

低 Weissenberg 数黏弹性流体中 单气泡上浮运动特性研究*

张仕环¹, 庞明军¹, 郑智颖²

(1. 常州大学 机械与轨道交通学院, 江苏 常州 213164;
2. 哈尔滨工业大学 能源科学与工程学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 使用 VOF 法数值研究了气泡在黏弹性流体中的上浮运动, 黏弹性模型选用 Oldroyd-B 模型. 在低 Weissenberg 数 (Wi) 下, 研究了黏性力、松弛时间、表面张力和黏度比对气泡上浮运动的影响. 结果表明, 当黏性力和弹性力较大 (如 $Ga = 2, Wi \geq 0.5$ 和 $\beta = 0.2$) 时, 气泡尾部会出现“尾缘尖”现象, “尾缘尖”现象随着弹性的增强和表面张力的减小变得明显; 当弹性较弱 (如 $Wi = 0.1$) 时, “尾缘尖”现象消失, 气泡呈为帽形; 当表面张力较大 (如 $Eo = 1$) 时, 气泡呈现为纵向拉长的椭圆形, 尾部特征不明显; 在黏弹性流体中, 表面张力对气泡的影响与在黏性流体中的相似; 气泡在上浮过程中, 随形状的变化, 表现出“持续加速到稳定”和“加速-减速-再加速到稳定”两种上浮形式, 在黏弹性流体中, 气泡的上浮速度高于在纯黏性流体中的上浮速度; 气泡周围的弹性应力与流体的黏度和松弛时间有关, 随着黏度的减小和松弛时间的增大, 弹性应力作用范围变宽.

关键词: 黏弹性流体; 气泡上浮运动; Oldroyd-B 模型; VOF 法

中图分类号: O35 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430328

Study on Hydrodynamics Characteristics of a Single Bubble in Viscoelastic Fluid at Low Weissenberg Numbers

ZHANG Shihuan¹, PANG Mingjun¹, ZHENG Zhiying²

(1. School of Mechanical Engineering and Rail Transit, Changzhou University,
Changzhou, Jiangsu 213164, P.R.China;

2. School of Energy Science and Engineering, Harbin Institute of Technology,
Harbin 150001, P.R.China)

Abstract: The VOF method was used to numerically study the upward motion of a single bubble in viscoelastic fluid, and the Oldroyd-B model was applied to describe the fluid viscoelastic property. At low Weissenberg numbers ($Wi \leq 1$), the effects of the viscous force, the relaxation time, the surface tension and the viscosity ratio on the rising motion of the bubble were studied. The results show that, under relatively large viscous and elastic forces (such as $Ga = 2, Wi \geq 0.5$ and $\beta = 0.2$), the bubble exhibits the phenomenon of “a pointed rear

* 收稿日期: 2022-10-18; 修订日期: 2022-12-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(51376026;51806051)

作者简介: 张仕环(1999—),男,硕士生(E-mail: zhangshihuan99@foxmail.com);

庞明军(1976—),男,教授,硕士生导师(通讯作者. E-mail: pangmj@cczu.edu.cn);

郑智颖(1988—),男,副研究员,硕士生导师(E-mail: zhengzhy@hit.edu.cn).

引用格式: 张仕环, 庞明军, 郑智颖. 低 Weissenberg 数黏弹性流体中单气泡上浮运动特性研究[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(6): 629-642.

end”, and this phenomenon intensifies with the increase of the elasticity and the decrease of the surface tension. Otherwise, under a relatively weak elasticity (such as $Wi=0.1$), the phenomenon of “a pointed rear end” disappears, and the bubble bears a hat-like shape. For a large surface tension (such as $EO=1$), the bubble bears a longitudinally elongated ellipse-like shape without distinct tail features. The effect of the surface tension on the bubble in viscoelastic fluid is like that in viscous fluid. The bubble has 2 types of rising motions, namely, “continuous acceleration” to a stable velocity and “acceleration-deceleration-reacceleration” to a stable velocity, and the bubble rising velocity in viscoelastic fluid is higher than that in pure viscous fluid. The elastic stress around the bubble is influenced by the viscosity and the relaxation time of the fluid, and with the decrease of the fluid viscosity or/and the increase of the relaxation time, the incidence of the elastic stress becomes wide.

Key words: viscoelastic fluid; bubble rising motion; Oldroyd-B model; VOF method

0 引 言

气液两相流广泛存在于自然界和工业过程中,如血液中的气泡运动^[1],石油输送过程和鼓泡塔内的气泡上浮运动等^[2].气泡的存在会对液相的运动、传热传质和表观黏度等特性产生显著的影响^[3].因此,研究液相中气泡的运动特性对工农业生产和日常生活具有重要意义.工业过程涉及的液相多为非 Newton 流体,而黏弹性流体又是一种典型的非 Newton 流体,因此研究黏弹性流体中的气泡运动特性意义重大.

为了理解气泡在非 Newton 流体中的水动力学特性,前人已经开展了大量的研究^[4-19],但关于气泡在黏弹性流体中水动力学特性的研究相对较少.特别是国内学者仅开展了为数不多的实验研究^[20-22],理论和数值研究鲜见报道.国外学者 Astarita 和 Apuzzo^[23]开创性的实验发现,在黏弹性流体中,当气泡体积大到一定程度时,其上浮速度会突然增大(所谓的“速度不连续性阶跃”),气泡形状呈现为倒置的泪滴状.Hassager^[24]实验发现气泡在黏弹性流体内上浮时,其中心尾迹出现了向下流动(即“负尾迹”)的现象,与钢球在黏弹性流体中下沉时的流线形状相似^[25].此后,一些学者实验再现了黏弹性流体中气泡上浮的典型特征^[26-30].

在数值研究方面,Wagner 等^[31]使用格子 Boltzmann 方法研究了黏弹性流体中二维气泡的上浮运动,再现了实验中发现的带尖尾部.Pillapakkam 等^[32]使用水平集方法(level set method),研究了三维气泡在黏弹性 Oldroyd-B 液体中的上浮运动,再现了上浮速度不连续阶跃的现象.Fraggedakis 等^[33]基于 Phan-Thien Tanner (PTT)黏弹性模型,使用任意 Lagrange-Euler 法很好地预测了在达到临界体积时气泡速度突然增加的现象.然而,随着研究者们对强弹性流体的数值计算遇到了数值问题,即高 Weissenberg 数问题(the high Weissenberg number problem, HWNP),为了解决该问题众多学者进行了深入的研究^[34-36].Yuan 等^[37]在对构象张量进行对数化处理后,使用流体体积(VOF)法研究了高 Weissenberg 数下气泡在黏弹性流体中的上浮运动特性.Ohta 等^[38]基于剪切稀化 Carreau 模型和 FENE-CR 黏弹性模型考虑流体的剪切稀化和黏弹性特征,使用水平集和流体体积耦合方法(CLVOF)研究了具有剪切稀化特征黏弹性流体中气泡的上浮运动.

综上所述,尽管国内外学者针对黏弹性流体中气泡的上浮运动特性开展了一定的研究,并得到了一些有价值的结论,但相关现象的机理解释仍难以定论.再加上黏弹性流体自身的复杂特性,研究难度相对较大,国内关于这方面的理论和数值研究鲜见报道.特别是当 Weissenberg 数太大时,开展黏弹性流体的数值计算会遇到“高 Weissenberg 数问题”,即构象张量分量呈指数增长会导致计算的不稳定性.在实际工业应用中,也经常会遇到弹性较弱(Weissenberg 数较小)的黏性流体,比如低分子量(短链)或低浓度的聚合物溶液.为了理解气泡在黏弹性流体中的上浮运动特性,使用数值模拟方法尝试研究了低 Weissenberg 数下松弛时间、黏性力、表面张力和黏度比对气泡上浮运动特性的影响,详细分析了气泡形状、上浮速度、尾涡和弹性应力的分布特征,为后续深入研究奠定基础.

1 物理问题和计算模型

1.1 几何模型

目前公开发表的数值研究气泡在 Oldroyd-B 黏弹性流体运动的文献中^[32,37],气泡形状基本是左右对称的(除了非稳态工况外),且影响气泡形状的因素基本位于气泡轮廓平面内.本文通过研究低 Weissenberg 数

下,黏性力、松弛时间、表面张力和黏度比对气泡形状的影响来反应气泡上浮时的运动特性,所以将计算域简化为二维平面时,气泡的形状基本不会受到太大影响。尽管对于二维平面假设,圆形气泡不是真实的球形气泡而是一个圆柱体,导致气泡尾流和上升阻力存在一定的偏差,但总体上二维平面计算能定性地反映一定的流动特征^[39-41]。而且目前的计算是在低 Weissenberg 数下进行的,气泡上浮速度相对较小,在一定程度上能将流动失真降低到可接受范围内。另外,目前二维的计算结果,比如气泡形状、速度以及流场信息与文献基本吻合^[37]。所以目前二维计算的假设是合理的,既能极大地减小计算成本,又能较全面地研究不同参数对气泡在黏弹性流体中上浮运动的影响。

计算区域设置为一矩形区域,如图 1 所示。矩形区域内充满黏弹性流体,初始半径 $R = 2.5 \text{ mm}$ 的圆形气泡受浮力作用从底部自由上浮。为了消除壁面的影响,以及能使气泡运动取得充分发展,矩形区域的高和宽分别取 $H = 90R$ 和 $W = 30R$,目前计算区域的尺寸远大于文献^[37]的尺寸。气泡距底壁的距离为 $h = 5R$,以消除底部壁面对气泡初始运动的影响。

1.2 控制方程

目前的计算是在层流、恒温且气液两相均不可压缩的前提下进行的,流体的控制方程有连续性方程和动量方程,具体如下:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{D}^s + \nabla \cdot \mathbf{D}^p + \mathbf{F}_s + \rho \mathbf{g}, \quad (2)$$

式中 \mathbf{u} 为速度 (m/s), p 为压力 (Pa), ρ 为流体平均密度 (kg/m^3), t 为时间 (s), \mathbf{D}^s 为黏性应力张量, \mathbf{D}^p 为弹性应力张量, \mathbf{F}_s 为表面张力源项, \mathbf{g} 为重力加速度 (m/s^2)。 \mathbf{D}^s 和 \mathbf{D}^p 的表达式如下:

$$D_{ij}^s = \tau_{ij}^s = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (3)$$

$$D_{ij}^p = \tau_{ij}^p = \frac{\mu_p}{\lambda} [f(r) C_{ij} - \delta_{ij}], \quad (4)$$

式中 μ 为流体平均黏度 ($\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$), μ_p 为聚合物的黏度 ($\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$), C_{ij} 为柔性高分子聚合物或表面活性剂分子的构象张量, x_i 为坐标 (m), λ 为聚合物松弛时间 (s), δ_{ij} 为 Kronecker 符号 ($i = j$ 时值为 1, 否则值为 0), $f(r)$ 为 Peterlin 函数, 即

$$f(r) = \frac{L^2 - 3}{L^2 - r^2}, \quad (5)$$

$$r = \sqrt{\text{tr} \mathbf{C}}, \quad (6)$$

式中 L 为聚合物分子拉伸长度与平衡长度之比, r 为聚合物分子的理想长度。

构象张量 C_{ij} 的输运方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial C_{ij}}{\partial x_k} = & C_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + C_{kj} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_k} \right) - \\ & \frac{1}{\lambda} [\alpha f(r) C_{ik} C_{kj} + (1 - \alpha) f(r) \delta_{ik} C_{kj} - \alpha C_{ik} C_{kj} - (1 - \alpha) \delta_{ij}]. \end{aligned} \quad (7)$$

方程(7)等号右边 $C_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + C_{kj} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ 为瞬时流动畸变项; $k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_k} \right)$ 为人工黏性项,防止计算发散, k 为人工黏性项系数。使用 Oldroyd-B 黏弹性模型计算弹性应力,该模型是众多非线性黏弹性模型的基础,被广泛应

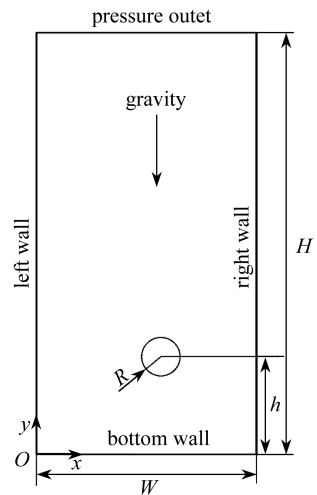


图 1 计算模型

Fig. 1 The computation model

用于黏弹性流体中气泡上浮运动的模拟^[32,37]。对于 Oldroyd-B 模型, $\alpha = 0$, $f(r) = 1$, 则方程(7)简化为

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial C_{ij}}{\partial x_k} = C_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + C_{kj} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{\lambda} (\delta_{ik} C_{kj} - \delta_{ij}) . \quad (8)$$

1.3 界面捕捉方法

使用 VOF 法捕捉气液相间的界面, VOF 法适用于两种或多种互不相容的流体, 通过引入一个或多个体积分数变量来区分各相, 在每个控制体中, 所有相的体积分数之和为 1. 当计算区域的位置与体积分数已知时, 流体的热物性参数表示为所有相的体积平均值. 流场中相分布可以用相函数 F 表示, 其被定义如下:

$$\begin{cases} F = 1, & \text{liquid phase,} \\ 0 < F < 1, & \text{mixed phase,} \\ F = 0, & \text{gas phase.} \end{cases} \quad (9)$$

流体平均密度 ρ 和黏度 μ 均是气液相的体积分数平均值, 即

$$\rho = \rho_L(F) + \rho_G(1 - F), \quad (10)$$

$$\mu = \mu_L(F) + \mu_G(1 - F), \quad (11)$$

式中 ρ_L 为液相的密度 (kg/m^3), ρ_G 为气相的密度 (kg/m^3), $\mu_L (= \mu_s + \mu_p)$ 为液相的黏度 ($\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$), μ_G 为气相的黏度 ($\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$), μ_s 为溶剂的黏度 ($\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$), μ_p 为聚合物的黏度 ($\text{kg}/(\text{m}\cdot\text{s})$).

VOF 法通过求解体积分数 (或相函数) 输运方程来跟踪界面, 方程如下:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0. \quad (12)$$

界面采用 Youngs^[42] 提出的分段线性法 (PLIC) 进行重构, 重构后的界面不是连续的. 因此为了保证计算精度, 对网格大小有严格的要求.

1.4 表面张力模型

表面张力采用 Brackbill 等^[43] 提出的连续表面力模型 (CSF) 计算, 气泡表面的力可以用散度定理表示为体积力, 将体积力作为源项加入动量方程(2)中, 源项 \mathbf{F}_s 表示为

$$\mathbf{F}_s = \sigma k_s \delta \hat{\mathbf{n}}, \quad (13)$$

式中 σ 为表面张力系数 (N/m), δ 为 Dirac 分布函数, k_s 为界面曲率, $\hat{\mathbf{n}}$ 为界面外指的单位法向量. k_s 和 $\hat{\mathbf{n}}$ 分别定义为

$$k_s = -\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}, \quad \mathbf{n} = \nabla F. \quad (14)$$

1.5 边界条件和数值方法

在图 1 所示的矩形计算区域中, 上壁面设置为压力出口边界条件, 左、右和下壁面均设置为无滑移壁面. 由于结构化网格具有网格质量好、数据结构简单且容易实现区域边界拟合等优点, 所以采用结构化网格对整个计算区域进行网格均匀划分. 梯度项使用基于网格中心的最小二乘法进行离散; 动量方程采用二阶迎风格式进行离散; 压力项采用 PRESTO! (pressure staggering option) 方法离散; 体积分数采用几何重构法求解. 时间上的推进采用一阶隐式格式, 压力和速度场的耦合选用 SIMPLE 算法. 当气泡形状和上浮速度基本不随时间变化时, 计算视为收敛. 所有参数设置完成后进行混合初始化, 然后在计算域中加入气泡, 开始两相流的计算.

1.6 计算条件和工况设置

为了研究气泡在黏弹性流体中的上浮特性, 控制液气密度比为 $\rho_L/\rho_G = 1\ 000$ 和液气黏度比为 $\mu_L/\mu_G = 100$, 分别研究了 Galileo 数 (Ga)、Weissenberg 数 (Wi)、Eotvos 数 (EO) 和黏度比 (β) 对气泡运动的影响. Wi 表征聚合物松弛时间与对流时间尺度的比值, Ga 表征重力与黏性力的比值, EO 表征重力与表面张力的比值, β 是溶剂和溶液的黏度比, 分别定义如下:

$$Ga = \frac{\rho_L U_g R}{\mu_L}, \quad Wi = \frac{\lambda U_g}{R}, \quad EO = \frac{\rho_L g R^2}{\sigma}, \quad \beta = \frac{\mu_s}{\mu_s + \mu_p}, \quad (15)$$

其中 $U_g = \sqrt{gR}$. 在保证重力水平、密度和气泡半径不变的前提下, 通过改变松弛时间 λ 、表面张力系数 σ 以

及溶剂(μ_s)和溶质(μ_p)的黏度来改变无量纲数,具体计算工况见表 1。

表 1 计算工况

Table 1 Design of the computation case

Wi	β	$Ga = 2$			$Ga = 4$			$Ga = 8$			$Ga = 16$		
		$EO = 1$	$EO = 10$	$EO = 100$	$EO = 1$	$EO = 10$	$EO = 100$	$EO = 1$	$EO = 10$	$EO = 100$	$EO = 1$	$EO = 10$	$EO = 100$
0.1	0.2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	0.5		✓			✓			✓			✓	
	0.8		✓			✓			✓			✓	
0.5	0.2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	0.5		✓			✓			✓			✓	
	0.8		✓			✓			✓			✓	
1	0.2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	0.5		✓			✓			✓			✓	
	0.8		✓			✓			✓			✓	

2 结果分析和讨论

2.1 网格尺寸与时间步长的确定

为了消除网格尺寸和时间步长对计算结果的影响,需对网格尺寸和时间步长进行结果无关性验证.本文按顺序设计了 4 套网格(0.3 mm,0.25 mm,0.2 mm 和 0.15 mm)和 4 个时间步长(0.001 s,0.000 75 s,0.000 5 s 和 0.000 25 s),在气泡变形较大的工况($Ga = 1.95, EO = 1, Wi = 1$ 和 $\beta = 0.5$)下进行了验证计算.图 2 和图 3 给出了气泡上浮速度和中心高度随网格尺寸和时间步长的变化,计算结果用气泡最大上浮速度和最大中心高度进行了无量纲化,时间采用无量纲时间 $t^* = t\sqrt{g/R}$.从图中可以看出,随着网格尺寸和时间步长的减小,计算结果基本不再变化;网格尺寸为 0.2 mm 时,气泡的上浮速度和中心高度与网格大小为 0.15 mm 的非常接近;时间步长为 0.000 5 s 时,气泡的上浮速度和中心高度与时间步长为 0.000 25 s 时非常接近.为了节约计算成本,最终选取网格尺寸为 0.2 mm(此时气泡被划分了 486 个网格,网格尺寸约等于 $D/25$),时间步长为 0.000 5 s 进行所有工况的计算。

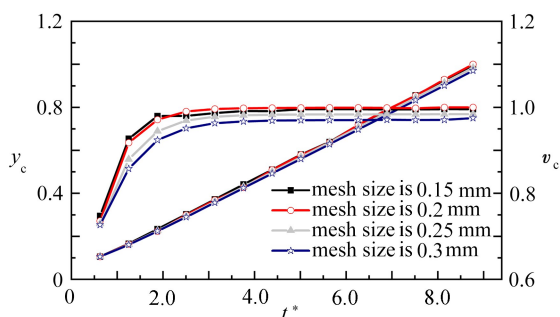


图 2 网格大小对气泡中心高度和上浮速度的影响
Fig. 2 Effects of the grid size on the bubble center height and the center velocity

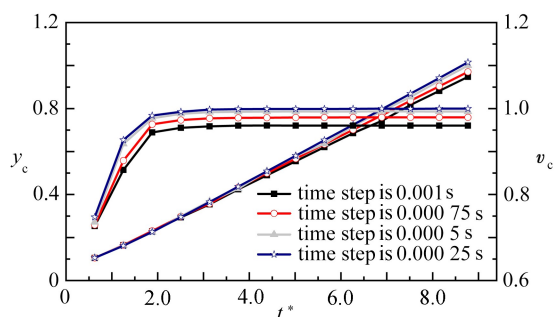


图 3 时间步长对气泡中心高度和上浮速度的影响
Fig. 3 Effects of the time step on the bubble center height and the center velocity

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

2.2 结果可靠性验证

为了确保计算的可靠性,本文将参数为 $Ga = 1.95, EO = 1, Wi = 1$ 和 $\beta = 0.8$ 时的计算结果与文献[37]的结果进行了对比.图 4(左侧为当前结果,右侧为文献[37]结果)对比了气泡的形状,可以看出气泡形状高度吻合.图 5 对比了气泡的上浮速度,时间和速度按照文献[37]进行了无量纲化处理($t^* = t/(R/U_g)$ 和 $v^* = v/U_g$).从图中看出,气泡稳定后的上浮速度分布基本一致,加速阶段存在轻微的差异,或许是因以下原因造成的:① 本文使用的是二维模型,文献使用的是三维模型;② 文献对构象张量进行了对数化处理以处理高

Weissenberg 数带来的数值问题.总而言之,目前的计算方法是可信的,可以开展目前的研究工作.

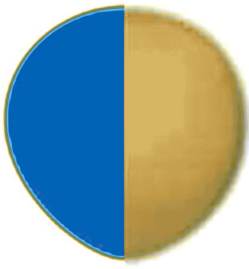


图4 气泡形状对比

Fig. 4 Comparison of bubble shapes

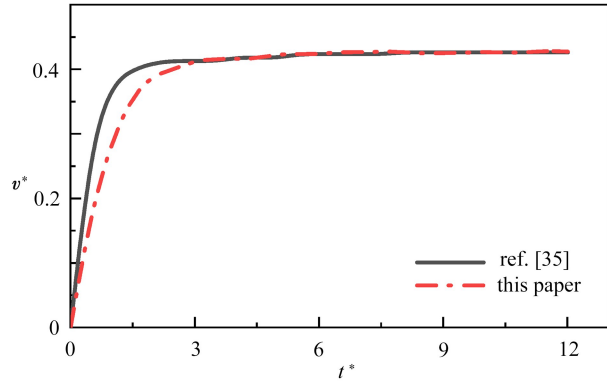


图5 气泡上浮速度对比

Fig. 5 Comparison of bubble center velocities

2.3 气泡变形分析

气泡形状会直接影响周围液相流场的分布,进而对相间的传质传热效率产生影响.为此,首先分析了各参数对黏弹性流体中上浮气泡形状的影响.图6给出了黏度比 $\beta = 0.2$ 时,气泡上浮运动稳定后的形状.对应不同的参数,气泡呈现为圆形、椭圆形、帽形(破碎和未破碎)、倒置泪滴状以及其他不规则形状.随着 Ga 数的增大,气泡从圆形向帽形转变,并逐渐趋于扁平状.当 $Ga = 2$,在低 Wi 数和低 Eo 数时,气泡保持为圆形;当 Eo 数增大时,由于表面张力的减小,气泡底部受向上射流的影响发生了轻微的上凹;当 $Wi \geq 0.5$ 时,气泡在低 Eo 数下,圆形气泡底部在弹性力的拉伸作用下变长,随着 Eo 数的变大,气泡下部形成一个带尖的尾部(所谓的“尾缘尖”),最终呈现为倒置的泪滴状.当 $Ga = 4$ 时,气泡形状总体变得扁平(与 $Ga = 2$ 时相比),而且高 Wi 数下的“尾缘尖”现象消失;在较大 Eo 数下,出现了帽形气泡.随着 Ga 数的进一步增大,当 $Ga = 8$ 时,气泡变得更加扁平;且在 $Eo = 100$ 时,气泡底部出现了破碎现象,形成了许多卫星气泡.当 $Ga = 16$,在 $Eo = 1$ 时,出现了非稳态气泡,气泡呈不规则形状,上浮路径为“之”字形;随着 Eo 数的增大,气泡破碎加剧. Wi 数的大小表征了液体黏性和弹性的相对强弱.对于目前的研究,当 $Wi = 0.1$ 时,液相的弹性相对较弱,气泡变形与在纯黏液体中的变形相似.随着 Wi 数的增大,液相的弹性增强,因此气泡受液相弹性应力的影响变得明显,当 $Ga = 2$ 时,气泡形状呈现出尾缘尖特征.随着 Eo 数的增大,即表面张力的减小,气泡保持原有形状的能力变弱,气泡形状从椭圆形向尾部破碎的帽形转变.

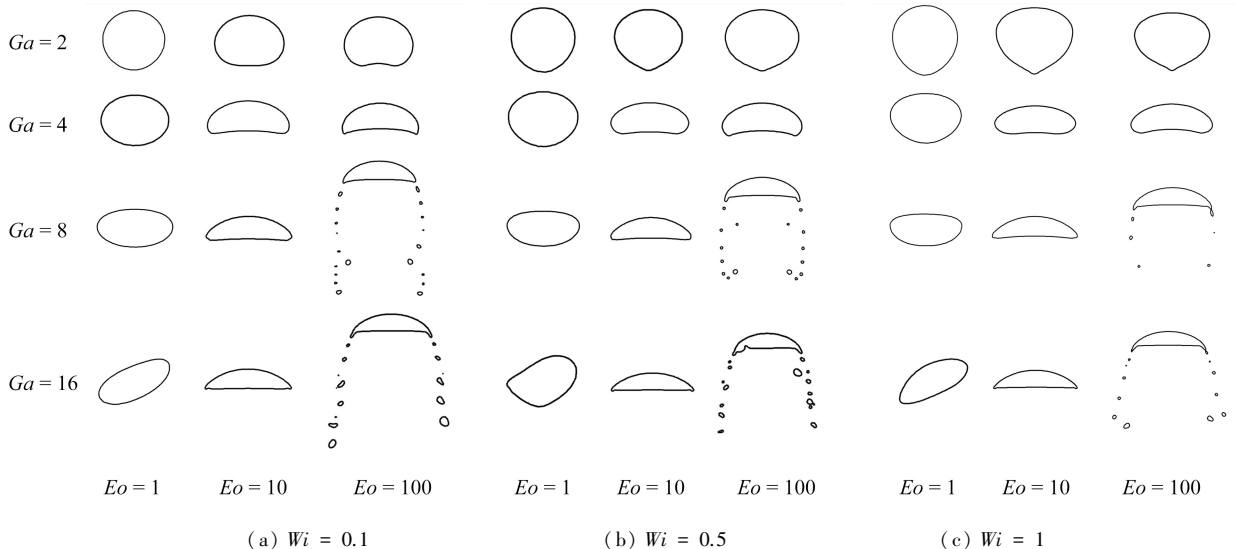


图6 $\beta = 0.2$ 时,气泡形状随 Ga 数, Wi 数和 Eo 数的变化

Fig. 6 Bubble shapes against Ga , Wi and Eo numbers at $\beta = 0.2$

为了理解黏度比对气泡形状的影响,图 7 给出了 $Eo = 10$ 时,黏度比 $\beta = 0.2, 0.5, 0.8$ 下,气泡形状随 Ga 数和 Wi 数的变化.结合图 6 可以看出,随着黏度比 β 的增大,原本出现“尾缘尖”的工况,气泡变形为帽形.这是因为随着黏度比 β 的增大,聚合物的黏度变小,液相的弹性变弱而黏性增强,即液相施加在气泡上的黏性力变大而弹性力变小.所以气泡变形与小 Wi 数的工况相似,类似于在纯黏流体中的变形.

为了理解气泡在黏弹性流体中出现的“尾缘尖”现象,给出聚合分子与气泡作用示意图(图 8).气泡受浮力作用向上运动时,由于黏性的影响会拖动气泡周围的液体一起向上运动,表征液相弹性的聚合物分子会受到拉伸.当聚合物分子被拉伸到一定程度时,会恢复至平衡态(类似于弹簧),这时液相中会产生一个与气泡运动相反的力,也就是所谓的弹性应力.当弹性应力足够大时,会通过黏性作用将力施加到气泡表面上,该力最终作用在气泡底部正中间,所以该区域受拉力的作用变形最明显,形成“尾缘尖”.

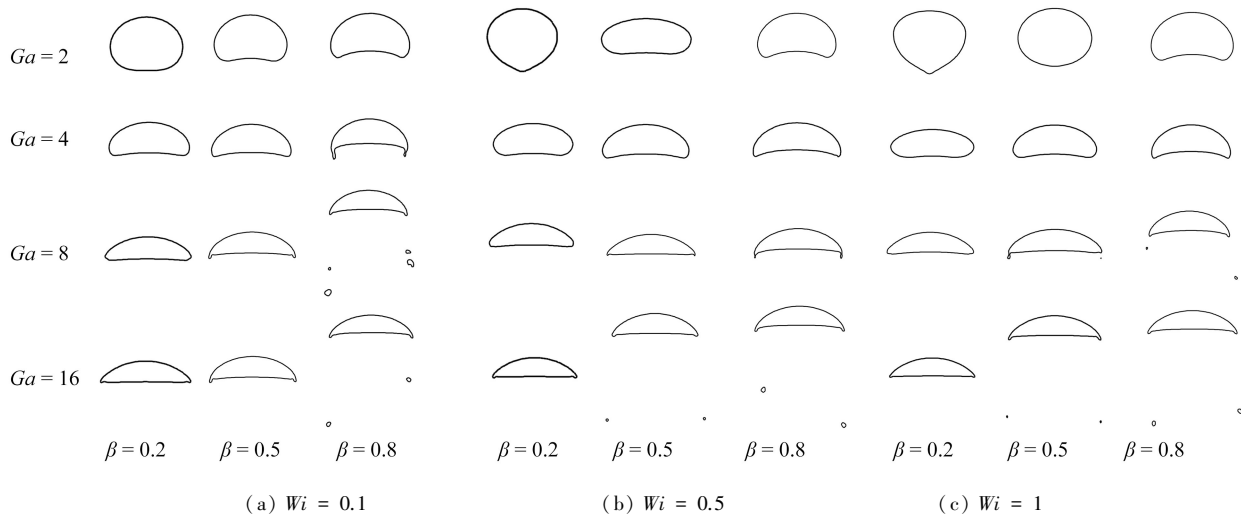


图 7 $Eo = 10$ 时,气泡形状随 β, Ga 数和 Wi 数的变化

Fig. 7 Bubble shapes against β, Ga and Wi numbers at $Eo = 10$

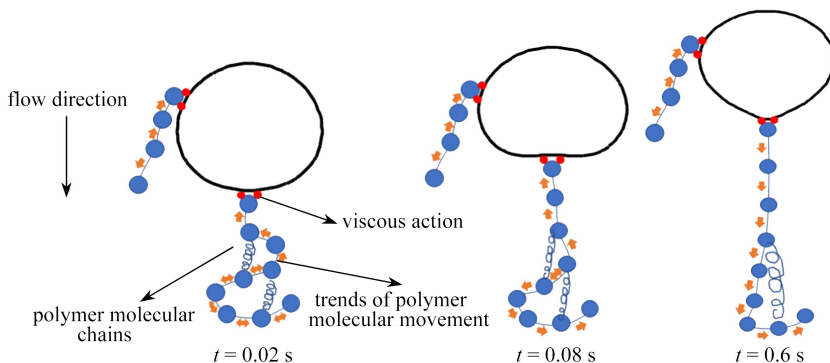


图 8 $Wi = 1$ 和 $Ga = 2$ 时,聚合物分子对气泡变形的影响

Fig. 8 Schematic of effects of polymer molecules on bubble deformation at $Wi = 1$ and $Ga = 2$

另外,对于 $Eo = 1$ 和 $Ga = 16$ 所有的工况,气泡形状和运动均极不规则(所谓的非稳态气泡),气泡沿“之”字形路径上浮.这是因气泡两侧尾涡周期性的脱落,在气泡左右两侧产生了周期性的升力引起的.文献 [18,43-44] 的实验研究也发现了类似的现象.

2.4 气泡上浮速度分析

气泡的上浮速度(指气泡内所有节点的平均速度)是研究气泡水动力学的一个重要参数,气泡的上浮速度在一定程度上影响了液相的含气率,含气率的高低会影响液相的表现黏度和相间的传递效率^[45-46],所以研究气泡的上浮速度非常必要.为了研究弹性力和表面张力对气泡上浮速度的影响,图 9 给出了 Wi 数和 Eo 数对气泡上浮速度的影响.从图中可以看出,当 $Eo = 1$ 时,随着 Wi 数的增大,气泡上浮速度随之增大.对应图 6 给出的气泡形状可知,上浮速度增大的原因可能是在弹性应力作用下,气泡下半部分受到拉伸,气泡尾部

变尖,气泡整体形状更接近于流线型,边界层不易分离,气泡上升过程受到的形状阻力较小.当 $Eo = 10$ 和 100 时, Wi 数对气泡上浮速度的影响不明显,这是因为气泡形状均呈现为帽形,横向尺寸相似,所以气泡受到的形状阻力也相似,导致上浮速度变化不大.另外,在相同的 Wi 数下,随着 Eo 数的增加,气泡上浮速度先快速减小,然后缓慢减小.这是由于气泡的形状先由圆形变为帽形、最终近似稳定为帽形,导致阻力先快速增大然后趋于稳定引起的.

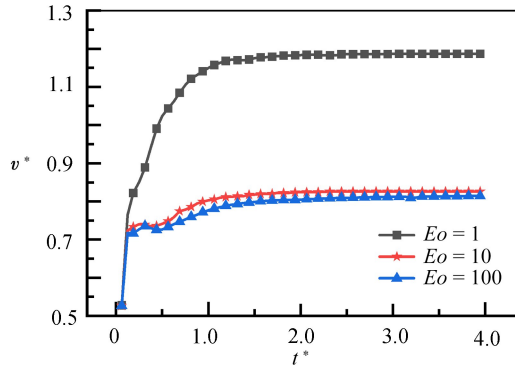
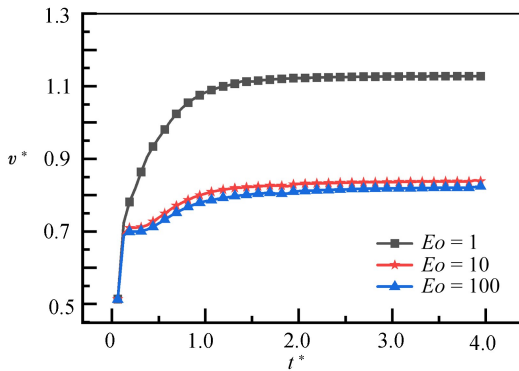
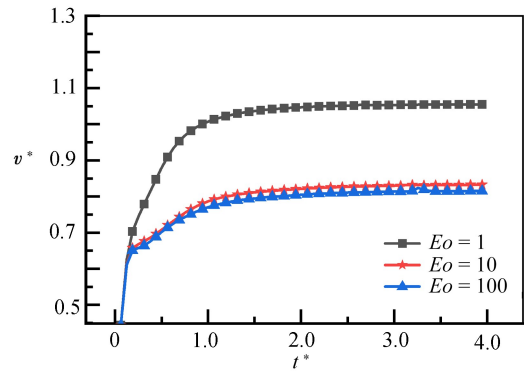
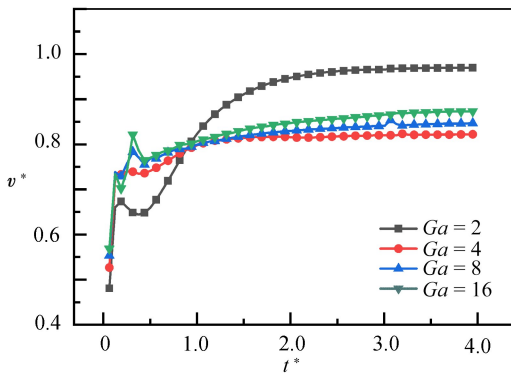
(a) $Wi = 1$ (b) $Wi = 0.5$ (c) $Wi = 0.1$ 图9 $Ga = 4$ 和 $\beta = 0.2$ 时, Wi 数和 Eo 数对气泡上浮速度的影响Fig. 9 Effects of Wi and Eo numbers on the bubble rise velocity at $Ga = 4$ and $\beta = 0.2$

图10给出 Ga 数对气泡上浮速度的影响 ($Eo = 10, \beta = 0.2$). 当 $Wi = 0.1$ 和 0.5 时,随着 Ga 数的增大,稳定后气泡的上浮速度随之增大.这是由于随着 Ga 数的增大,在重力保持不变的情况下,气泡受到液相的黏性阻力减小引起的.在较大的 Ga 数 ($Ga = 16$) 下,由于气泡前一刻的破碎,导致气泡上浮速度在稳定前出现了一个峰值.当 Ga 数较小 (如 $Ga = 2$) 时,气泡上浮速度随 Wi 数的变化表现出一定的差异.当 $Wi = 1$ 时,气泡经历了一个“加速-减速-再加速”的过程,最后气泡上浮速度超过相同工况下黏度较小 (即 Ga 数较大) 的工况.第一阶段气泡的加速是因浮力作用引起的;第二阶段的减速是因气泡底部受到射流的作用、发生上凹变形,变形成帽形,气泡的形状阻力增大,所以出现了减速现象;第三阶段的加速是因液相中聚合物分子的弹性拉伸,气泡底部受到聚合物恢复至平衡态向下的弹性拉力,气泡从帽形变为“倒置的泪滴”状,形状阻力又减小,所以气泡的上浮速度又增大.因气泡形状最终稳定在阻力最小的状态,所以气泡速度高于低黏度工况下的速度.气泡的变形过程如图8所示.

(a) $Wi = 1$

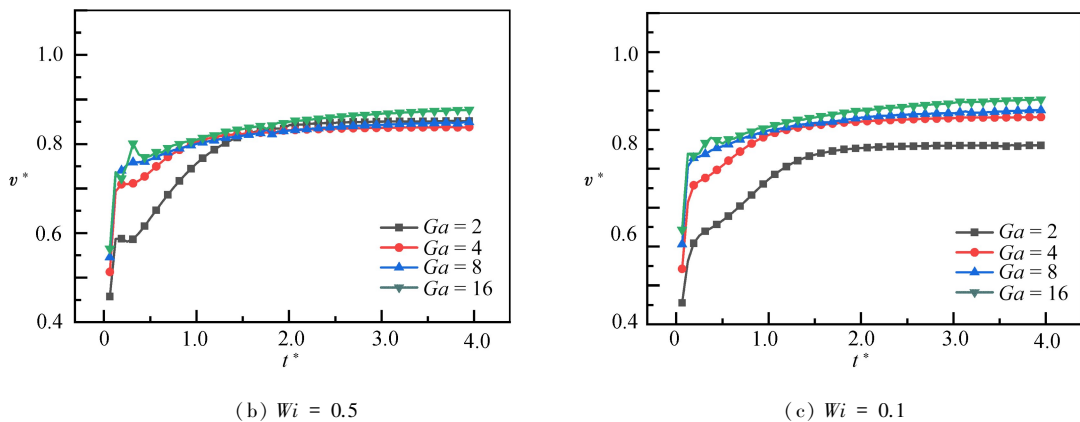
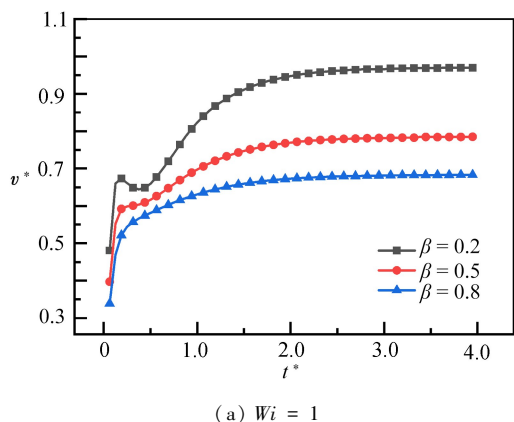


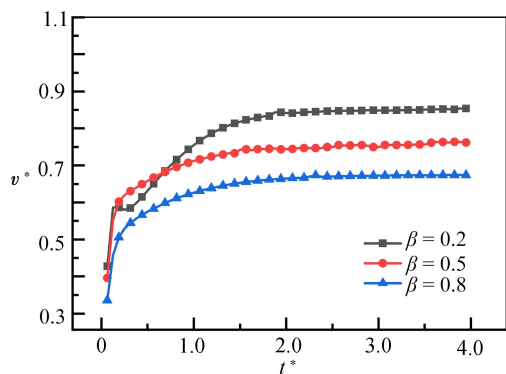
图 10 $Eo = 10$ 和 $\beta = 0.2$ 时, Ga 数对气泡上浮速度的影响

Fig. 10 Effects of the Ga number on the bubble rise velocity at $Eo = 10$ and $\beta = 0.2$

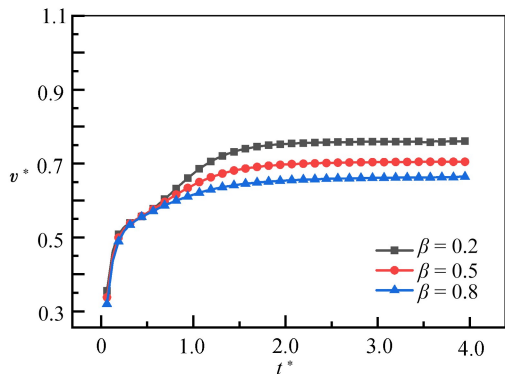
另外,从图 9 可以看出,当其他条件相同, $Eo = 1$ 时,气泡上浮过程没出现再加速现象,而是一次性加速达到稳定的峰值;但 $Eo \geq 10$ 时,气泡速度出现了轻微的波动.这说明形状阻力的变化是导致气泡出现再次加速的主要原因.Niethammer 等^[47]报道过类似的现象,他们认为第一阶段气泡的加速是因浮力驱动引起的,这与本文一致,而第二阶段气泡的减速,则被归因于气泡表面弹性应力层足够大以至于对气泡运动产生了影响,对于第三阶段气泡的加速他们认为当气泡体积大于临界体积时,气泡赤道下方的环向弹性应力引起气泡再次大幅加速^[48].



(a) $Wi = 1$



(b) $Wi = 0.5$



(c) $Wi = 0.1$

图 11 $Ga = 2$ 和 $Eo = 10$ 时,黏度比 β 对气泡上浮速度的影响

Fig. 11 Effects of viscosity ratio β on the bubble rise velocity at $Ga = 2$ and $Eo = 10$

图 11 展示了黏度比 β 对气泡上浮速度的影响 ($Ga = 2, Eo = 10$)。当 $Wi = 1$ 时,随着黏度比的变大,气泡上浮速度明显减小.这是因为黏度比 β 的增大导致黏性力作用增强而弹性力的作用减小,导致气泡受到的黏性阻力增大,所以上浮速度变小.通过对比图中 $\beta = 0.2$ 所有的工况可以看出,上文中提到的“加速-减速-再加速”现象随着 Wi 数的增大而变得明显.这足以说明弹性力对气泡形状和上升速度的影响非常大.

综合对比图 9—11 可以发现,气泡在黏弹性液体中上浮时,气泡上浮速度随时间的变化表现出现“持续加速到稳定”和“加速-减速-再加速到稳定”两种形式,这不同于气泡在纯黏流体中的现象,说明了弹性的影响非常显著.气泡在纯黏流体中上浮时,普遍会出现“加速-减速-(某些条件下)轻微再加速”,最后取得稳定的终端速度^[37],这种速度波动是因浮力和阻力之间的动态平衡引起的.对于黏弹性流体中“持续加速到稳

定”现象是因下述原因引起的,即当弹性较弱($Wi = 0.1$)和表面张力较大($Eo \leq 10$)时,气泡变形轻微,既不会因射流作用尾部迅速上凹,也不会因为弹性力作用呈现“尾缘尖”,此时浮力与气泡阻力之间动态平衡产生的速度波动现象因弹性力的存在变得不明显.当弹性较强($Wi \geq 0.5, \beta = 0.2$),黏度较大($Ga = 2$)和表面张力较弱($Eo \geq 10$)时,气泡底部出现“尾缘尖”导致形状阻力大幅减小,从而出现了明显的再次加速.第二阶段减速现象仍存在的原因是,当弹性聚合物松弛时间较大时,弹性应力的释放存在一定的延迟,气泡底部受射流的影响仍会存在上凹的历程.

2.5 气泡尾涡分析

为了进一步分析气泡在黏弹性流体中的水动力学特性,下面给出了气泡的尾涡分布图.图中红线表示气泡的边界轮廓.对于所有的工况,气泡内部都形成了两对对称的涡,一对较大,另一对较小.为了理解各参数对气泡尾涡分布的影响,图12给出了 $Ga = 4$ 和 $\beta = 0.2$ 时, Wi 数和 Eo 数对气泡尾涡的影响;图13给出了 $Eo = 10$ 和 $\beta = 0.2$ 时, Ga 数和 Wi 数对气泡尾涡的影响.

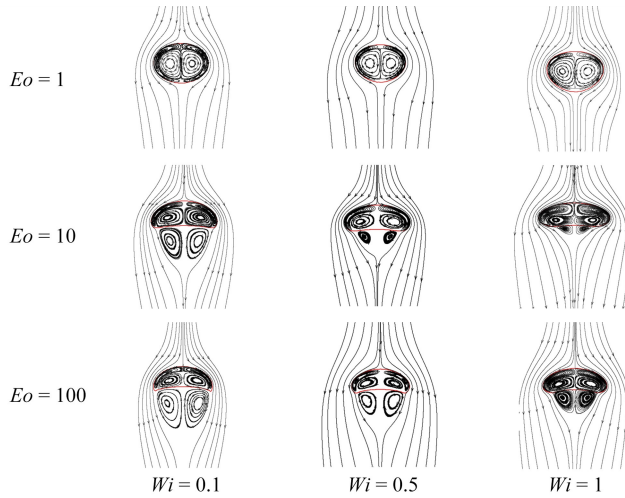


图12 $Ga = 4$ 和 $\beta = 0.2$ 时, Eo 数和 Wi 数对气泡尾流的影响

Fig. 12 Effects of Eo and Wi numbers on the bubble wake at $Ga = 4$ and $\beta = 0.2$

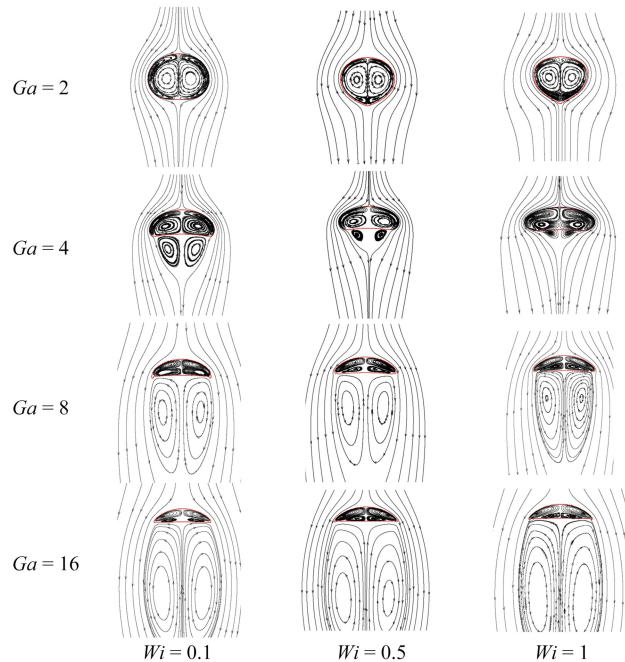


图13 $Eo = 10$ 和 $\beta = 0.2$ 时, Ga 数和 Wi 数对气泡尾流的影响

Fig. 13 Effects of Ga and Wi numbers on the bubble wake at $Eo = 10$ and $\beta = 0.2$

从图 12 中可以看出, 当 Wi 数相同, 在 $Eo = 1$ 时, 由于气泡变形较小, 气泡尾部没有尾涡生成. 这是因气泡形变小(界面曲率大且变化小), 在气泡界面产生的涡量较小, 很快被来流带走, 不会聚集在气泡尾部. 当 $Eo = 10$ 和 100 时, 气泡变形明显, 呈现为帽形, 界面曲率变化大且流动阻力(主要是形状阻力)使气泡上下侧的压差变大, 导致了尾涡的出现, 且随着 Eo 数的变大, 尾涡被逐渐拉长. 当气泡形变成帽形时, 尾涡的出现导致气泡的上浮速度大幅减小. 从图 13 可以看出, 当其他参数相同时, 随着 Ga 数的增大, 气泡尾涡明显增大. 随着 Wi 数的增大, 气泡的尾涡尺寸变小, 这是因为弹性力在一定程度上能够阻止气泡形变为帽形, 减小气泡的形状阻力. 这也进一步解释了气泡上浮速度随着 Wi 数的增大而增大的原因.

2.6 气泡周围正应力分析

因聚合物正应力 τ_{yy} 云图在一定程度上能体现气泡周围聚合物浓度和弹性应力的作用效果, 而且通过观察正应力云图可以更直观地理解弹性应力的作用规律. 为此, 给出了液相的正应力 τ_{yy} 分布云图(图 14).

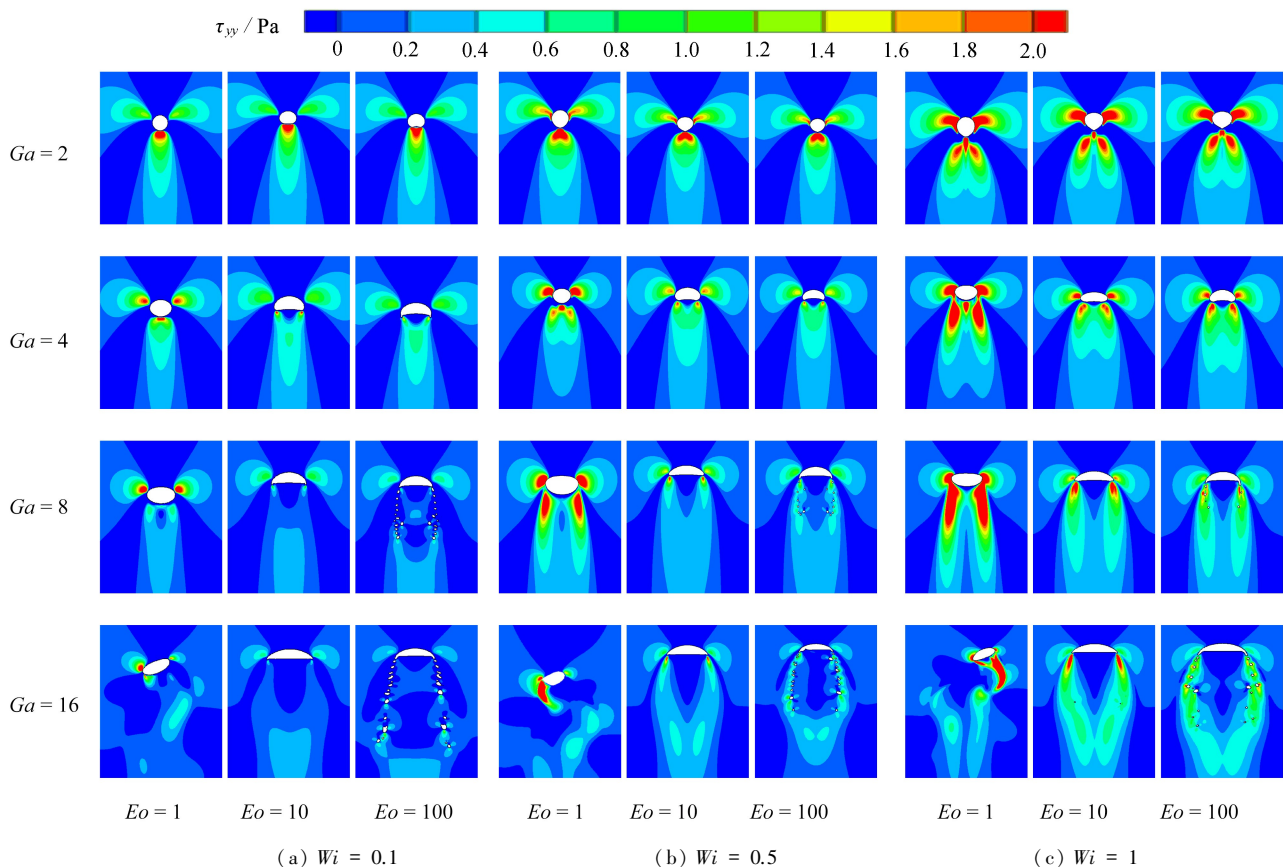


图 14 $\beta = 0.2$ 时, τ_{yy} 分布云图

Fig. 14 At $\beta = 0.2$, contour plots of τ_{yy}

从图 14 可以看出, 大正应力区主要集中在气泡尾部和气泡赤道位置附近, 这些区域也是剪切较强的区域, 这也再次证明弹性应力对气泡变形的影响不容忽视. 当其他参数相同时, 随着 Wi 数的增大, 正应力的大小和作用范围总体上表现出增大的趋势. 前文提到弹性应力使气泡尾部受到拉伸, 气泡形状趋于流线形, 从而导致上浮速度增大. 从正应力云图来看, 大弹性应力出现在气泡赤道附近, 分析对应位置处的流线不难看出, 当气泡上浮时, 气泡顶部和周围的液体向赤道位置汇聚, 导致气泡表面附近存在较大的速度梯度, 所以形成较强的剪切作用. 受剪切的影响, 气泡赤道附近聚合物分子被向下拉伸, 从而在气泡上产生一个向上的弹性应力, 也可使气泡上浮速度变大, 如图 8 所示. 当其他参数相同, 改变气泡的 Eo 数时, 气泡的形状随之变化, 导致正应力的大小和位置也发生变化. 当 Eo 数较小时, 气泡变形较小, 大正应力区域主要出现在气泡两侧偏上和尾部区域; 当 Eo 数较大时, 气泡变成帽形, 大正应力区域逐渐移动到帽形的裙边处; 当气泡出现破碎时, 大正应力区域分布在脱落气泡的周围, 也出现了大应力区域脱落的现象. 对于大 Ga 数的工况, 正应力作用区域相对变大, 但大应力区域减小. 一方面是聚合物黏度减小的原因; 另一方面是小黏性力的作用导致气泡上

浮速度较大,在聚合物分子松弛时间不变的前提下,在聚合物分子单次拉伸恢复至平衡态所需的时间内,气泡上浮了更远的距离,从而导致正(弹性)应力作用区域变大。

3 结 论

本文基于 Oldroyd-B 黏弹性模型,运用 VOF 法模拟了气泡在黏弹性流体中的上浮运动,再现了气泡在黏弹性流体中呈倒置泪滴形状的现象,解释了该现象产生原因,并详细分析了 Ga 数、 Eo 数、 Wi 数和黏度比 β 对气泡形状和上浮速度的影响。主要结论总结如下:

1) 气泡在黏弹性流体中上浮时,可呈现为圆形、椭圆形、帽形(破碎和未破碎)、倒置泪滴状和其他不规则形状。随着 Ga 数和 Eo 数的增大,黏性力和表面张力减小,气泡变形程度增加;在大 Wi 数和小黏度比 β 下,弹性较强,气泡底部受到强烈的拉伸作用;在小 Wi 数和大黏度比 β 下,弹性较弱,气泡形状与纯黏流体中的相似。当 $Ga = 16$ 和 $Eo = 1$ 时,气泡受到周期性升力的作用表现出非稳态形状;当 $Ga = 2$, $Wi \geq 0.5$ 和 $\beta = 0.2$ 时,气泡尾部出现了大小不同的“尾缘尖”,该现象是弹性力、黏性力、表面张力和惯性力综合作用的结果,而弹性力是“尾缘尖”现象的必要条件。

2) 气泡在黏弹性液体中的上浮速度普遍大于在纯黏液体中的速度。与纯黏流体不同,气泡在黏弹性流体中上浮时,气泡上浮速度有持续加速到终端速度和加速-减速-再加速到终端速度两种形式,后者的再加速现象是因气泡“尾缘尖”的出现导致气泡所受形状阻力减小引起的。

3) 当气泡变成帽形时,因气泡上下两侧压差较大且界面曲率变化较大,在气泡尾部出现了尾涡,气泡尾涡随着 Eo 数的增大而拉长。 τ_{yy} 大应力区主要集中在气泡尾部和赤道处;随着 Wi 数的增大,聚合物松弛时间变长,且气泡将聚合物分子拉伸长度变大,所以弹性应力作用范围变大。

致谢 本文作者衷心感谢常州大学“SIETP”基金项目(2022-C-06)对本文的资助。

参考文献(References):

- [1] TSUJINO T, SHIMA A. The behaviour of gas bubbles in blood subjected to an oscillating pressure[J]. *Journal of Biomechanics*, 1980, **13**(5): 407-416.
- [2] YANG G Q, LUO X, LAU R, et al. Heat-transfer characteristics in slurry bubble columns at elevated pressures and temperatures[J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2000, **39**(7): 2568-2577.
- [3] CHHABRA R P. *Bubbles, Drops, and Particles in Non-Newtonian Fluids*[M]. CRC Press, 2006:10-25.
- [4] SAFFMAN P G. On the rise of small air bubbles in water[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1956, **1**(3): 249-275.
- [5] 蔡子琦. 牛顿流体中气泡动力学行为的实验研究[D]. 博士学位论文. 北京:北京化工大学, 2011.(CAI Ziqi. Experimental study on bubble dynamic behavior in Newtonian fluid[D]. PhD Thesis. Beijing: Beijing University of Chemical Technology, 2011.(in Chinese))
- [6] WANCHOO R K, SHARMA S K, RAINA G K. Drag coefficient and velocity of rise of a single collapsing two-phase bubble[J]. *AIChE Journal*, 1997, **43**(8): 1955-1963.
- [7] MIYAHARA T, YAMANAKA S. Mechanics of motion and deformation of a single bubble rising through quiescent highly viscous Newtonian and non-Newtonian media[J]. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, 1993, **26**(3): 297-302.
- [8] SAITO T, SAKAKIBARA K, MIYAMOTO Y, et al. A study of surfactant effects on the liquid-phase motion around a zigzagging-ascent bubble using a recursive cross-correlation PIV[J]. *Chemical Engineering Journal*, 2010, **158**(1): 39-50.
- [9] YAN X, ZHENG K, JIA Y, et al. Drag coefficient prediction of a single bubble rising in liquids[J]. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2018, **57**(15): 5385-5393.
- [10] HOQUE M M, MITRA S, EVANS G M, et al. Modulation of turbulent flow field in an oscillating grid system owing to single bubble rise[J]. *Chemical Engineering Science*, 2018, **185**: 26-49.
- [11] 胡波, 庞明军. 特征时间对剪切稀化流体气泡上浮特性的影响[J]. 化工进展, 2020, **40**(5): 2440-2451.(HU Bo, PANG Mingjun. Effect of characteristic time on bubble upwelling characteristics of shear thinning fluid

- [J]. *Chemical Industry Progress*, 2020, **40**(5): 2440-2451. (in Chinese))
- [12] 孙涛, 庞明军, 费洋. 气泡间距对受污染球形气泡界面性质和尾流的影响[J]. *应用数学和力学*, 2020, **41**(10): 1157-1170. (SUN Tao, PANG Mingjun, FEI Yang. Influence of bubble spacing on interface properties and wake flow of polluted spherical bubbles [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(10): 1157-1170. (in Chinese))
- [13] 庞明军, 牛瑞鹏, 陆敏杰. 壁面效应对剪切稀化流体中气泡上浮特性的影响[J]. *应用数学和力学*, 2020, **41**(2): 143-155. (PANG Mingjun, NIU Ruipeng, LU Minjie. Effect of wall effect on bubble buoyancy in shear thinning fluid [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(2): 143-155. (in Chinese))
- [14] PREMLATA A R, TRIPATHI M K, KARRI B, et al. Numerical and experimental investigations of an air bubble rising in a Carreau-Yasuda shear-thinning liquid[J]. *Physics of Fluids*, 2017, **29**(3): 033103.
- [15] 陆敏杰, 庞明军. 静止幂律流体中气泡上浮运动特性的数值研究[J]. *工程热物理论*, 2018, **39**(11): 2454-2462. (LU Minjie, PANG Mingjun. Numerical study of bubble upward motion in stationary power-law fluid [J]. *Chinese Journal of Engineering Thermophysics*, 2018, **39**(11): 2454-2462. (in Chinese))
- [16] MAJUMDAR A, DAS P K. Rise of Taylor bubbles through power law fluids: analytical modelling and numerical simulation[J]. *Chemical Engineering Science*, 2019, **205**: 83-93.
- [17] 孙涛, 庞明军, 陆敏杰, 等. 剪切稠化流体中气泡上浮运动特性[J]. *化学工程*, 2019, **47**(11): 56-61. (SUN Tao, PANG Mingjun, LU Minjie, et al. Characteristics of bubble upward motion in shear thickened fluid [J]. *Chemical Engineering*, 2019, **47**(11): 56-61. (in Chinese))
- [18] SOTO E, GOUJON C, ZENIT R, et al. A study of velocity discontinuity for single air bubbles rising in an associative polymer[J]. *Physics of Fluids*, 2006, **18**(12): 121510.
- [19] SUN B, GUO Y, WANG Z, et al. Experimental study on the drag coefficient of single bubbles rising in static non-Newtonian fluids in wellbore[J]. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 2015, **26**: 867-872.
- [20] 徐双, 李少白, 范俊赓, 等. 粘弹性流体中气泡上升过程的轨迹分析[J]. *沈阳航空航天大学学报*, 2016, **33**(5): 88-92. (XU Shuang, LI Shaobai, FAN Jungeng, et al. Trajectory analysis of bubble rising process in viscoelastic fluid [J]. *Journal of Shenyang University of Aeronautics and Astronautics*, 2016, **33**(5): 88-92. (in Chinese))
- [21] KORDORWU V. 粘弹性流体中上升 CO₂ 气泡动力学和传质的实验研究[D]. 硕士学位论文. 大连: 大连理工大学, 2021. (KORDORWU V. Experimental study on dynamics and mass transfer of CO₂ bubbles rising in viscoelastic fluids [D]. Master Thesis. Dalian: Dalian University of Technology, 2021. (in Chinese))
- [22] 白丽娜, 曹佰旭, 胡钊晨, 等. 黏弹性流体中单气泡上升速度的研究[J]. *高校化学工程学报*, 2019, **33**(5): 1064-1069. (BAI Lina, CAO Baixu, HU Zhaochen, et al. Study on single bubble rising velocity in viscoelastic fluid [J]. *Journal of Chemical Engineering of Chinese Universities*, 2019, **33**(5): 1064-1069. (in Chinese))
- [23] ASTARITA G, APUZZO G. Motion of gas bubbles in non-Newtonian liquids[J]. *AIChE Journal*, 1965, **11**(5): 815-820.
- [24] HASSAGER O. Negative wake behind bubbles in non-Newtonian liquids[J]. *Nature*, 1979, **279**(5712): 402-403.
- [25] ZANA E, LEAL L G. The dynamics and dissolution of gas bubbles in a viscoelastic fluid[J]. *International Journal of Multiphase Flow*, 1978, **4**(3): 237-262.
- [26] SOUSA R G, NOGUEIRA S, PINTO A, et al. Flow in the negative wake of a Taylor bubble rising in viscoelastic carboxymethylcellulose solutions: particle image velocimetry measurements[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2004, **511**: 217-236.
- [27] KEMIHA M, FRANK X, PONCIN S, et al. Origin of the negative wake behind a bubble rising in non-Newtonian fluids[J]. *Chemical Engineering Science*, 2006, **61**(12): 4041-4047.
- [28] YAMAGUCHI H, UENO Y. Deformation of a single rising bubble in non-Newtonian liquid[J]. *Nihon Reoroji Gakkaishi*, 2005, **33**(1): 41-43.
- [29] SOTO E, GOUJON C, ZENIT R, et al. A study of velocity discontinuity for single air bubbles rising in an associative polymer[J]. *Physics of Fluids*, 2006, **18**(12): 121510.
- [30] MIRZAAGHA S, PASQUINO R, IULIANO E, et al. The rising motion of spheres in structured fluids with yield

- stress[J]. *Physics of Fluids*, 2017, **29**(9): 093101.
- [31] WAGNER A J, GIRAUD L, SCOTT C E. Simulation of a cusped bubble rising in a viscoelastic fluid with a new numerical method[J]. *Computer Physics Communications*, 2000, **129**(1/3): 227-232.
- [32] PILLAPAKKAM S B, SINGH P, BLACKMORE D, et al. Transient and steady state of a rising bubble in a viscoelastic fluid[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2007, **589**: 215-252.
- [33] FRAGGEDAKIS D, PAVLIDIS M, DIMAKOPOULOS Y, et al. On the velocity discontinuity at a critical volume of a bubble rising in a viscoelastic fluid[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2016, **789**: 310-346.
- [34] FATTAL R, KUPFERMAN R. Constitutive laws for the matrix-logarithm of the conformation tensor[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2004, **123**(2/3): 281-285.
- [35] FATTAL R, KUPFERMAN R. Time-dependent simulation of viscoelastic flows at high Weissenberg number using the log-conformation representation[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2005, **126**(1): 23-37.
- [36] AFONSO A M, PINHO F T, ALVES M A. The kernel-conformation constitutive laws[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2012, **167**: 30-37.
- [37] YUAN W, ZHANG M, KHOO B C, et al. Dynamics and deformation of a three-dimensional bubble rising in viscoelastic fluids[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2020, **285**: 104408.
- [38] OHTA M, FURUKAWA T, YOSHIDA Y, et al. A three-dimensional numerical study on the dynamics and deformation of a bubble rising in a hybrid Carreau and FENE-CR modeled polymeric liquid[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2019, **265**: 66-78.
- [39] WAGNER A J. Simulations of a rising drop in a non-linear viscoelastic fluid[J]. *Progress in Computational Fluid Dynamics, an International Journal*, 2005, **5**(1/2): 20-26.
- [40] LARIMI M M, RAMIAR A. Two-dimensional bubble rising through quiescent and non-quiescent fluid: influence on heat transfer and flow behavior[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2018, **131**: 58-71.
- [41] SARKAR K, SCHOWALTER W R. Deformation of a two-dimensional viscoelastic drop at non-zero Reynolds number in time-periodic extensional flows[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2000, **95**(2/3): 315-342.
- [42] YOUNGS D L. *Time-Dependent Multi-Material Flow With Large Fluid Distortion* [M]//MORTON K W, BAINES M J, ed. *Numerical Methods for Fluid Dynamics*. New York: Academic Press, 1982: 273-285.
- [43] BRACKBILL J U, KOTHE D B, ZEMACH C. A continuum method for modeling surface tension[J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, **100**(2): 335-354.
- [44] AMIRNIA S, DE BRUYN J R, BERGOUIGNOU M A, et al. Continuous rise velocity of air bubbles in non-Newtonian biopolymer solutions[J]. *Chemical Engineering Science*, 2013, **94**: 60-68.
- [45] 闫思娜, 罗兴铨, 冯建军, 等. 含气率对气液两相流离心泵性能的影响[J]. 水动力学研究与进展(A辑), 2019, **34**(3): 353-360.(YAN Sina, LUO Xingqi, FENG Jianjun, et al. Effect of gas content on performance of gas-liquid two-phase flow centrifugal pump[J]. *Research and Progress in Hydrodynamics(Series A)*, 2019, **34**(3): 353-360.(in Chinese))
- [46] 张泽斌, 李永, 陈荣尚, 等. 含气率对润滑油黏度的影响[J]. 河南科技大学学报(自然科学版), 2019, **40**(2): 23-27.(ZHANG Zebin, LI Yong, CHEN Rongshang, et al. Effect of gas content on viscosity of lubricating oil [J]. *Journal of Henan University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2019, **40**(2): 23-27.(in Chinese))
- [47] NIETHAMMER M, BRENN G, MARSCHALL H, et al. An extended volume of fluid method and its application to single bubbles rising in a viscoelastic liquid[J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, **387**: 326-355.
- [48] BOTHE D, NIETHAMMER M, PILZ C, et al. On the molecular mechanism behind the bubble rise velocity jump discontinuity in viscoelastic liquids[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2022, **302**: 104748.