(\bar{\tau}) = \frac{1}{p'_i(\bar{\tau}) - 1/E}, & \text{along curve } P_1 P_2, \\ \underline{K}_i(\underline{\tau}) = \frac{b'_i}{p'_i(b_i \tau + \mu_{0i}) - 1/E}, & \text{along curve } Q_1 Q_2. \end{cases} \quad (28)$$

方程(27)和(28)给定的形式只是单轴有效, 为了扩展成多轴有效, 需要将塑性坡度改进为

$$K_i(r_i, \Lambda_i) = \frac{[r_i + \Lambda_i]}{r_i + |\Lambda_i|} \bar{K}_i(r_i + |\Lambda_i|) + \left(1 - \frac{[r_i + \Lambda_i]}{r_i + |\Lambda_i|}\right) \underline{K}_i(-r_i + |\Lambda_i|), \quad (29)$$

$$[r_i + \Lambda_i] = 0.5(r_i + \Lambda_i + |r_i + \Lambda_i|).$$

将改进后的塑性坡度代入到方程(27), 得到单个循环下多轴有效的形式为

$$r'_i r_i - \omega_i r_i (\tilde{r}'_i \zeta + \Lambda_i) + 1.5c_i \zeta^{-1} (\zeta + \Lambda_i \tilde{r}'_i) = K_i(r_i, \Lambda_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (30)$$

3.1.2 c_i, ω_i 和 r_i

将方程(30)转化为以下形式:

$$\omega_i = \frac{r'_i r_i + 1.5c_i \zeta^{-1} (\zeta + \Lambda_i \tilde{r}'_i) - K_i(r_i, \Lambda_i)}{r_i (\tilde{r}'_i \zeta + \Lambda_i)}. \quad (31)$$

以上方程要得到有效的 ω_i , 必须满足分子和分母同时为 0, 即

$$\begin{cases} r'_i r_i + 1.5c_i \zeta^{-1} (\zeta + \Lambda_i \tilde{r}'_i) - K_i(r_i, \Lambda_i) = 0, \\ \Lambda_i = -\tilde{r}'_i \zeta. \end{cases} \quad (32)$$

从方程(32)可以推导得到

$$c_i = \frac{2}{3} \frac{K_i(r_i, \Lambda_i) - r'_i r_i}{1 - \tilde{r}'^2}. \quad (33)$$

将方程(33)代入到方程(31), 得到

$$\omega_i r_i = \frac{K_i(r_i, -\zeta \tilde{r}'_i) - r'_i r_i \zeta + \Lambda_i \tilde{r}'_i}{1 - \tilde{r}'^2} + \frac{r'_i r_i - K_i(r_i, \Lambda_i)}{\tilde{r}'_i \zeta^2 + \zeta \Lambda_i} + \frac{r'_i r_i - K_i(r_i, \Lambda_i)}{\tilde{r}'_i \zeta + \Lambda_i}. \quad (34)$$

接下来考虑屈服极限 r_i 的表达,在 Xiao^[41,48] 和 Wang 等^[42] 研究的基础上,进一步考虑有效塑性功的局部性特点,得到屈服极限表达为

$$\begin{cases} r_1 = \frac{\mu_1}{b_1 + 1} + \frac{r_0 b_1}{b_1 + 1} e^{-\beta_3 \frac{\vartheta}{r_0}} + \frac{b_1 - 1}{b_1 + 1} \zeta (1 - e^{-\beta_2 \frac{\zeta}{r_0}}) + \frac{r_0 - \mu_1}{b_1 + 1} (e^{-\beta_3 \frac{\vartheta}{r_0}} + e^{-\beta_3 \frac{\vartheta_2 - \vartheta}{r_0}}), \\ r_i = \frac{\mu_i}{b_i + 1} + \frac{b_i - 1}{b_i + 1} \zeta + \frac{r_0 - \mu_i}{b_i + 1} (e^{-\beta_3 \frac{\vartheta - \vartheta_i}{r_0}} + e^{-\beta_3 \frac{\vartheta_{i+1} - \vartheta}{r_0}}), \quad i = 2, 3, \dots, n, \end{cases} \quad (35)$$

式中, r_0 表示初始屈服强度,两个非负参数 β_2 和 β_3 分别表示 $\zeta = 0$ 和 $\vartheta = \vartheta_i$ (或 ϑ_{i+1}) 的局部特征,

$$\mu_i = (r_0 - \mu_{0i})/b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (36)$$

3.2 有效塑性功演化规律

从第 1 次循环开始,到第 n 次循环结束,每一次循环都伴随着有效塑性功的累计,本小节给出其在循环荷载下的演化规律.用 ϑ_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) 表示每一次循环结束后的有效塑性功大小.

根据方程(35)和(36),在忽略局部特征的前提下,得到单循环下塑性强度为

$$r_i = \frac{b_i - 1}{b_i + 1} \alpha + \frac{r_0 - b_i \mu_{0i}}{b_i + 1}. \quad (37)$$

在上屈服阶段和下屈服阶段分别有 $\bar{\tau} - \alpha = r_i$ 和 $\underline{\tau} - \alpha = -r_i$, 代入到式(48)中,得到

$$r_i = \begin{cases} \frac{1}{2b_i} [(b_i - 1)\bar{\tau} + r_0 - b_i \mu_{0i}], & \text{along curve } P_1 P_2, \\ \frac{1}{2} [(b_i - 1)\underline{\tau} + r_0 - b_i \mu_{0i}], & \text{along curve } Q_1 Q_2. \end{cases} \quad (38)$$

根据方程(14)、(15)和(17),在单轴情况下的塑性应变为

$$\dot{h}^p = \dot{h} - \dot{\tau}/E. \quad (39)$$

根据方程(6),单轴下的有效塑性功为

$$\dot{\vartheta} = (\tau - \alpha) \dot{h}^p. \quad (40)$$

将方程(39)代入到方程(40),再结合屈服条件,得到

$$\dot{\vartheta} = \begin{cases} r(\dot{h} - \dot{\tau}/E), & \text{along curve } P_1 P_2, \\ -r(\dot{h} - \dot{\tau}/E), & \text{along curve } Q_1 Q_2. \end{cases} \quad (41)$$

对方程(41)进行积分,并结合方程(8)形函数的形式,可以得到单个循环下,图 2 中累计的有效塑性功大小,在 $\mu_{0i} \in [r_0, r + r_{mi})$ 的情况下为

$$\vartheta_i = \vartheta_{i-1} + 2Z_1 - Z_2, \quad \vartheta_0 = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (42)$$

其中

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{1}{2b_i} \left\{ (b_i - 1) \left[(\xi_1 + \xi_2) \frac{(\bar{\tau}_i^{*2} - r_0^2)}{2} - \frac{\xi_2 r_{mi}}{2} (r_{mi} + 2r_0) \right] + \right. \\ \left. \mu_i [\xi_1 (\bar{\tau}_i^* - r_0) + \xi_2 (\bar{\tau}_i^* - r_0 - r_{mi})] \right\}, \\ Z_2 = \frac{1}{2b_i} \left[(b_i - 1) \xi_1 \frac{(\mu_{0i}^2 - r_0^2)}{2} + \mu_i \xi_1 (\mu_{0i} - r_0) \right]. \end{cases} \quad (43)$$

在 $\mu_{0i} \in [r + r_{mi}, \infty)$ 的情况下为

$$\vartheta_i = \vartheta_{i-1} + 2Z_1 - (Z_0 + Z_3), \quad \vartheta_0 = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (44)$$

其中

$$\begin{cases} Z_3 = \frac{1}{2b_i} \left\{ (b_i - 1)(\xi_1 + \xi_2) \frac{\mu_{0i}^2 - (r_0 + r_{mi})^2}{2} + \mu_i(\xi_1 + \xi_2)(\mu_{0i} - r_0 - r_{mi}) \right\}, \\ Z_0 = \frac{1}{2b_i} \left[(b_i - 1)\xi_1 \frac{(2r_0 r_{mi} + r_{mi}^2)}{2} + \mu_i \xi_1 r_{mi} \right]. \end{cases} \quad (45)$$

上屈服阶段 P_1P_2 之间必然有一个点的应力为 $r_0 + r_{mi}$, 假设该点用 M 表示, 如图 2 所示. Z_1 表示 P_1-P_2 阶段累计的有效塑性功, 也等于 Q_1-T 阶段积累的有效塑性功; 在 $\mu_{0i} \in [r_0, r + r_{mi})$ 的情况下, 点 S 在点 M 前面, Z_2 表示 P_1-S 阶段累计的有效塑性功, 也等于 Q_2-T 阶段积累的有效塑性功; 在 $\mu_{0i} \in [r + r_{mi}, \infty)$ 情况下, 点 S 在点 M 后面, Z_3 表示 $M-S$ 阶段累计的有效塑性功, Z_0 表示 P_1-M 阶段积累的有效塑性功. 因此, $Z_0 + Z_3$ 可以表示 P_1-S 阶段的有效塑性功, 也等于 Q_2 到 T 的有效塑性功, 其效果和 $\mu_{0i} \in [r_0, r + r_{mi})$ 情况下的 Z_2 一样.

3.3 统一光滑硬化函数

式(31)、(33)和(35)分别给出了每一个循环下的 c_i, ω_i 和 $r_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$. 本小节在前面的基础上构造一个光滑统一的硬化函数表达, 使其对 n 个循环过程均适用.

这里通过 n 个局部因子, 将得到的所有单循环硬化函数进行简单的线性插值, 得到

$$\begin{cases} c = \sum_{i=1}^n \varphi_i c_i, \\ \omega = \sum_{i=1}^n \varphi_i \omega_i, \\ r = \sum_{i=1}^n \varphi_i r_i, \end{cases} \quad (46)$$

其中, 局部因子具体形式为

$$\varphi_i = \frac{1}{4} \left[1 + \tanh \left(100 \frac{\vartheta - \vartheta_i}{\vartheta_{i+1} - \vartheta_i} + 10 \right) \right] \left[1 + \tanh \left(100 \frac{\vartheta_{i+1} - \vartheta}{\vartheta_{i+1} - \vartheta_i} - 10 \right) \right]. \quad (47)$$

φ_i 具备如下特点: 当有效塑性功 $\vartheta \in [\vartheta_i, \vartheta_{i+1})$ 时, 其值为 1, 其他情况下均为 0. 由此可得, 在第 i 次循环下硬化函数自动退化为 c_i, ω_i 和 r_i .

4 模型结果与实验结果对比

SMA 在循环荷载下, 每一个循环所产生的应力-应变滞回圈由 4 个部分组成, 分别用图 2 中的 P_0P_1 段、 P_1P_2 段、 P_2Q_1 段和 Q_1Q_2 段来表示, 它们的形函数由方程(1)–(4)给出, 其中方程(1)和(3)遵循 Hooke 定律, 需要给出弹性模量 E_i 和初始加载点的应变 h_{i-1}^p ; P_1P_2 段的具体形式由方程(8)给出, 只要给出形函数中的特征参数 $\xi_1, \xi_2, r_{mi}, \gamma$ 和 β_1 ; Q_1Q_2 段的形函数 $q(\tau)$ 由方程(7)给出, 需要给定其中 b_i 和 μ_{0i} 的数值.

为了验证模型的有效性, 我们选取 Zaki 和 Moumni^[33] 的实验数据进行比对. 在保持卸载应力 $\bar{\tau}^* = 400$ MPa 的条件下, 对 Ni-Ti SMA 进行反复加载和卸载, 当循环次数达到 20 次时, 应力-应变滞回圈基本稳定, 我们取第 1、2、3、4、8、12 和 20 次循环的应力-应变数据作对比, 所有的应变转化为对数应变, 固定参数的值给定如表 2 所示.

表 2 $p_i(\bar{\tau})$ 中固定参数值
Table 2 Values of fixed parameters in $p_i(\bar{\tau})$

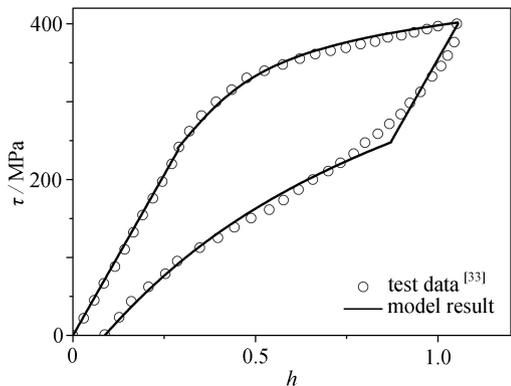
ξ_1	ξ_2	β_1	r_0 / MPa
0.001 9	0	0.016	240

E_i, h_{i-1}^p, r_{mi} 和 b_i 随着有效塑性功变化的规律如下:

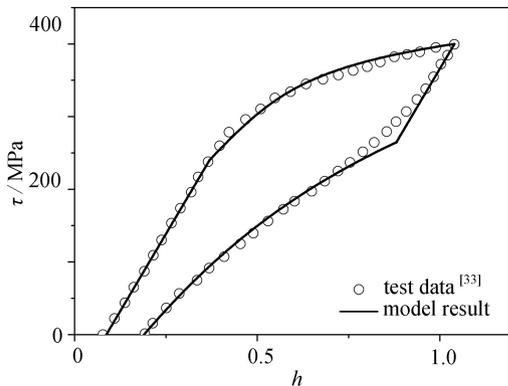
$$\begin{cases} E_i(\vartheta) = 137.5 \tanh(0.001 5(\vartheta - 1 000)) + 962.5, \\ h_{i-1}^p(\vartheta) = 0.231 5 \tanh(0.001 3(\vartheta - 860)) + 0.231 5, \\ r_{mi}(\vartheta) = 68 \tanh(0.000 45\vartheta) + 222, \\ b_i(\vartheta) = 0.145 \tanh(0.003(\vartheta - 850)) + 0.385, \end{cases} \quad (48)$$

其中 $\vartheta = 0$, 表示第 1 次循环的情况, 此时 $i = 1$. 在本例中 $\mu_{0i} \in [r_0, r + r_{mi})$, 每一个循环下的有效塑性功结合方程 (42) 和 (43) 给出, 代入到方程 (48) 就可以得到每一循环下的参数值. 再利用方程 (13) 就能确定 μ_{0i} 的大小, 最终得到的模型结果和实验结果如图 3 所示.

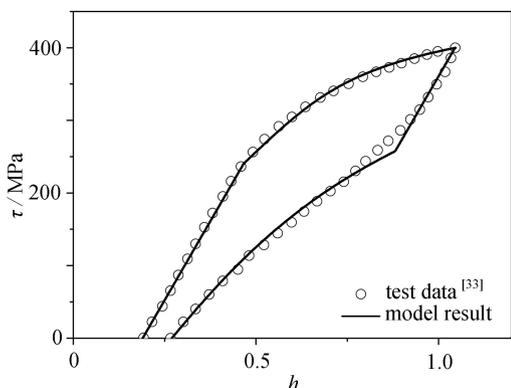
模型预测结果如图 4 所示. 其中由外到内的实线分别表示第 4、5、6、7 和 8 次的模型结果. 其中第 4 和第 8 次的结果和实验数据可以精确匹配 (从图 3(d)、3(e) 数据对比可得), 而第 5、6 和 7 次的实验数据, 新的模型可以合理地预测. 第 5 次循环开始时的应变和第 4 次结束时一致, 而第 7 次循环结束时的应变和第 8 次开始时一致.



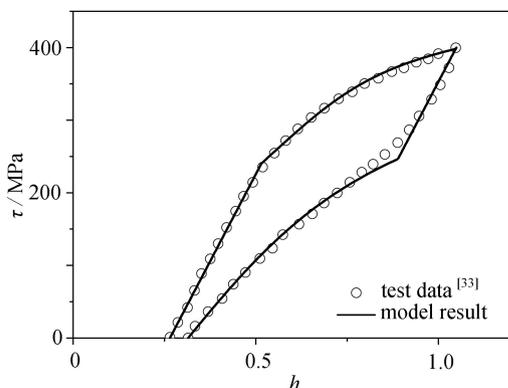
(a) 第 1 个循环
(a) The 1st cycle



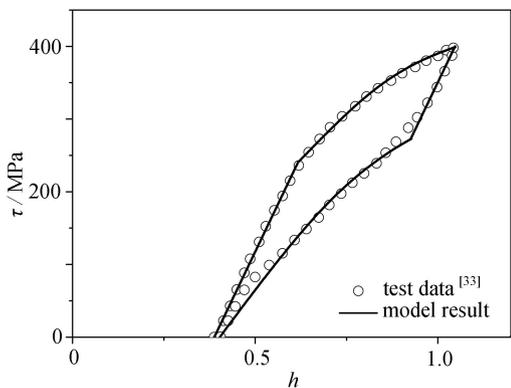
(b) 第 2 个循环
(b) The 2nd cycle



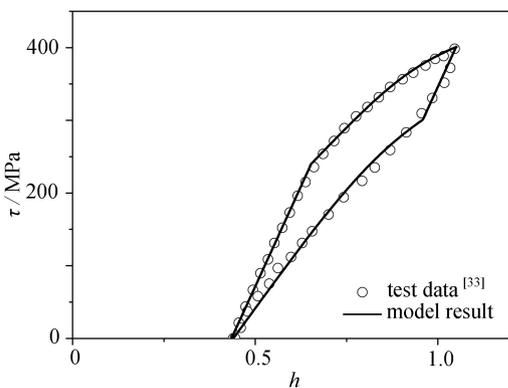
(c) 第 3 个循环
(c) The 3rd cycle



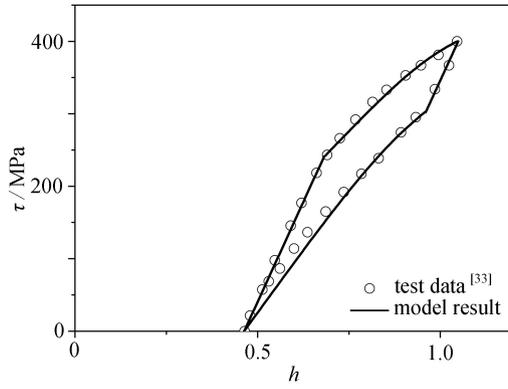
(d) 第 4 个循环
(d) The 4th cycle



(e) 第 8 个循环
(e) The 8th cycle



(f) 第 12 个循环
(f) The 12th cycle



(g) 第20个循环

(g) The 20th cycle

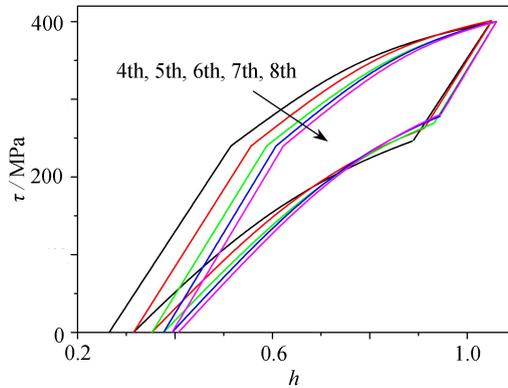
图3 第1、2、3、4、8、12和20次循环的模型结果和实验结果^[33]对比Fig. 3 Comparison between model results and experimental data^[33] for the 1st, 2nd, 3rd, 4th, 8th, 12th and 20th cycles

图4 第4至第8个循环的模型预测

Fig. 4 Model predictions from the 4th to the 8th cycles

5 结 论

本文通过提出新的有限弹塑性 J2 流方程,模拟了 SMAs 在循环荷载下从塑性变形逐渐转化为伪弹性变形的过程.所得主要结论如下:

1) 新的本构方程耦合了屈服中心的移动和屈服面的增大,使得模型可以模拟 SMAs 复杂的变形行为.传统的金属材料在加载后卸载,卸载阶段的应力-应变关系一般遵循 Hooke 定律.卸载应力到 0 以后进行反向加载才会开始出现下屈服阶段,也就是 Bauschinger 效应.本文通过改进背应力的演化方程,提出硬化模量 c , ω 和 r 的新形式,使得 SMAs 在卸载应力为 0 之前就开始屈服,进而产生滞回圈.

2) 基于有理插值的方法构造了上屈服和下屈服阶段的形函数,其中包含的参数 E_i , h_{i-1}^p , r_{mi} 和 b_i 依赖于有效塑性功大小,这些参数的共同特点是从初始值开始慢慢变大,随着有效塑性功到达某一值以后,就稳定到某一数值;此外,形函数特征参数包含 ξ_1 , ξ_2 , γ 和 β_1 .其表示的意义在第 1 节已经说明,一旦形函数给定,这些参数就固定,不用反复调节;最后, μ_{0i} 表示图 2 中点 S 的应力数值,随着循环的增大,其值慢慢从初始值开始减小并稳定到 r_0 .

3) 从第 2 节的基本方程出发,结合形函数具体形式,得到了有效塑性功的演化规律,如方程 (43) 和 (45) 所示.利用这些方程可以得到每一个循环下 ϑ 的累积大小,进而通过方程 (49) 给出的参数方程,确定该循环下的参数值,从而得到循环的应力-应变滞回圈.

4) 由局部因子构造而成的统一光滑硬化模量 c , ω 和 r 如方程 (47) 所示,这些量在单循环下会自动退化成符合要求的形式,将这些硬化模量代入到本构方程以后,能够得到符合要求的结果.通过图 3 的模型结果

和实验结果比较,证明了本文方法得到的结果可以精确匹配实验结果.此外,对于没有采集实验数据的循环,利用方程(49)推导的参数也可以进行合理地预测,如图 4 所示.

致谢 本文作者衷心感谢宁波职业技术学院研究机构专项课题(NZ21JG008)对本文的资助.

参考文献(References):

- [1] LEAL P B C, SAVI M A. Shape memory alloy-based mechanism for aeronautical application: theory, optimization and experiment[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2018, **76**(4): 155-163.
- [2] CHENG C, CHENG J, HUANG W. Design and development of a novel SMA actuated multi-DOF soft robot[J]. *IEEE Access*, 2019, **7**: 75073-75080.
- [3] WANG R, ZUO H, YANG Y M, et al. Finite element simulation and optimization of radial resistive force for shape memory alloy vertebral body stent[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2017, **28**: 2140-2150.
- [4] LAGOUDAS D C, EENCHEV P B, POPOV P, et al. Shape memory alloys, part II: modeling of polycrystals [J]. *Mechanics of Materials*, 2006, **38**(5/6): 430-462.
- [5] KHANDELWAL A, BURAVALLA V. Models for shape memory alloy behavior: an overview of modeling approaches[J]. *The International Journal of Structural Changes in Solids*, 2009, **1**(1): 111-148.
- [6] LEXCELLENT C. *Shape-Memory Alloys Handbook*[M]. John Wiley & Sons, 2013.
- [7] CISSE C, ZAKI W, ZINEB T B. A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys[J]. *International Journal of Plasticity*, 2016, **76**: 244-284.
- [8] CISSE C, ZAKI W, ZINEB T B. A review of modeling techniques for advanced effects in shape memory alloy behavior[J]. *Smart Materials and Structures*, 2016, **25**(10): 103001.
- [9] 杨建楠, 黄彬, 谷小军, 等. 形状记忆合金力学行为与应用[J]. 固体力学学报, 2021, **42**(4): 345-375. (YANG Jiannan, HUANG Bin, GU Xiaojun, et al. Mechanical behavior and application of shape memory alloy[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2021, **42**(4): 345-375. (in Chinese))
- [10] FALK F. Model free energy, mechanics, and thermo-dynamics of shape memory alloys[J]. *Acta Metallurgica*, 1980, **28**(12): 1773-1780.
- [11] FALK F. Ginzburg-Landau theory of static domain in walls in shape-memory alloys[J]. *Zeitschrift für Physik B: Condensed Matter*, 1983, **51**(2): 177-185.
- [12] 曹艳华, 张姊同, 李楠. 时空多项式配点法求解三维 Burgers 方程[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(9): 1045-1052. (CAO Yanhua, ZHANG Zitong, LI Nan. A space-time polynomial collocation method for solving 3D Burgers equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(9): 1045-1052. (in Chinese))
- [13] DAW M S, BASKES M I. Embedded-atom method: derivation and application to impurities, surfaces, and other defects in metals[J]. *Physical Review B*, 1984, **29**(12): 6443.
- [14] WANG X M, XU B X, YUE Z F. Micromechanical modelling of the effect of plastic deformation on the mechanical behaviour in pseudoelastic shape memory alloys[J]. *International Journal of Plasticity*, 2008, **24**(8): 1307-1332.
- [15] 陶泽, 李墨筱, 提飞, 等. 充液弹性毛细管低温相变的力学分析[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(10): 1045-1061. (TAO Ze, LI Moxiao, TI Fei, et al. Mechanics of low-temperature phase transition in liquid-filled elastic capillary tube[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(10): 1045-1061. (in Chinese))
- [16] 高伟业, 张赛, 张杰, 等. 含湿相变粗糙多孔材质的热质耦合分形研究[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(5): 561-568. (GAO Weiye, ZHANG Sai, ZHANG Jie, et al. Thermo-mass coupling fractal study of wet phase-change rough porous materials[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(5): 561-568. (in Chinese))
- [17] TAYLOR G I, QUINNEY H. The plastic distortion of metals[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (Series A): Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 1931, **230** (681/693): 323-362.
- [18] OSTWALD R, BARTEL T, MENZEL A. A Gibbs-energy-barrier-based computational micro-sphere model for the simulation of martensitic phase-transformations[J]. *International of Journal for Numerical Methods in*

- Engineering*, 2014, **97**(12): 851-877.
- [19] TANAKA K. A thermomechanical sketch of shape memory effect; one-dimensional tensile behavior[J]. *Res Mechanica*, 1986, **18**: 251-263.
- [20] BRINSON L C. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys; thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1993, **4**(2): 229-242.
- [21] LAGOUDAS D C, BO Z, QIDWAI M A. A unified thermodynamic constitutive model for SMA and finite element analysis of active metal matrix composites[J]. *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 1996, **3**(2): 153-179.
- [22] ZAKI W, MOUMNI Z. A 3D model of the cyclic thermomechanical behavior of shape memory alloys[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2007, **55**: 2427-2454.
- [23] SHAW J A, KYRIAKIDES S. Thermomechanical aspects of NiTi[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1995, **43**: 1243-1281.
- [24] 曾忠敏, 彭向和. 计及相变与塑性的 NiTi 形状记忆合金循环伪弹性特性描述[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(8): 850-862.(ZENG Zhongmin, PENG Xianghe. A constitutive description of cyclic pseudoelasticity for the NiTi SMAs involving coupled phase transformation and plasticity[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(8): 850-862.(in Chinese))
- [25] MIYAZAKI S, IMAI T, IGO Y, et al. Effect of cyclic deformation on the pseudoelasticity characteristics of Ti-Ni alloys[J]. *Metallurgical Transactions A*, 1995, **17**: 115-120.
- [26] KANG, G. Advances in transformation ratcheting and ratcheting-fatigue interaction of NiTi shape memory alloy[J]. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2013, **26**: 221-236.
- [27] AURICCHIO F, TAYLOR R L, LUBLINER J. Shape-memory alloys: macro-modelling and numerical simulations of the superelastic behavior[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997, **146**(3/4): 281-312.
- [28] BO Z, LAGOUDAS D C. Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, part I: theoretical derivations[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1999, **37**(9): 1089-1140.
- [29] BO Z, LAGOUDAS D C. Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, part III: evolution of plastic strains and two-way shape memory effect[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1999, **37**(9): 1175-1203.
- [30] BO Z, LAGOUDAS D C. Thermomechanical modeling of polycrystalline SMAs under cyclic loading, part IV: modeling of minor hysteresis loops[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1999, **37**(9): 1205-1249.
- [31] AURICCHIO F, MARFIA S, SACCO E. Modelling of SMA materials: training and two-way memory effects[J]. *Computers & Structures*, 2003, **81**(24/25): 2301-2317.
- [32] AURICCHIO F, REALI A, STEFANELLI U. A three-dimensional model describing stress-induced solid phase transformation with permanent inelasticity[J]. *International Journal of Plasticity*, 2007, **23**(2): 207-226.
- [33] ZAKI W, MOUMNI Z. A three-dimensional model of the thermomechanical behavior of shape memory alloys [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2007, **55**(11): 2455-2490.
- [34] PATOOR E, EBERHARDT A, BERVEILLER M. Micromechanical modelling of superelasticity in shape memory alloys[J]. *Le Journal de Physique IV*, 1996, **6**: 277-292.
- [35] PATOOR E, LAGOUDAS D C, ENTCHEV P B, et al. Shape memory alloys, part I: general properties and modeling of single crystals[J]. *Mechanics of Materials*, 2006, **38**(5/6): 391-429.
- [36] HUANG M, GAO X, BRINSON L C. A multivariant micromechanical model for SMAs part 2: polycrystal model [J]. *International Journal of Plasticity*, 2000, **16**(10/11): 1371-1390.
- [37] LAGOUDAS D C, ENTCHEV P B. Modeling of transformation-induced plasticity and its effect on the behavior of porous shape memory alloys, part I: constitutive model for fully dense SMAs[J]. *Mechanics of Materials*, 2004, **36**(9): 865-892.
- [38] KANG G, KAN Q, QIAN L, et al. Ratchetting deformation of superelastic and shape-memory NiTi alloys[J].

- Mechanics of Materials*, 2009, **41**(2): 139-153.
- [39] YU C, KANG G, KAN Q, et al. A micromechanical constitutive model based on crystal plasticity for thermo-mechanical cyclic deformation of NiTi shape memory alloys[J]. *International Journal of Plasticity*, 2013, **44**: 161-191.
- [40] YU C, KANG G, SONG D, et al. Effect of martensite reorientation and reorientation-induced plasticity on multiaxial transformation ratchetting of super-elastic NiTi shape memory alloy: new consideration in constitutive model[J]. *International Journal of Plasticity*, 2015, **67**: 69-101.
- [41] XIAO H. Pseudo-elastic hysteresis out of recoverable finite elastoplastic flows[J]. *International Journal of Plasticity*, 2013, **41**: 82-96.
- [42] WANG X M, WANG Z L, XIAO H. SMA pseudo-elastic hysteresis with tension-compression asymmetry: explicit simulation based on elasticity models[J]. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2015, **427**: 959-970.
- [43] 王晓明, 吴荣兴, 肖衡. 显式模拟类橡胶材料 Mullins 效应滞回圈[J]. 力学学报, 2019, **51**(2): 484-493.(WANG Xiaoming, WU Rongxing, XIAO Heng. Explicit modeling the hysteresis loops of the Mullins effect for rubber-like material[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2019, **51**(2): 484-493. (in Chinese))
- [44] 王晓明, 郑东, 吴荣兴, 等. 类橡胶材料变形直到破坏的显式本构模型[J]. 力学季刊, 2019, **40**(2): 252-264. (WANG Xiaoming, ZHENG Dong, WU Rongxing, et al. Explicit constitutive model of rubber-like materials up to failure[J]. *Chinse Quarterly of Mechanics*, 2019, **40**(2): 252-264. (in Chinese))
- [45] 王晓明, 肖衡. 显式方法精确模拟形状记忆聚合物热力学行为[J]. 固体力学学报, 2020, **41**(4): 366-378. (WANG Xiaoming, XIAO Heng. Accurately modeling thermomechanical behavior of shape memory polymer with explicit method[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2020, **41**(4): 366-378. (in Chinese))
- [46] 王晓明, 吴荣兴, 蒋义, 等. 显式模拟类橡胶材料应力软化引起的不可恢复变形及其各向异性特征[J]. 力学学报, 2021, **53**(7): 1999-2009.(WANG Xiaoming, WU Rongxing, JIANG Yi, et al. Explicitly modeling permanent set and anisotropy property induced by stress softening for rubber-like materials[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2021, **53**(7): 1999-2009. (in Chinese))
- [47] 王晓明, 肖衡. 基于有限变形弹塑性模型模拟伪弹性合金全程变形行为[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(3): 286-299.(WANG Xiaoming, XIAO Heng. Comprehensive simulation of shape memory alloys based on a finite elastoplastic model[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(3): 286-299. (in Chinese))
- [48] XIAO H. An explicit, straightforward approach to modeling SMA pseudo-elastic hysteresis[J]. *International Journal of Plasticity*, 2014, **53**: 228-240.
- [49] XIAO H, WANG X M, WANG Z L, et al. Explicit, comprehensive modeling of multi-axial finite strain pseudo-elastic SMAs up to failure[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2016, **88/89**: 215-226.
- [50] ZHAN L, WANG X M, WANG S Y, et al. An explicit and accurate approach toward simulating plastic-to-pseudo-elastic transitions of SMAs under multiple loading and unloading cycles[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, **185**: 104-115.
- [51] XIAO H, BRUHNS O T, MEYERS A. Elastoplasticity beyond small deformations[J]. *Acta Mechanica*, 2006, **182**: 31-111.
- [52] XIAO H, BRUHNS O T, MEYERS A. Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate[J]. *Acta Mechanica*, 1997, **124**: 89-105.
- [53] BRUHNS O T, XIAO H, MEYERS A. Some basic issues in traditional Eulerian formulations of finite elastoplasticity[J]. *International Journal of Plasticity*, 2003, **19**: 2007-2026.