

Gauss 白噪声激励下的永磁同步 电动机模型的分岔分析*

叶正伟¹, 邓生文², 梁相玲³

- (1. 广东科技学院 通识教育学院, 广东 东莞 523000;
2. 广东理工学院 基础课教学研究部, 广东 肇庆 526100;
3. 喀什大学 数学与统计学院, 新疆 喀什 844000)

摘要: 针对永磁同步电动机(PMSM)模型引入 Gauss 白噪声,根据极坐标变换和随机平均法得到系统 Itô 随机微分方程,并计算出系统概率密度函数,通过数值模拟揭示了系统 P-分岔的机理.此外,探讨了系统在双参数空间中的复杂动力学,仿真结果表明在参数空间中出现了大量的“鱼”形周期区域,并且这些“鱼”形周期区域不可避免地受到噪声的影响变得紊乱.值得注意的是,从数值模拟结果中发现了一个新的现象,一定的噪声强度下,可以诱导系统在周期振荡区域内的收敛行为,这也表明了噪声对系统影响的双面性.

关键词: 永磁同步电动机; Gauss 白噪声; 随机平均法; 随机分岔

中图分类号: O211.63; TM351 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430285

Bifurcation Analysis of the Permanent Magnet Synchronous Motor Model Under White Gaussian Noises

YE Zhengwei¹, DENG Shengwen², LIANG Xiangling³

- (1. College of General Education, Guangdong University of Science and Technology, Dongguan, Guangdong 523000, P.R.China;
2. Department of Basic Course Teaching and Research, Guangdong Technology College, Zhaoqing, Guangdong 526100, P.R.China)
3. School of Mathematics and Statistics, Kashi University, Kashi, Xinjiang 844000, P.R.China)

Abstract: The Gaussian white noise was introduced into the permanent magnet synchronous motor (PMSM) model, to obtain the system Itô stochastic differential equation through the polar transformation and with the stochastic average method. Hence, the probability density function of the system was calculated, and the mechanism of the P-bifurcation of the system was revealed through numerical simulation. In addition, the complex dynamics of the system in the 2-parameter space was discussed. The simulation results show that, there are lots of “fish-shaped” periodic regions in the parameter space. The regions become unstable under effects of system noises. It is worth noting that, under noises of a certain intensity, the system dynamics will switch from period-

* 收稿日期: 2022-09-16; 修订日期: 2023-04-19

基金项目: 国家自然科学基金项目(61863022)

作者简介: 叶正伟(1993—),男,讲师,硕士(通讯作者. E-mail: yezhengweiff@163.com).

引用格式: 叶正伟, 邓生文, 梁相玲. Gauss 白噪声激励下的永磁同步电动机模型的分岔分析[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(7): 884-894.

ic motion to convergence, indicating the dual nature of the effects of noises on the PMSM system dynamics.

Key words: PMSM; Gaussian white noise; stochastic average method; stochastic bifurcation

0 引言

永磁同步电机(PMSM)是一种新型电机,具有高功率密度、大转矩惯性比、小体积等特点,广泛应用于船舶、航天、新能源汽车等领域。其模型作为典型的非线性系统,最早由 Hemati 等^[1-2]于 20 世纪 90 年代提出,后经发展逐渐完善。我国学者对其及相关转子系统进行了深入的研究。文献[3]运用非线性动力学理论和方法分析了永磁同步电机系统在特定参数变化下的混沌和分岔。文献[4]以永磁同步电机的数学模型为基础,根据中心流形定理进行降维简化处理,讨论了永磁同步电机模型的 Hopf 分岔问题。唐传胜等^[5]提出了一种考虑不确定参数混沌系统的改进控制器,并进行了数值仿真,模拟结果表明改进的控制器有更强的鲁棒性。文献[6]通过 Lyapunov 指数图、Poincare 截面、相轨迹,研究了各种参数变化下系统的分岔及混沌控制。文献[7-8]基于 GPU 计算,探究了多参数变化下的旋转机械系统的动力学行为,发现了一些有趣的分岔结构。永磁同步电机模型是一个典型的强非线性动力系统模型,大量的研究工作是基于确定的理论展开的,除了确定的永磁同步电机系统的非线性动力学分析外,一些文献在永磁同步电动机模型中引入扰动项。文献[9]运用非线性动力学理论分析了正弦扰动项下非均匀气隙的永磁同步电机模型的稳定性。文献[10]利用根据包映射有向图法分析了噪声干扰下永磁同步风力发电机的随机分岔,通过数值模拟得到了整体结构的演化规律。

许多研究表明,任何动力系统都无法避免外界干扰,而普遍存在的随机噪声会对系统产生双重影响:一方面,随机噪声可以促进系统进入理想状态,如随机共振^[11-13]、神经元脉冲放电和网络同步;另一方面,噪声会干扰动态系统的周期振荡行为,引起混沌。在实际应用中,这种影响广泛存在于生物工程、机械工程等多领域。文献[14]研究了 Markov 状态切换和白噪声扰动下的一类具有 Gilpin-Ayala 增长的随机捕食-食饵模型的动力学行为,得到了系统随机持久和灭绝的阈值,并根据数值模拟验证了结论的有效性。文献[15]对网络传染病模型引入白噪声,通过随机动力系统理论,得到了随机灭绝和持久的条件,由数值模拟验证了理论结果。文献[16-17]通过随机动力学理论介绍了随机噪声激励下调速器系统的随机稳定性,并由数值模拟,探究了系统在双参数空间中的复杂动力学行为。文献[18]建立了色噪声激励下的水轮机调节系统,探究了系统的随机分岔,并通过数值模拟验证。文献[19]讨论了眼动系统在 Gauss 白噪声激励下的随机分岔,噪声强度和抑制性神经元的作用强度都能诱导产生随机 P 分岔现象。在实际工作中,永磁同步电动机系统也不可避免地受到外部环境和内部传动系统的影响,例如温度起伏、磁场变换^[20]、阻尼改变等。这些影响因素可能会对内部机理起到消极作用,将这些影响因素视作随机噪声更接近实际情况^[21]。由此,本文建立了 Gauss 白噪声激励的永磁同步电动机模型,进行了随机噪声激励下的分岔分析,从而为其平稳运行增加鲁棒性提供了理论意义。

本文的主要结构如下:第 1 节将 Gauss 白噪声引入永磁同步电机系统,通过极坐标变换和随机平均法得到 Itô 随机微分方程;在第 2 节中,通过计算推导得到了系统概率密度函数,并进行了数值模拟,随着噪声强度的增加,系统在概率密度函数的演化过程中出现 P-分岔;第 3 节在双参数空间中探究了引入噪声前后系统的复杂动力学特性;第 4 节总结了噪声对永磁同步电动机系统的影响,其结果有助于研究该电机系统的平稳运行。

1 模型处理

以电流 i_d, i_q 及转子角速度 ω 为变量的永磁同步电动机模型为

$$\begin{cases} \frac{di_d}{dt} = \frac{u_d - R_1 i_d + \omega L_q i_q}{L_d}, \\ \frac{di_q}{dt} = \frac{u_q - R_1 i_q - \omega L_d i_d - \omega \psi_r}{L_q}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{P \psi_r i_q + P(L_d - L_q) i_d i_q - T_L - \beta \omega}{J}, \end{cases} \quad (1)$$

其中,参数 L_d, L_q 表示 d - q 轴电感; R_1 为定子绕组; T_L 为负载转矩; ψ_r 为永磁磁通; β 为阻尼系数; P 为极对数; J 为转动惯量; u_d, u_q 表示定子 d - q 轴电压.

为了方便计算,对永磁同步电机模型无量纲化,做仿射变换 $[i_d \ i_q \ \omega]^T = A [\bar{i}_d \ \bar{i}_q \ \bar{\omega}]^T$ 和时间刻度变换 $t = L_q \bar{t} / R_1$, 且

$$A = \begin{bmatrix} \frac{R_1 \beta}{L_d P \psi_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_1 \beta}{L_q P \psi_r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_1}{L_q} \end{bmatrix}.$$

考虑一般情形,交直流电感近似相等 $L_d = L_q = L$, 此时模型(1)进一步变为

$$\begin{cases} \frac{d\bar{i}_d}{d\bar{t}} = -\bar{i}_d + \bar{\omega} \bar{i}_q + U_d, \\ \frac{d\bar{i}_q}{d\bar{t}} = -\bar{i}_q - \bar{\omega} \bar{i}_d - \gamma \bar{\omega} + U_q, \\ \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{t}} = \sigma(\bar{i}_q - \bar{\omega}) - T_m, \end{cases} \quad (1)'$$

其中 $U_d = \frac{LP\psi_r u_d}{R_1^2 \beta}$, $U_q = \frac{LP\psi_r u_q}{R_1^2 \beta}$, $T_m = \frac{L^2 T_L}{JR_1^2}$, $\gamma = \frac{P\psi_r^2}{R_1 \beta}$, $\sigma = \frac{\beta L}{R_1 J}$.

考虑系统(1)'容易受随机因素影响变得不稳定,对其引入 Gauss 白噪声 $\xi(t)$ 得到随机微分方程为

$$\begin{cases} \frac{d\bar{i}_d}{d\bar{t}} = -\bar{i}_d + \bar{\omega} \bar{i}_q + U_d + D(\bar{i}_d - i_d^*) \xi(t), \\ \frac{d\bar{i}_q}{d\bar{t}} = -\bar{i}_q - \bar{\omega} \bar{i}_d - \gamma \bar{\omega} + U_q + D(\bar{i}_q - i_q^*) \xi(t), \\ \frac{d\bar{\omega}}{d\bar{t}} = \sigma(\bar{i}_q - \bar{\omega}) - T_m + D(\bar{\omega} - \omega^*) \xi(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $E^*(i_d^*, i_q^*, \omega^*)$ 为系统(2)的非负平衡点; D 为噪声强度.令 $x = \bar{i}_d - i_d^*$, $y = \bar{i}_q - i_q^*$, $z = \bar{\omega} - \omega^*$, 模型(2)转化为

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \omega^* y + i_q^* z + yz - i_d^* + \omega^* i_q^* + U_d + Dx\xi(t), \\ \dot{y} = -y - \omega^* x - (\gamma + i_d^*)z - xz - i_q^* - \omega^* i_d^* + \gamma \omega^* + U_q + Dy\xi(t), \\ \dot{z} = \sigma(y - z) + \sigma i_q^* - \sigma \omega^* - T_m + Dz\xi(t). \end{cases} \quad (3)$$

因此,方程(3)在 $E(0,0,0)$ 处的稳定性等价于方程(2)在平衡点 $E^*(i_d^*, i_q^*, \omega^*)$ 的稳定性,假设系统(3)的特征方程为 $\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, 其中 $a = \sigma + 2$, $b = \sigma i_d^* - \sigma \gamma + \omega^{*2} + 2\sigma + 1$, $c = \sigma(i_d^* - \gamma + \omega^{*2} + \omega^* i_q^* + 1)$. 记 $b_0 = c/a$, $b = b_0 - (\varepsilon(a + 2\varepsilon)^2 + b_0)/(a + 2\varepsilon)$, 特征方程的解为 $\lambda_{1,2} = \varepsilon \pm \sqrt{c/(a + 2\varepsilon) - \varepsilon^2} i$, $\lambda_3 = -a - 2\varepsilon$. 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{b} i$, $\lambda_3 = -a$, 原点退化为临界焦点,系统(3)具有局部不变流形性质.

令

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix},$$

其中

$$M_{21} = \frac{\frac{\varepsilon}{2} - \frac{c}{a + \varepsilon}}{1 + \varepsilon - \frac{c}{a + \varepsilon}}, M_{22} = \frac{\sqrt{-\frac{c}{a + \varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{4}}}{1 + \varepsilon - \frac{c}{a + \varepsilon}}, M_{23} = \frac{a + \varepsilon}{-a - \varepsilon + 1},$$

$$M_{31} = \frac{-\frac{c}{a + \varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{2} + 1 \right)}{\left(1 + \varepsilon - \frac{c}{a + \varepsilon} \right) \left(-\frac{c}{a + \varepsilon} \right)}, M_{32} = \frac{\frac{c}{a + \varepsilon} \sqrt{-\frac{c}{a + \varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{4}}}{\left(1 + \varepsilon - \frac{c}{a + \varepsilon} \right) \left(-\frac{c}{a + \varepsilon} \right)}.$$

方程(3)可化为

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\varphi - \sqrt{c/(a + 2\varepsilon) - \varepsilon^2}\eta + a_1\varphi^2 + a_2\varphi\eta + a_3\varphi\zeta + a_4\eta^2 + a_5\eta\zeta + D\varphi\xi(t), \\ \frac{d\eta}{dt} = \sqrt{c/(a + 2\varepsilon) - \varepsilon^2}\varphi + \varepsilon\eta + b_1\varphi^2 + b_2\varphi\eta + b_3\varphi\zeta + b_4\eta^2 + b_5\eta\zeta + D\eta\xi(t), \\ \frac{d\zeta}{dt} = -(a + 2\varepsilon)\zeta + c_1\varphi^2 + c_2\varphi\eta + c_3\varphi\zeta + c_4\eta^2 + c_5\eta\zeta + D\zeta\xi(t), \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$a_1 = \frac{(1 - M_{21}M_{23})M_{31}M_{32}}{N}, a_2 = \frac{(1 - M_{21}M_{23}M_{32}^2) - M_{22}M_{23}M_{31}M_{32}}{N},$$

$$a_3 = \frac{(1 - M_{23}^2)M_{31}M_{32}}{N}, a_4 = \frac{-M_{23}M_{22}M_{32}^2}{N}, a_5 = \frac{(1 - M_{23}M_{32})M_{23}M_{32}}{N},$$

$$b_1 = \frac{(M_{23}M_{21} - 1)M_{31}^2}{N}, b_2 = \frac{(M_{21}M_{23} - 1)M_{31}M_{32} + M_{22}M_{23}M_{31}^2}{N},$$

$$b_3 = \frac{(M_{23}^2 - 1)M_{31}^2}{N}, b_4 = \frac{M_{22}M_{23}M_{31}M_{32}}{N}, b_5 = \frac{(M_{23}^2 - 1)M_{31}M_{32}}{N},$$

$$c_1 = \frac{MM_{21}M_{31} - M_{31}M_{32}}{N}, c_2 = \frac{M(M_{21}M_{32} + M_{22}M_{31}) - M_{32}^2}{N},$$

$$c_3 = \frac{MM_{23}M_{31} - M_{31}M_{32}}{N}, c_4 = \frac{MM_{22}M_{32}}{N}, c_5 = \frac{MM_{23}M_{32} - M_{32}^2}{N},$$

$$M = M_{21}M_{32} - M_{22}M_{31}, N = M_{21}M_{32} - M_{22}M_{31} - M_{23}M_{32}.$$

此时系统具有局部不变流行:

$$w_{loc}^c(O) = \{(\varphi, \eta, \zeta) \mid \zeta = h(\varphi, \eta), |\varphi| + |\eta| \leq 1, h(0, 0) = \partial h_\varphi(0, 0) = \partial h_\eta(0, 0) = 0\}.$$

可对方程(4)降维得

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \varepsilon\varphi - \sqrt{c/(a + 2\varepsilon) - \varepsilon^2}\eta + a_1\varphi^2 + a_2\varphi\eta + a_3\varphi h + a_4\eta^2 + a_5\eta h + D\varphi\xi(t), \\ \frac{d\eta}{dt} = \sqrt{c/(a + 2\varepsilon) - \varepsilon^2}\varphi + \varepsilon\eta + b_1\varphi^2 + b_2\varphi\eta + b_3\varphi h + b_4\eta^2 + b_5\eta h + D\eta\xi(t), \end{cases} \quad (5)$$

ζ 的全微分方程为 $d\zeta/dt = \partial h_\varphi \cdot d\varphi/dt + \partial h_\eta \cdot d\eta/dt$.

接下来,我们可以得到

$$\begin{aligned} & \partial h_\varphi(\varepsilon\varphi - \sqrt{c/(a + 2\varepsilon) - \varepsilon^2}\eta + a_1\varphi^2 + a_2\varphi\eta + a_3\varphi h + a_4\eta^2 + a_5\eta h + D\varphi\xi(t)) + \\ & \partial h_\eta(\sqrt{c/(a + 2\varepsilon) - \varepsilon^2}\varphi + \varepsilon\eta + b_1\varphi^2 + b_2\varphi\eta + b_3\varphi h + b_4\eta^2 + b_5\eta h + D\eta\xi(t)) = \\ & -(a + \varepsilon)h + c_1\varphi^2 + c_2\varphi\eta + c_3\varphi h + c_4\eta^2 + c_5\eta h + Dh\xi(t), \end{aligned} \quad (6)$$

且 $h(\varphi, \eta)$ 的逼近式为

$$h(\varphi, \eta) = h_1\varphi^2 + h_2\varphi\eta + h_3\varphi D\xi(t) + h_4\eta^2 + h_5\eta D\xi(t) + \dots \quad (7)$$

将式(7)代入方程(6),合并同幂数项 $\xi^i\eta^j (i+j \geq 2)$ 得

$$h_1 = \frac{a^2c_1 + 2b(c_1 + c_4) - a\sqrt{b}c_2}{a(a^2 + 4b)}, h_2 = \frac{2\sqrt{b}c_1 + ac_2 - 2ac_4}{a^2 + 4b},$$

$$h_3 = 0, h_4 = \frac{a^2c_4 + 2b(c_1 + c_4) + a\sqrt{b}c_2}{a(a^2 + 4b)}, h_5 = 0.$$

一定的误差范围内,系统(5)可变为

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{b}\eta + a_1\varphi^2 + a_2\varphi\eta + a_3h_1^2\varphi^3 + a_4\eta^2 + \\ \quad (a_3h_2 + a_5h_1)\varphi^2\eta + (a_3h_4 + a_5h_2)\varphi\eta^2 + a_5h_4\eta^3 + D\varphi\xi(t), \\ \frac{d\eta}{dt} = \sqrt{b}\varphi + b_1\varphi^2 + b_2\varphi\eta + b_3h_1^2\varphi^3 + b_4\eta^2 + (b_3h_2 + b_5h_1)\varphi^2\eta + \\ \quad (b_3h_4 + b_5h_2)\varphi\eta^2 + a_5h_4\eta^3 + D\eta\xi(t). \end{cases} \quad (8)$$

令 $\varphi = r\cos\theta, \eta = r\sin\theta$, 经过极坐标变换,系统(8)可变为

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \cos\theta \frac{d\varphi}{dt} + \sin\theta \frac{d\eta}{dt} = f_1(r, \theta, \xi(t)), \\ \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\sin\theta}{r} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\cos\theta}{r} \frac{d\eta}{dt} = f_2(r, \theta, \xi(t)), \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1(r, \theta, \xi(t)) &= a_1r^2\cos^3\theta + b_4r^2\sin^3\theta + (a_2 + b_1)r^2\cos^2\theta\sin\theta + a_3h_1r^3\cos^4\theta + \\ &\quad (a_3h_2 + a_5h_1)r^3\cos^3\theta\sin\theta + (a_3h_4 + a_5h_2 + b_3h_2 + b_5h_1)r^3\cos^2\theta\sin^2\theta + \\ &\quad (a_5h_4 + b_3h_4 + b_5h_2)r^3\cos\theta\sin^3\theta + (b_2 + a_4)r^2\cos\theta\sin^2\theta + \\ &\quad b_3h_1r^3\cos^3\theta\sin\theta + b_5h_4r^3\sin^4\theta + Dr\cos\theta \cdot \xi(t), \\ f_2(r, \theta, \xi(t)) &= \sqrt{b} + b_1r\cos^3\theta - a_4r\sin^3\theta + (b_2 - a_1)r\cos^2\theta\sin\theta + b_3h_1r^2\cos^4\theta + \\ &\quad b_3h_2r^2\cos^3\theta\sin\theta + (b_3h_4 + b_5h_2 - a_3h_2 - a_5h_1)r^2\cos^2\theta\sin^2\theta + \\ &\quad (b_4 - a_2)r\cos\theta\sin^2\theta + (b_5h_1 - a_3h_1)r^2 + (b_5h_1 - a_3h_1)r^2\cos^3\theta\sin\theta + \\ &\quad \cos^3\theta\sin\theta + (b_5h_4 - a_3h_4 - a_5h_2)r^2\cos\theta\sin^3\theta - a_5h_4r^2\sin^4\theta + Dr\sin\theta \cdot \xi(t). \end{aligned}$$

已知反应 $\{r(t), \theta(t)\}$ 弱收敛于二维 Markov 过程,根据随机平均法,方程(9)的 Itô 微分方程如下:

$$\begin{cases} dr = \left(\frac{v_1}{8}r + \frac{v_2}{8}r^3\right)dt + \left(\frac{v_3}{8}r^2\right)^{1/2}dw(t), \\ d\theta = \left(\sqrt{b} + \frac{v_4}{8}r^2\right)dt + (v_5r)^{1/2}dw(t), \end{cases} \quad (10)$$

其中 $w(t)$ 为标准 Wiener 过程^[22], dt 和 dw 分别为漂移系数和扩散系数,且

$$v_1 = 8D^2, v_2 = 3a_3h_1 + a_3h_4 + a_5h_2 + b_3h_2 + b_5h_1 + 3b_5h_4, v_3 = 8D^2,$$

$$v_4 = 3b_3h_1 + b_3h_4 + b_5h_2 - a_3h_2 - a_5h_1 - 3a_5h_4, v_5 = D^2/2.$$

基于扩散矩阵,可得到一维的 Markov 过程的平均振幅 $r(t)$:

$$dr = \left(\frac{v_1}{8}r + \frac{v_2}{8}r^3\right)dt + \left(\frac{v_3}{8}r^2\right)^{1/2}dw(t). \quad (11)$$

2 P-分岔

当平稳概率密度的性态发生变化时,系统将会发生 P-分岔,所以我们通过平稳概率密度函数研究 P-分岔.根据 Itô 微分方程(11),得到相应的 FPK 方程如下:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{v_1}{8} r - \frac{v_3}{2v_2} r - r^3 \right) p(r) \right] - \frac{v_3}{2v_2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [r^2 p(r)] \quad (12)$$

方程(12)的初始条件为 $v_2 = 0, p(r, t | r_0, t_0) \rightarrow \delta(r - r_0), t \rightarrow t_0$, 其中 $p(r, t | r_0, t_0)$ 是扩散过程 $r(t)$ 的转移概率密度, 令 $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, 方程(12)的退化解为

$$p(r) = \frac{\exp\left(\frac{r^2 v_2}{v_3}\right) r^{-1-v_1 v_2 / (4v_3)}}{\Gamma\left(-\frac{v_1 v_2}{8v_3}\right) \left(-\frac{v_2}{v_3}\right)^{v_1 v_2 / (8v_3)}} \quad (13)$$

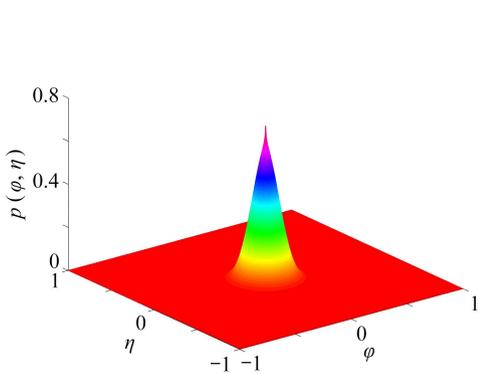
系统反应过程 $(\varphi(t), \eta(t))$, 且 $r(t) = \sqrt{\varphi^2(t) + \eta^2(t)}$, 则有联合概率密度函数

$$p(\varphi, \eta) = \frac{\exp\left[\frac{(\varphi^2 + \eta^2) v_2}{v_3}\right] \sqrt{\varphi^2 + \eta^2}^{-1-v_1 v_2 / (4v_3)}}{\Gamma\left(-\frac{v_1 v_2}{8v_3}\right) \left(-\frac{v_2}{v_3}\right)^{v_1 v_2 / (8v_3)}} \quad (14)$$

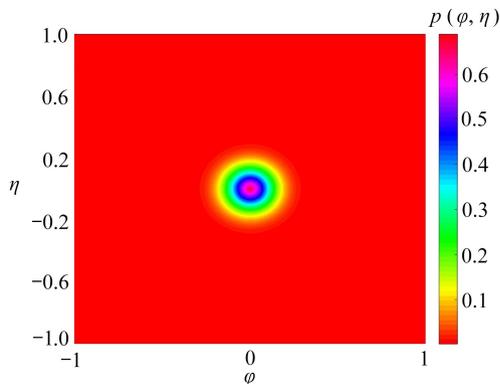
设置一组参数:

$$L_d = L_q = L = 12 \text{ mH}, R_1 = 0.84 \text{ } \Omega, \psi_r = 0.8 \text{ Wb}, P = 3, J = 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ \beta = 0.0175 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}, T_L = 0.25 \text{ N} \cdot \text{m}, u_d = 13.2 \text{ V}, u_q = 45 \text{ V}.$$

讨论噪声强度 D 对系统分岔的影响, 其仿真图像见图 1.

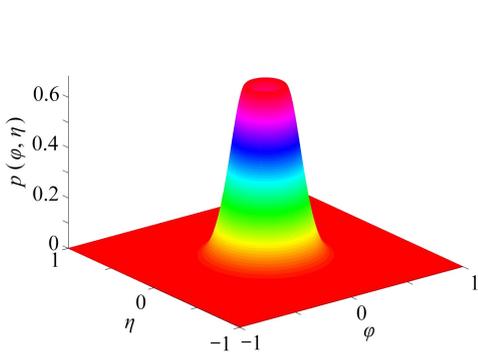


(a) $D = 0.1$

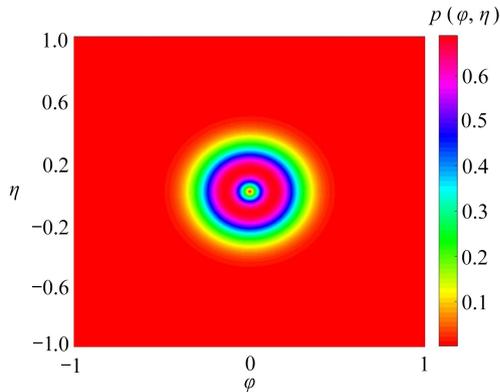


(b) 图 1(a) 俯视图

(b) The top view of fig. 1(a)



(c) $D = 0.2$



(d) 图 1(c) 俯视图

(d) The top view of fig. 1(c)

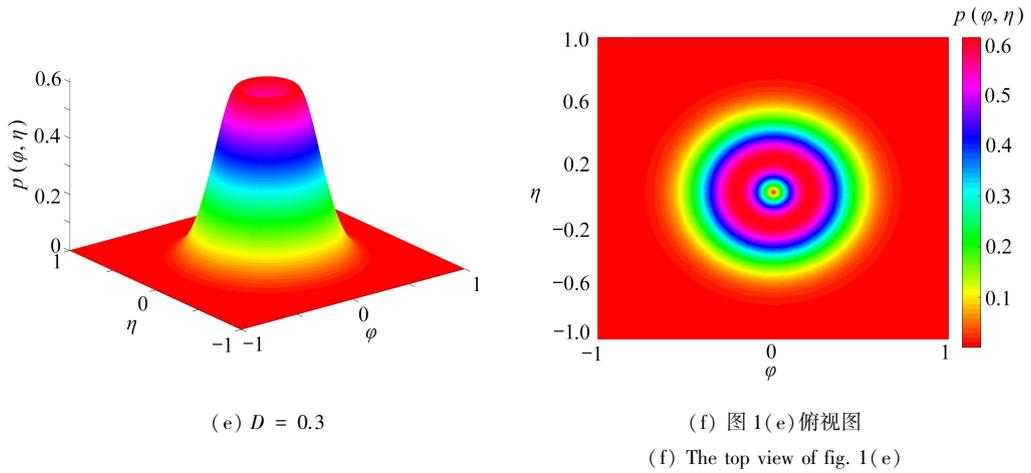


图1 随噪声强度 D 变化的联合概率密度图及其俯视图

Fig. 1 The joint probability density function with the change of noise intensity D

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

从图 1(a) 可以看出,当噪声强度 $D = 0.1$ 时,联合概率密度函数为单峰形状,函数 $p(\varphi, \eta)$ 的最高点为固定值,表明系统可能不绝对趋于平衡位置,但有较大概率收敛到平衡位置.图 1(b) 为图 1(a) 的俯视图,整体呈圆环状,最内环的红色区域对应图 1(a) 最高区域为有限值.如图 1(c) 所示,当噪声强度 $D = 0.2$ 时,联合概率密度函数高度下降、宽度增加,形状由单峰变为火山口,与图 1(a) 相比,此时系统(11)的性态发生了改变,即系统发生 P-分岔,在这种情形下,系统的广义变量 φ 和 η 可能不为零,系统变得不稳定.图 1(d) 为图 1(c) 的俯视图,俯视图中最内环红色区域对应值减小,圆环整体扩大,很形象地说明了函数 $p(\varphi, \eta)$ 的变化趋势.当噪声强度 $D = 0.3$ 时,联合概率密度及俯视图分别如图 1(e)、1(f) 所示,函数 $p(\varphi, \eta)$ 这种变化趋势更加明显,这也意味着系统的广义变量 φ 和 η 都可能增大,系统(11)变得更加不稳定。

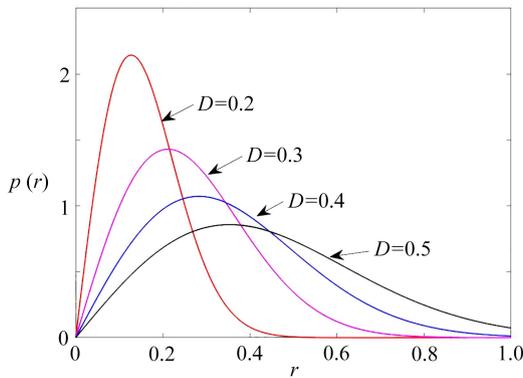


图2 不同噪声强度 D 下的平稳概率密度图

Fig. 2 The stationary probability density function with the change of noise intensity D

噪声强度 D 分别为 0.2, 0.3, 0.4 和 0.5 时,平稳概率密度函数如图 2 所示.根据图 2 可以看出,随着噪声强度 D 的不断增大,概率密度函数的顶点减小,函数形状趋于平缓,变化趋势与联合概率函数的变化趋势形成对应,这也表明系统性态改变愈发明显.另外,在系统发生 P-分岔时,概率密度函数图形由单峰变为双峰,此时广义变量 φ 和 η 的收敛解的变化,一定程度上可反应系统(1)变量的收敛情况,如角速度 ω 变化反馈到永磁同步电动机实际运行中,可能是平稳转动状态到异常转动状态的临界点,概率密度函数趋于平缓的过程中,方程(11)解变得发散.在实际运行中,永磁同步电动机可能会发生转速不稳定的现象。

为进一步探讨噪声强度的影响,除对概率密度函数分析外,我们还对系统进行动力学行为分析.固定无量纲化参数 $\gamma = 130, U_d = 3, U_q = 10, T_m = 5$, 选取 σ 作为分岔参数,讨论不同噪声强度值下变量 x 的分岔如图 3 所示.从图 3(a) 中可以看出,在未引入噪声前,系统(3)在区间 $\sigma \in [10, 24.18]$ 范围内表现出伴随混沌

的加周期分岔行为,其中区间 $[16.75, 17.14]$ 和 $[21.11, 21.54]$ 分别为 2 周期和 3 周期窗口,当参数 σ 大于 24.18 时,系统从周期 6 \rightarrow 周期 12 \rightarrow 周期 6 \rightarrow 周期 3.当噪声强度 $D = 0.1$ 时,相较于图 3(a),图 3(b)中周期窗口由稳定状态变为轻微振荡,随着噪声强度 D 的增加,这种不稳定性进一步增强.由图 3(c)和图 3(d)可以看出,系统几乎变成完全混沌状态,这证实了上述结论的有效性.

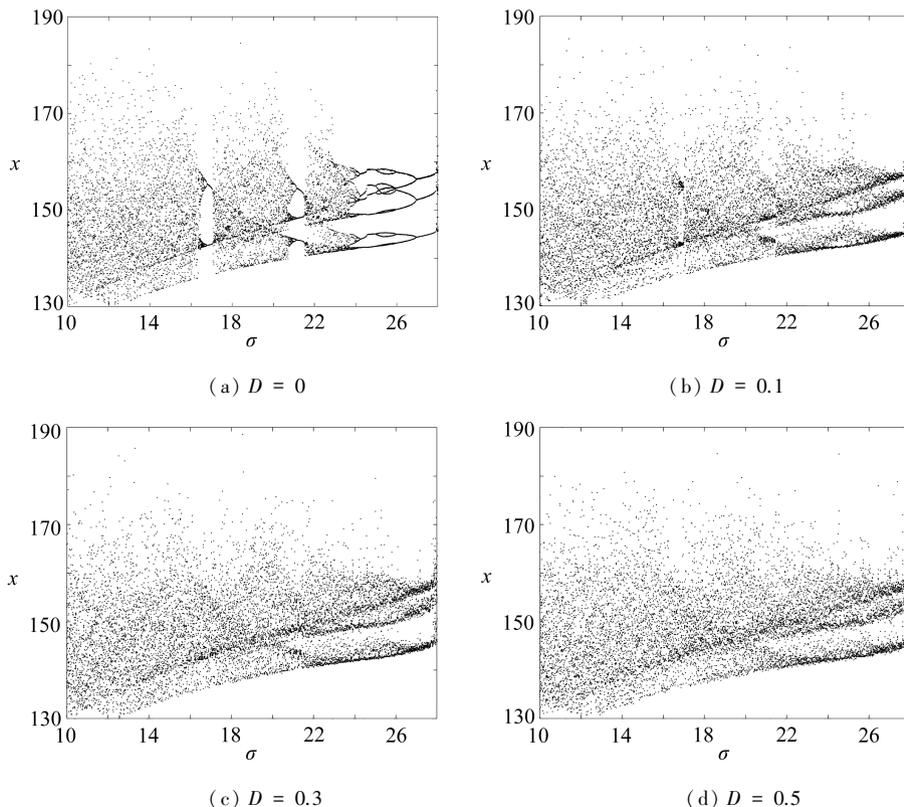
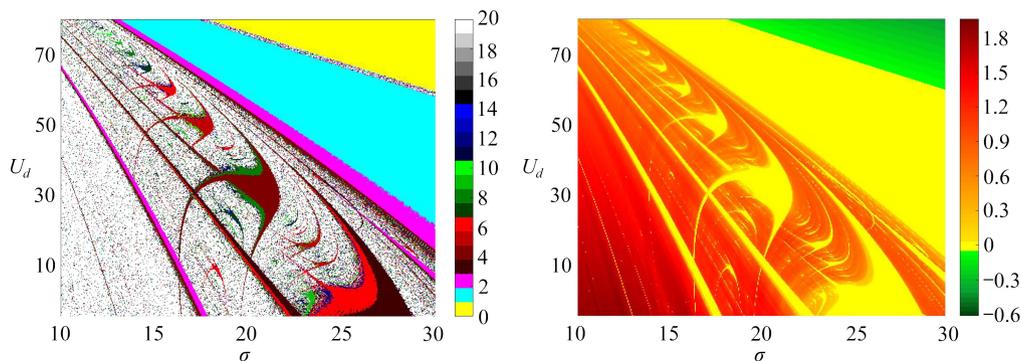


图 3 不同噪声强度 D 下的系统分岔图

Fig. 3 The bifurcation diagram with the change of noise intensity D

3 双参数分岔

永磁同步电动机系统在运行过程中可能会受到随机因素的干扰,这些干扰可能导致两个甚至多个参数同时发生变化.所以对系统(3)在双参数空间中研究分岔结构更具有参考意义.本节保持参数值不变,采用四阶随机 Runge-Kutta 算法进行数值模拟,用 500×500 相同距离点覆盖,如图 4 所示.图中的图例颜色栏标记了不同数字,代表不同的振荡状态,左图图例表示周期数,右图图例表示 Lyapunov 指数.另外,在图 4(a)和 4(b)的左图中,白色区域表示周期数大于 19 的周期振荡状态或混沌状态.



(a) $\sigma \in [10, 30], U_d \in [-5, 80]$

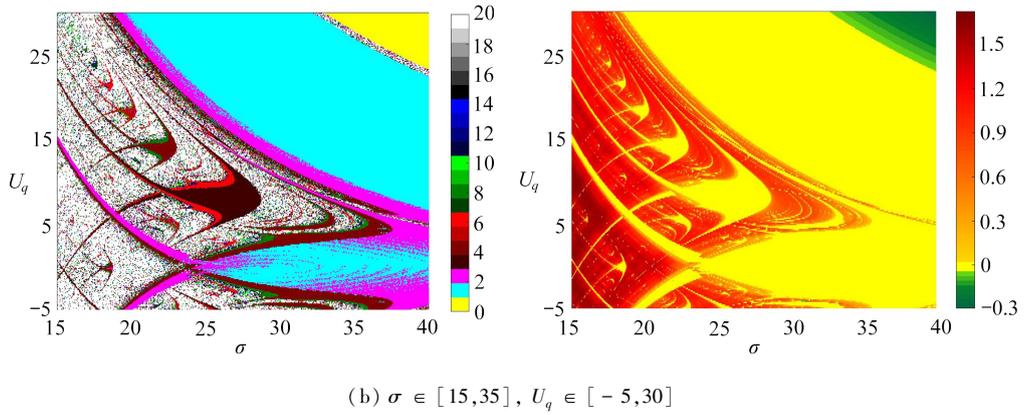
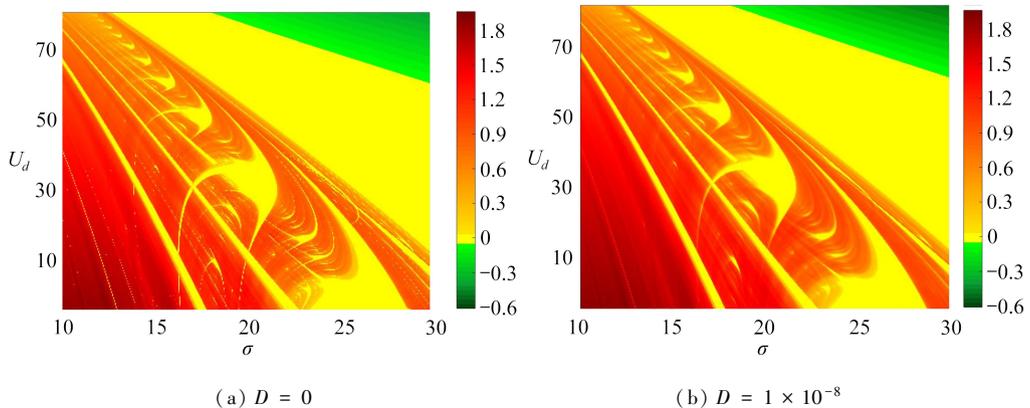


图4 不同参数平面上的分岔图(左)和 Lyapunov 指数图(右)

Fig. 4 The bifurcation diagram (left) and the Lyapunov exponent diagram (right) in planes with different parameters

图4(a)左图为系统(3)变量 x 在参数 $\sigma \in [10, 30]$, $U_d \in [-5, 80]$ 平面上的分岔图, 如图所示右上方黄色区域为稳定态区域, 首先通过 Hopf 分岔生成 1 周期吸引子, 并由倍周期分岔进入广泛的白色振荡区域. 由于仿真精度所限, 无法确定该振荡区域是拟周期振荡态或是混沌态, 我们的思路是计算对应的最大 Lyapunov 指数值^[23]. 图4(a)右图为左图分岔结构对应的最大 Lyapunov 指数, 其中绿色区域为最大 Lyapunov 指数值远小于零的稳定态, 黄色区域表示最大 Lyapunov 指数值在区间 $[-0.001, 0.001]$ 周期振荡状态, 红色区域为混沌态. 对图4(a)综合分析, 在参数平面上右上方稳定态经倍周期分岔最终进入混沌状态, 值得关注的是, 混沌区域内镶嵌了一些“鱼”形周期区域, 且它们呈分形结构. 参数 $\sigma \in [15, 35]$, $U_d \in [-5, 30]$ 平面上系统分岔图与其最大 Lyapunov 指数图见图4(b). 周期振荡区域通过倍周期分岔方式进入混沌区域, 类似地, 混沌区域镶嵌着很多“鱼”形周期区域.

我们接下来讨论噪声激励对分岔的影响, 参数 $\sigma \in [10, 30]$, $U_d \in [-5, 80]$ 平面上不同噪声强度 D 下的最大 Lyapunov 指数图见图5. 图5(a)、5(b)分别为噪声强度 $D = 0$ 和 $D = 10^{-8}$ 时的情形. 对比两图可以看出, 最大 Lyapunov 指数的值没有发生显著改变, 则系统对低强度白噪声具有一定的抗干扰性. 如图5(c)所示, 当噪声强度为 $D = 10^{-6}$ 时, “鱼”形周期区域受到侵蚀尾部演变为混沌态, 有趣的是, “鱼”形结构的头部却保持原本特征, 这说明“鱼”形结构不同区域鲁棒性也有差异. 如图5(d)所示, 当噪声强度为 $D = 10^{-4}$ 时, 这种演化趋势更加明显, “鱼”形周期区域几乎完全变为混沌态. 此外, 对比观察图5发现, 大范围黄色“带状”周期振荡区域并未发生明显收缩, 这说明在不同周期振荡区域, 抗干扰性也不同. 值得注意的是, 图5(d)中部分黄色周期振荡区域变为绿色收敛状态, 这也说明了噪声对系统影响的两面性. 它不仅破坏“鱼”形周期振荡区域, 使其混沌态, 还可以使周期振荡区域转变为收敛态. 从上面的分析可以看出, 噪声对系统的周期振荡区域有显著的影响, 但通过优化参数也可诱导周期振荡区域产生收敛振荡行为.



(a) $D = 0$

(b) $D = 1 \times 10^{-8}$

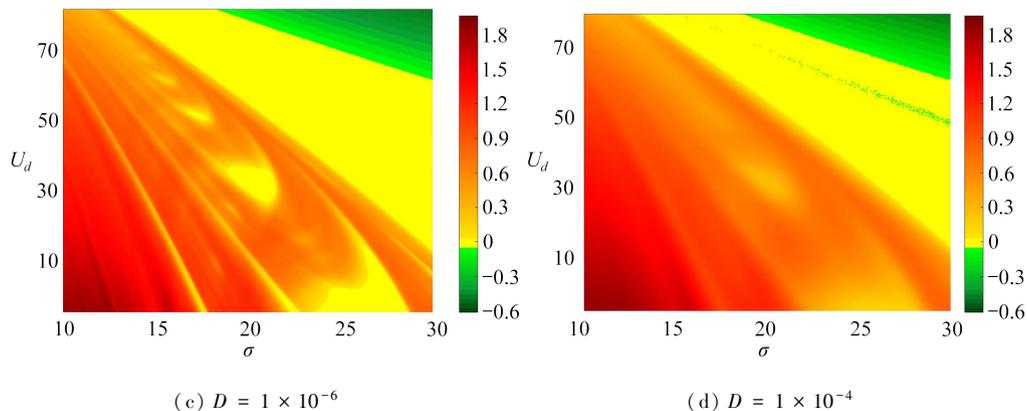
图 5 随噪声强度 D 变化的最大 Lyapunov 指数图

Fig. 5 The largest Lyapunov exponent diagram with the change of the noise intensity

4 结 论

本文研究了永磁同步电动机系统在 Gauss 白噪声扰动下的分岔问题,根据数值模拟结果,随着噪声强度 D 的不断增大,联合概率密度函数由单峰状变为火山口形状,即系统发生 P-分岔.同时平稳概率密度函数顶点降低坡度变缓,这也说明系统稳定性的改变.对永磁同步电机系统进一步研究发现:它在双参数空间中具有分形结构的“鱼”形周期区域,大量数值模拟结果证实了白噪声强度对该周期区域的边界具有更强的侵蚀作用.值得注意的是,大范围黄色“带”状的周期区域对白噪声却表现为很强的鲁棒性,特别地,白噪声能够诱导周期振荡使其产生收敛的振荡行为.此外,这些研究方法可以直接应用到白噪声对其他系统的相关研究中,以便其与本文所得出的结论进行对比.

参考文献 (References):

- [1] HEMATI N, LEU M C. A complete model characterization of brushless DC motors[J]. *IEEE Transactions on Industry Application*, 1992, **28**(1): 172-180.
- [2] HEMATI N. Strange attractors in brushless DC motor[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 1994, **41**(1): 40-45.
- [3] LI Z, PARK J B, ZHU Y, et al. Bifurcations and chaos in a permanent-magnet synchronous motor[J]. *IEEE Transactions on Circuits and systems I*, 2002, **49**(3): 383-387.
- [4] LI Z, ZHANG B, MAO Z, et al. Bifurcation analysis of the permanent-magnet synchronous motors models based on the center manifold theorem[J]. *Control Theory and Application*, 2000, **17**(3): 317-320.
- [5] 唐传胜, 戴跃洪. 参数不确定永磁同步电动机混沌系统的有限时间稳定控制[J]. 物理学报, 2013, **62**(18): 68-73. (TANG Chuansheng, DAI Yuehong. Finite-time stability control of permanent magnet synchronous motor chaotic system with parameters uncertain[J]. *Acta Physica Sinica*, 2013, **62**(18): 68-73. (in Chinese))
- [6] 王碧轩. 永磁同步电机的非线性动力学特征研究及其混沌控制[D]. 硕士学位论文. 兰州: 兰州交通大学, 2015. (WANG Bixuan. Nonlinear dynamics and chaos control of the permanent-magnet synchronous motor[D]. Master Thesis. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2015. (in Chinese))
- [7] RAO X, CHU Y, CHANG Y, et al. Dynamics of a cracked rotor system with oil-film force in parameter space [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, **88**: 2347-2357.
- [8] RAO X, CHU Y, CHANG Y, et al. Broken Farey tree and fractal in a hexagonal centrifugal governor with a spring[J]. *Chaos, Solit and Fractals*, 2018, **107**: 251-255.
- [9] MA C, WANG L, YIN Z, et al. Sliding mode control of chaos in the noise-perturbed Permanent magnet synchronous motor with non-smooth air-gap [J]. *International Journal of Mining Science and Technology*, 2011, **21**(6): 835-838.
- [10] 杨黎晖, 葛扬, 马西奎. 永磁同步风力发电机随机分岔现象的全局分析[J]. 物理学报, 2017, **66**(19): 8-18.

- (YANG Lihui, GE Yang, MA Xikui. Global analysis of stochastic bifurcation in permanent magnet synchronous generator for wind turbine system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2017, **66**(19): 8-18. (in Chinese))
- [11] XU P, JIN Y. Stochastic resonance in multi-stable coupled systems driven by two driving signals[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2018, **492**: 1281-1289.
- [12] HE M, WEI X, SUN Z, et al. Characterization of stochastic resonance in a bistable system with Poisson white noise using statistical complexity measures[J]. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2015, **28**(1/3): 39-49.
- [13] JIAO S, JIANG W, LEI S, et al. Research on detection method of multi-frequency weak signal based on stochastic resonance and chaos characteristics of Duffing system[J]. *Chinese Journal of Physics*, 2020, **64**: 333-347.
- [14] 陈乾君, 蒋媛, 刘子建, 等. 具有 Gilpin-Ayala 增长的随机捕食-食饵模型的动力学行为[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(4): 453-468. (CHEN Qianjun, JIANG Yuan, LIU Zijian, et al. Dynamic behavior of a stochastic predator-prey model with the Gilpin-Ayala growth[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(4): 453-468. (in Chinese))
- [15] 曹晓春, 荆文君, 靳祯. 基于白噪声的网络传染病模型动力学分析[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(6): 690-699. (CAO Xiaochun, JING Wenjun, JIN Zhen. Dynamic analysis of the network epidemic model based on white noise[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(6): 690-699. (in Chinese))
- [16] ZHANG J, CHU Y. The invariant measure and stationary probability density computing model based analysis of the governor system[J]. *Cluster Computing*, 2017, **20**(2): 1437-1447.
- [17] ZHANG J, LIANG X, QIAO S, et al. Stochastic stability and bifurcation of centrifugal governor system subject to color noise[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2021, **32**(5): 2250061.
- [18] 张美娇, 张建刚, 南梦冉, 等. 色噪声激励下水轮机调节系统的分岔[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2021, **56**(12): 94-99. (ZHANG Meijiao, ZHANG Jiangang, NAN Mengran, et al. Bifurcation of hydraulic turbine governing system under color noise excitation[J]. *Journal of Shandong University (Science Edition)*, 2021, **56**(12): 94-99. (in Chinese))
- [19] 张祥云, 吴志强. 噪声激励下水平扫视眼动系统的随机分岔[J]. *应用数学和力学*, 2017, **38**(1): 126-132. (ZHANG Xiangyun, WU Zhiqiang. Stochastic bifurcation in the saccadic system driven by noise[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(1): 126-132. (in Chinese))
- [20] 宋志环. 永磁同步电动机电磁振动噪声源识别技术的研究[D]. 博士学位论文. 沈阳: 沈阳工业大学, 2010. (SONG Zhihuan. Research on recognition of electromagnetic noise and vibration of the permanent magnet synchronous machine[D]. PhD Thesis. Shenyang: Shenyang University of Technology, 2010. (in Chinese))
- [21] 白宝丽, 张建刚, 杜文举, 等. 一类随机的 SIR 流行病模型的动力学分析[J]. *山东大学学报(理学版)*, 2017, **56**(4): 72-82. (BAI Baoli, ZHANG Jiangang, DU Wenju, et al. Dynamic behavior analysis of a stochastic SIR epidemic model[J]. *Journal of Shandong University (Science Edition)*, 2017, **56**(4): 72-82. (in Chinese))
- [22] 顾凤蛟, 高燕, 任丽佳, 等. 基于 Lévy 噪声的混合时滞中立型神经网络自适应同步研究[J]. *应用数学和力学*, 2020, **41**(11): 1259-1274. (GU Fengjiao, GAO Yan, REN Lijia, et al. Adaptive synchronization of neutral networks with mixed delays and Lévy noises[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(11): 1259-1274. (in Chinese))
- [23] WOLF A, SWIFT J B, SWINNEY H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1985, **16**(3): 285-317.