

直齿锥齿轮分岔脱啮特性参数解域界结构*

田亚平, 杨江辉, 王瑞邦

(兰州交通大学 机电工程学院, 兰州 730070)

摘要: 为研究含间隙直齿锥齿轮系统周期运动与齿面冲击、脱啮、动载间的耦合转迁关系, 基于胞映射原理构建了时变啮合刚度和频率比双参平面, 采用改进的 CPNF (continuous-Poincaré-Newton-Floquet) 法求解了系统胞元的周期、冲击、脱啮、动载特性解域界结构。仿真结果表明, 在双参解域界内系统存在鞍结、Hopf、倍化、激变及周期 3 等分岔方式和 3 种齿面冲击共存现象, 随时变啮合刚度系数递增其冲击和混沌现象加剧, 齿面脱啮、齿背接触及动载系数受齿面冲击和周期分岔的影响而发生突变, 在同一界域内随频率比增加而降低, 随刚度系数增加而加剧。

关键词: 直齿锥齿轮传动系统; 分岔; CPNF 法; 解域界结构; 齿面脱啮

中图分类号: O322; TH132.422 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430330

Parametric Solution Domain Structures for Bifurcation and Non-Meshing Dynamic Characteristics of Straight Bevel Gear Systems

TIAN Yaping, YANG Jianghui, WANG Ruibang

(School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, P.R.China)

Abstract: Aimed at the coupling transition relationship between the periodic motion, the tooth surface impact, the non-meshing state and the dynamic load of straight bevel gear systems with backlash, the 2-parameter plane with respect to the time-varying meshing stiffness and the frequency ratio was built based on the cell mapping principle. Besides, the improved CPNF (continuous-Poincaré-Newton-Floquet) method was applied to solve the solution domain structure of the periodicity, impact, non-meshing and dynamic load characteristics of the system cells. The simulation results show that, there are plentiful bifurcation modes with 3 kinds of tooth surface impacts coexisting in the 2-parameter solution domain structure, including the saddle node bifurcation, the Hopf bifurcation, the period-doubling bifurcation, the catastrophe bifurcation and the period-3 bifurcation. The tooth surface impact and chaos will intensify due to increase of the time-varying meshing stiffness coefficient. The tooth surface non-meshing, the tooth back meshing and the dynamic load coefficient will exhibit mutations under the influences of the tooth impact and the periodic motion. Meanwhile, in the same domain, the tooth surface non-meshing and the tooth back meshing will weaken with the frequency ratio but heighten with the stiffness coefficient.

* 收稿日期: 2022-10-20; 修订日期: 2022-12-27

基金项目: 甘肃省科技厅计划项目(21JR7RA316;20YF8WA043);国家自然科学基金项目(12062008;11962011)

作者简介: 田亚平(1977—),男,副教授,博士,硕士生导师(通讯作者。E-mail: tianyp@lzjtu.edu.cn)。

引用格式: 田亚平, 杨江辉, 王瑞邦. 直齿锥齿轮分岔脱啮特性参数解域界结构[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(8): 965-976.

Key words: straight bevel gear system; bifurcation; CPNF method; solution domain structure; tooth surface no-meshing

0 引言

锥齿轮传动广泛应用于机车、航空、机床等行业传动装置中。含间隙和时变因素的锥齿轮传动系统的非线性振动对系统运动的稳定性提出了严峻挑战,成为学者们研究的热点。王三民等^[1]建立了正交锥齿轮系统动力学模型并分析了系统分岔和幅值跳跃特性。黄康等^[2]考虑随机因素探索了间隙的合理范围。Wang 等^[3]考虑含齿面混合润滑研究了表面粗糙度对齿面冲击的影响。Hua 等^[4]建立了轴承-锥齿轮转子有限元模型,分析了轴承支承刚度对动态啮合力的影响。Cao 等^[5]分析了不同润滑状态下锥齿轮传动系统的非线性动态特性。李飞等^[6]研究了摩擦和重合度对系统振动幅值和啮合力的影响。

小波法^[7]、数值法^[8]是求解非线性系统分岔特性的常用方法,但在全局分岔特性转迁特性分析上适用性较差。胞映射理论是研究非线性动态特性转迁的常见方法。在参数域平面内,Gou 等^[9]采用胞映射研究了齿轮副模型的周期吸引子分形结构,Liu 等^[10]通过对齿轮解域界分析实现了混沌控制,林何等^[11]分析了弧齿锥齿轮传动系统中周期运动的解域界结构。因伪不动点周期求解及追踪 CPNF 法求解效率高,在含间隙的行星轮系^[12]和单级齿轮系统^[13]的周期求解中获得了成功应用。田亚平等^[14]用 CPNF 法研究了单级齿轮系统的动态特性解域界结构。多参耦合下的解域界结构能有效揭示其动态特性间的耦合及转迁规律。目前,针对含间隙直齿锥齿轮动态特性参数解域界结构的研究还鲜有报道。

据统计,间隙和时变参数是导致动车齿轮传递装置(图1)故障和车辆振动超标的主要因素。本文以该锥齿轮传动系统为研究对象,建立了7自由度锥齿轮系统动力学模型,采用 CPNF 法求解周期、脱啮、齿面冲击、动载特性的转迁规律,探索参数组合下系统的周期分岔与齿面冲击及脱啮、动载间的耦合关系,为锥齿轮结构设计参数选择提供理论依据。



图1 齿轮箱

Fig. 1 The bevel gearbox

1 动力学模型

含弹性支承的直齿锥齿轮传动系统动力学模型如图2所示^[1]。两齿轮轴线正交于原点 O ,建立坐标系 $\sum : \{Oxyz\}$ 。两轮支承等效在齿宽中点 O_1, O_2 ,沿坐标轴的支承刚度和阻尼为 $k_{ij}, c_{ij} (i = x, y, z; j = 1, 2)$ 。 c_h , $k_h(t)$ 和 b_h 分别为齿轮副啮合的阻尼、时变刚度和齿侧间隙。设主动轮1受到的驱动力矩 T_p 由常量 T_{pm} 和变量 T_{pv} 构成;从动轮2受到稳定的阻力矩 T_{gm} 。忽略齿轮的摆动与弯曲,两个刚性锥盘的振动是分别以 O_1, O_2 为

中心,沿坐标轴的移动和轴线的转动,即 8 个自由度 $\{X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \theta_1, \theta_2\}$ 。

考虑振动和误差,两齿轮沿啮合线的动态综合传递误差 Λ_n 为

$$\Lambda_n = (X_1 - X_2)a_1 - (Y_1 - Y_2)a_2 - (Z_1 + r_1\theta_1 - Z_2 - r_2\theta_2)a_3 - e_n(t), \tag{1}$$

式中, $a_1 = \cos \delta_1 \sin \alpha_n, a_2 = \cos \delta_1 \cos \alpha_n, a_3 = \cos \alpha_n, \delta_1$ 为主动轮节锥角, α_n 为法面压力角, r_1, r_2 为两轮的节圆半径. 齿轮副的静态综合误差 $e_n(t)$ 展开成级数形式为

$$e_n(t) = \sum_{l=1}^N A_l \cos(l\Omega_n t + \Phi_l), \tag{2}$$

式中, Ω_n, A_l 和 Φ_l 为啮合频率、 l 阶谐波幅值和初相位.

齿轮副的啮合力 F_n 及其沿坐标轴的分力 F_x, F_y 和 F_z 分别为

$$\begin{cases} F_n = k_h(t)f(\Lambda_n) + c_h \dot{\Lambda}_n, \\ F_x = -F_n(\sin \alpha_n \cos \delta_1 + \cos \alpha_n \sin \delta_1) = -a_4 F_n, \\ F_y = F_n(\sin \alpha_n \sin \delta_1 - \cos \alpha_n \cos \delta_1) = a_5 F_n, \\ F_z = F_n \cos \alpha_n = a_3 F_n. \end{cases} \tag{3}$$

用文献[15]计算 $k_h(t)$ 并用级数展开为

$$k_h(t) = k_m + \sum_{l=1}^N k_{kl} \cos(l\Omega_n t + \Phi_{kl}), \tag{4}$$

式中, k_m, k_{kl} 和 Φ_{kl} 为啮合刚度的均值、 l 阶谐波幅值和初相位. 结合动车齿轮箱工程计算精度要求, 本文选取一阶级数进行数值仿真计算.

间隙函数 $f(\Lambda_n)$ 为

$$f(\Lambda_n) = \begin{cases} \Lambda_n - b_h, & \Lambda_n > b_h, \\ 0, & |\Lambda_n| \leq b_h, \\ \Lambda_n + b_h, & \Lambda_n < -b_h. \end{cases} \tag{5}$$

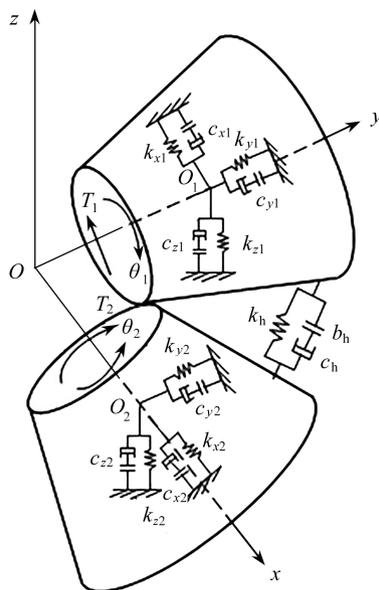


图 2 动力学模型

Fig. 2 The nonlinear dynamic model for a spiral bevel gear set

根据 Newton 第二定律, 图 2 所示的锥齿轮传动系统振动方程为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{X}_1 + c_{x1} \dot{X}_1 + k_{x1} X_1 = F_x, \\ m_1 \ddot{Y}_1 + c_{y1} \dot{Y}_1 + k_{y1} Y_1 = F_y, \\ m_1 \ddot{Z}_1 + c_{z1} \dot{Z}_1 + k_{z1} Z_1 = F_z, \\ J_1 \ddot{\theta}_1 = T_1 - F_z r_1, \\ m_2 \ddot{X}_2 + c_{x2} \dot{X}_2 + k_{x2} X_2 = -F_x, \\ m_2 \ddot{Y}_2 + c_{y2} \dot{Y}_2 + k_{y2} Y_2 = -F_y, \\ m_2 \ddot{Z}_2 + c_{z2} \dot{Z}_2 + k_{z2} Z_2 = -F_z, \\ J_2 \ddot{\theta}_2 = -T_2 + F_z r_2, \end{cases} \quad (6)$$

式中, m_1, m_2, J_1, J_2 为两轮的质量和转动惯量。

用沿啮合线的动态综合传递误差 Λ_n 作为新自由度, 将式(6)中两齿轮扭振方程合并得

$$-a_1(\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2) + a_2(\ddot{Y}_1 - \ddot{Y}_2) + a_3(\ddot{Z}_1 - \ddot{Z}_2) + \ddot{\Lambda}_n + a_3 c_h \dot{\Lambda}_n / m_e + a_3 k_h \Lambda_n / m_e = F_{pm} / m_e + F_{pv} / m_e + \ddot{e}_n(t), \quad (7)$$

式中, 齿轮副等效质量 $m_e = J_1 J_2 / (r_1^2 J_2 + r_2^2 J_1)$; 主动轮啮合力的常量和变量部分 $F_{pm} = T_{pm} / r_1 = T_2 / r_2, F_{pv} = T_{pv} m_e r_1 / J_1 = \sum_{l=1}^N f_{Fl} \cos(l\Omega_F t + \Phi_{Fl}), \Omega_F$ 为外载荷激励频率, f_{Fl} 和 Φ_{Fl} 为 l 阶谐波幅值和初相位。

将上述方程整理并量纲一化处理得

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\xi_{x1} \dot{x}_1 + 2a_4 \xi_{h1} \dot{\lambda} + k_{x1} x_1 + a_4 k_{h1} f(\lambda) = 0, \\ \ddot{y}_1 + 2\xi_{y1} \dot{y}_1 - 2a_5 \xi_{h1} \dot{\lambda} + k_{y1} y_1 - a_5 k_{h1} f(\lambda) = 0, \\ \ddot{z}_1 + 2\xi_{z1} \dot{z}_1 - 2a_3 \xi_{h1} \dot{\lambda} + k_{y1} z_1 - a_3 k_{h1} f(\lambda) = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2\xi_{x2} \dot{x}_2 - 2a_4 \xi_{h2} \dot{\lambda} + k_{x2} x_2 - a_4 k_{h2} f(\lambda) = 0, \\ \ddot{y}_2 + 2\xi_{y2} \dot{y}_2 + 2a_5 \xi_{h2} \dot{\lambda} + k_{y2} y_2 + a_5 k_{h2} f(\lambda) = 0, \\ \ddot{z}_2 + 2\xi_{z2} \dot{z}_2 + 2a_3 \xi_{h2} \dot{\lambda} + k_{z2} z_2 + a_3 k_{h2} f(\lambda) = 0, \\ -a_1 \ddot{x}_1 + a_2 \ddot{y}_1 + a_3 \ddot{z}_1 + a_1 \ddot{x}_2 - a_2 \ddot{y}_2 - a_3 \ddot{z}_2 + \ddot{\lambda} + 2a_3 \xi_h \dot{\lambda} + a_3 k_h f(\lambda) = f_{pm} + f_{pv} + f_e \Omega^2 \cos(\Omega\tau), \end{cases} \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} x_j &= X_j / b_n, \quad y_j = Y_j / b_n, \quad z_j = Z_j / b_n, \quad \lambda = \Lambda_n / b_n, \quad \Omega_n = (k_m / m_e)^{1/2}, \\ \Omega_{ij} &= (k_{ij} / m_j)^{1/2}, \quad \xi_{ij} = c_{ij} / (2m_j \Omega_n), \quad k_{ij} = (\Omega_j / \Omega_n)^2, \quad i = x, y, z, \quad j = 1, 2, \\ \xi_{hj} &= c_h / (2m_j \Omega_n), \quad k_{hj}(\tau) = k_h(\tau) / (m_j \Omega_n^2), \quad \xi_h = c_h / (2m_e \Omega_n), \\ \tau &= \Omega t, \quad \Omega = \Omega_h / \Omega_n, \quad f_{pm} = F_{pm} / (m_e b_n \Omega_n^2), \quad f_{pv} = F_{pv} / (m_e b_n \Omega_n^2), \\ f_e &= A_{el} / b_n, \quad k_h = 1 + \sum_{l=1}^N \frac{k_{hl}}{k_m} \cos(l\Omega\tau + \Phi_{hl}), \quad b = b_h / b_n, \end{aligned}$$

$$f(\lambda, b) = \begin{cases} \lambda - b, & \lambda > b, \\ 0, & |\lambda| \leq b, \\ \lambda + b, & \lambda < -b, \end{cases} \quad (9)$$

b_n 为标称间隙。

2 系统动态特性仿真指标

2.1 脱啮占空比和齿背啮合比

轮齿脱啮和齿背接触行为是引起齿面拍击和附加动载荷的主要因素。由文献[16]知, 齿轮啮合的冲击和

脱啮 ($I = 0, 1, 2$) 状态可由运动周期中的最小啮合综合误差 λ_{\min} 与齿侧间隙 b 判断,其判断式为

$$I = \begin{cases} 0, & \lambda_{\min} > b (\text{no impact, meshing}), \\ 0, & \lambda_{\min} = b (\text{tooth surface friction slide, meshing}), \\ 1, & |\lambda_{\min}| < b (\text{unilateral impact, non-meshing}), \\ 1, & \lambda_{\min} = -b (\text{tooth back friction slide, non-meshing}), \\ 2, & \lambda_{\min} < -b (\text{bilateral impact, tooth back meshing}). \end{cases} \quad (10)$$

脱啮占空比(non-meshing duty coefficient, δ_{NMDC}) 和齿背啮合比(back-meshing duty coefficient, δ_{BMDC}) 是量化系统脱啮冲击严重性的主要指标,设在一个运动周期 T 内脱啮时间为 t_1 ,齿背啮合时间为 t_2 ,则 δ_{NMDC} 和 δ_{BMDC} 为

$$\begin{cases} \delta_{\text{NMDC}} = t_1/T, \\ \delta_{\text{BMDC}} = t_2/T. \end{cases} \quad (11)$$

2.2 动载系数

齿轮强度设计中考虑齿轮振动导致动态啮合力瞬态增大的因数称为动载系数(dynamic load coefficient, δ_{DLC}).受支承刚度、箱体结构和重合度等因素影响动载系数计算十分复杂,为突出间隙和时变刚度对动载系数的影响,定义运动周期内最大啮合力 $|f_n(\tau)|_{\max}$ 与平均值 f_{pm} 之比的平方根为动载系数:

$$\delta_{\text{DLC}} = \sqrt{|f_n(\tau)|_{\max}/f_{\text{pm}}} = \sqrt{|k(\tau)f(\lambda, b) + 2\xi_h \dot{\lambda}|_{\max}/f_{\text{pm}}}. \quad (12)$$

3 参数解域结构求解

参数解域结构求解是基于胞映射原理将参数平面进行胞元离散,在胞元内对周期运动采用 CPNF 法延续追踪判稳获得其周期运动的参数域界结构.在追踪过程中伴随有脱啮、冲击和动载特性的参数解域结构求解.其基本思想及实施过程如下.

3.1 参数域胞元化

对多参 γ_i 控制的非自治动力学系统可描述为

$$\dot{\mathbf{X}}(\tau) = f(\mathbf{X}(\tau), \gamma_i, \tau) = f(\mathbf{X}, \gamma_i, \tau + T), \quad i = 1, 2, \dots, K; \tau \in \mathbf{R}, \quad (13)$$

式中, \mathbf{X} 为 n 维状态向量, τ 为量纲一时间, $\gamma_i \in R^k$ 为系统的 k 个控制参数, f 为映射法则.

为分析激励参数 γ_i 与响应间的关联机制,在 $[x^l, x^u] \times [y^l, y^u]$ 二维参数域 Θ 内对参数离散化为 $n \times m$ 个胞元,参数胞为 c_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$).其中, x^l, y^l 和 x^u, y^u 分别表示 x, y 方向的起点和终点, h_i, h_j 为离散胞在 x, y 方向的胞元尺度, x, y 方向的胞尺度 h_i, h_j 为

$$\begin{cases} h_i = (x^u - x^l)/n, & i = 1, 2, \dots, n, \\ h_j = (y^u - y^l)/m, & j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (14)$$

在参数域 Θ 内,从 x^l, y^l 开始得到 x, y 方向上参数的递推关系 x_i, y_j 为

$$\begin{cases} x_i = x^l + ih_i, & i = 1, 2, \dots, n, \\ y_j = y^l + jh_j, & j = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (15)$$

则域 Θ 内离散后的各胞元 (x_i, y_j) 赋值为

$$\begin{bmatrix} (x_0, y_0) & (x_1, y_0) & \cdots & (x_n, y_0) \\ (x_0, y_1) & (x_1, y_1) & \cdots & (x_n, y_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_0, y_m) & (x_1, y_m) & \cdots & (x_n, y_m) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

3.2 动力学行为延拓追踪步骤

参数域 Θ 内各胞元的动力学行为采用 CPNF 法追踪求解. 首先沿 x 方向对初始胞元 (x_0, y_j) 用伪不动点 PNF 法^[10-11] 进行系统运动周期求解并判稳; 然后沿 x 方向按步长 h_i 进行延拓追踪、用 Floquet 乘子 $|\lambda|_{\max}$ 判断周期运动的稳定性. 当 $|\lambda|_{\max} > 1$ 时周期运动失稳, 在该胞元 (x_i, y_j) 处终止周期追踪判断分岔类型, 并用 PNF 法重新求解新周期, 若求解周期数超过设定值时认定该胞元为混沌或拟周期状态(可用 Floquet 乘子和 Lyapunov 指数判定), 在 (x_{i+1}, y_j) 胞元处重新求解周期数并追踪直至 x^u 结束; 当完成 x 方向追踪后, 沿 y 方向递进一层继续追踪求解, 直至遍历全域结束.

3.3 胞元周期解求解过程

CPNF 法周期求解判稳的关键是求方程组(17)的稳定解

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}_k}{d\tau} = f(\mathbf{X}_k, \tau), & \mathbf{X} \in R^n, \\ \frac{d\Phi}{d\tau} = \frac{\partial f(\mathbf{X}, \tau)}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_k} \cdot \Phi, & \Phi \in R^{n \times n}, \end{cases} \quad (17)$$

式中, $\Phi = DP(\mathbf{X})$ 为系统的转迁矩阵^[12], 其状态方程的 Jacobi 矩阵 $\partial f(\mathbf{X}, \tau)/\partial \mathbf{X}$ 在 $\lambda \neq \pm b$ 的分段光滑区内为

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \tau) = \begin{bmatrix} \text{diag}[\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{31}, \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{22}, \mathbf{A}_{32}] & \mathbf{A}_2 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 12} \\ \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{12 \times 1} \\ \frac{\partial f(\lambda, b)}{\partial \lambda} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{ij} & -2\xi_{ij} \end{bmatrix}, \quad i = x, y, z, j = 1, 2, \\ \mathbf{A}_1 &= [-a_1[k_{x1} \ 2\xi_{x1}], a_2[k_{y1} \ 2\xi_{y1}], a_3[k_{z1} \ 2\xi_{z1}], \\ &\quad a_4[k_{x2} \ 2\xi_{x2}], -a_5[k_{y2} \ 2\xi_{y2}], -a_3[k_{z2} \ 2\xi_{z2}]], \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} [0 \ -a_4 \ 0 \ a_5 \ 0 \ a_3]^T \cdot [k_{h1} \ 2\xi_{h1}] \\ -[0 \ -a_4 \ 0 \ a_5 \ 0 \ a_3]^T \cdot [k_{h2} \ 2\xi_{h2}] \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_3 &= (a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3^2)(k_{h1} - k_{h2}) - a_3^2 k_h, \\ \mathbf{A}_4 &= (a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3^2)(\xi_{h1} - \xi_{h2}) - a_3^2 \xi_h, \\ \frac{\partial f(\lambda, b)}{\partial \lambda} &= \begin{cases} 1, & |\lambda| > b, \\ 0, & |\lambda| < b. \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

因在 $\lambda = \pm b$ 处 Jacobi 矩阵不存在, 故结合计算精度选取合理步长的有限差分法替代为

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}, \tau) \approx \begin{bmatrix} \frac{f_1(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}_1)}{\Delta \mathbf{X}_1} & \frac{f_1(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}_2)}{\Delta \mathbf{X}_2} & \dots & \frac{f_1(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}_n)}{\Delta \mathbf{X}_n} \\ \frac{f_2(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}_1)}{\Delta \mathbf{X}_1} & \frac{f_2(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}_2)}{\Delta \mathbf{X}_2} & \dots & \frac{f_2(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}_n)}{\Delta \mathbf{X}_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_n(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}_1)}{\Delta \mathbf{X}_1} & \frac{f_n(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}_2)}{\Delta \mathbf{X}_2} & \dots & \frac{f_n(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}_n)}{\Delta \mathbf{X}_n} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

方程(17)以 $(\mathbf{X}_k, \mathbf{I})$ 为初值积分一个周期 T 获得系统迭代点 \mathbf{X}_{k+1} 和转迁矩阵 $DP(\mathbf{X}_k)$. 令 $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k+1}$ 作为下次迭代的初始值, 迭代到满足精度要求的不动点 \mathbf{X}_F , 就是式(13)的 m 倍周期运动 $\mathbf{X}(\tau)$ 的不动点. 找到

稳定周期解后,引入分岔参数 Ω ,采用延续追踪法进行周期追踪.设已求得 $\Omega = \Omega_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时,周期 T 的不动点为 X_k ,用 Euler 积分法得 $\Omega = \Omega_{k+1}$ 点对应不动点 X_{k+1} 的初始不动点 $X_{k+1,0}$ 的预测公式^[14]:

$$\begin{cases} X_{k+1,0} = X_k - [G_X(\Omega_k, X_k)]^{-1} \times G_\Omega(\Omega_k, X_k) \times \Delta\Omega, \\ \Omega_{k+1} = \Omega_k + \Delta\Omega, \end{cases} \quad (21)$$

式中, $\Delta\Omega$ 为追踪步长, $G_X(\Omega_k, X_k) = I - DP(\Omega_k, X_k)$, $G_\Omega(\Omega_k, X_k) = P_\Omega(\Omega_k, X_k)$. $P_\Omega(\Omega_k, X_k)$ 由打靶法建立的微分方程组(22)求得

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = f(X, \Omega, \tau), & x \in R^n, \\ \frac{dP_\Omega}{d\tau} = \frac{\partial f(X, \Omega, \tau)}{\partial X} \cdot P_\Omega + \frac{\partial f(X, \Omega, \tau)}{\partial \lambda}, & P_\Omega \in R^n, \end{cases} \quad (22)$$

式中

$$f_\Omega(X, \Omega, \tau) = f_e \Omega \{ 2\cos(\Omega\tau) + \Omega\sin(\Omega\tau) \} [0_{1 \times 13} \quad 1]^T + \alpha\sin(\Omega\tau) [0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad -4]^T / 4. \quad (23)$$

以 (X_k, Ω_k) 为初值积分一个映射周期 T 获得以 $(X_k, P_\Omega(\Omega_k, X_k))$ 为追踪参数下的新不动点.

4 系统动态特性综合分析和解域界

不失一般性,取量纲一仿真参数:

$$\begin{aligned} \xi_{i1} = \xi_{i2} = 0.01 \quad (i = x, y, z), \quad \xi_{h1} = \xi_{h2} = 0.0125, \quad \xi_h = 0.05, \\ k_{i1} = k_{i2} = 1.0, \quad k_{h1} = k_{h2} = 0.5, \quad k_h = 1 + \alpha\cos(\Omega\tau), \\ f_{pm} = 0.5, \quad f_{av} = 0.0, \quad f_e = 0.2, \quad b = 1.0. \end{aligned}$$

在参数解域界平面内,齿面冲击/运动周期 (I/P) 类型用特定的颜色表示,其分岔曲线为解域界.齿轮系统常常稳定运行于短周期状态下,为突出低周期 ($P < 64$) 分岔特性,在 I/P 分岔图中对周期数 $P \geq 65$ 的长周期、拟周期 (quasi- P) 和混沌 (chaos) 运动均用 “ I/N ” 表示.系统的倍化 (PD bif)、鞍结 (NS bif)、擦切^[17] (G bif) 分岔定义参见文献[14],不再赘述.当系统从 I/P 向 $I/(3P)$ 状态转迁时,系统发生了齿轮系统典型的周期 3 分岔 (3T bif),依次类推.

时变啮合刚度系数 α 表征齿轮啮合重合度,其值表征单双对齿啮合不均匀性程度.频率比 Ω 表征系统转速,其值表征系统转速高低.故构建 $\Omega \times \alpha \in [1.2, 1.7] \times [0.05, 0.55]$ 参数平面(图 3),在平面内均匀地选取 501×501 个胞元构建 I/P 及相应的 $\delta_{NMDC}, \delta_{BMDC}, \delta_{DLC}$ 解域界结构.

I/P 解域界结构(图 3(a))表明:在参数平面内,以周期 1 ($P = 1$, 下同) 运动为主,存在 $P = 2, 3, 9, 10, 18, 32$ 和 quasi- P 、chaos 等运动状态;3 种齿面冲击共存,以单边冲击为主.在 $\alpha < 0.15$ 区域内,随 Ω 递增系统发生了 SN bif 和 3T bif,使系统处于 $0/1, 1/1, 1/3$ 运动状态.在 $0.15 < \alpha < 0.3$ 区域内,系统通过 PD bif、3T bif、HP bif 等分岔方式进入混沌运动.在 $0.3 < \alpha < 0.55$ 区域内,随 Ω 递增系统发生了 G bif、3T bif、3T chaos 和 CIC bif 等分岔.在 $\Omega = 1.6$ 附近表现出复杂的动力学行为转迁,即在该胞元内动力学行为极其不稳定.沿 α 方向在 $\Omega < 1.25$ 区间内,系统以 $P = 1$ 运动的 3 种冲击转迁为主.在 $1.25 < \Omega < 1.5$ 区间,系统的动力学行为较为稳定.当 $\Omega > 1.5$ 时,系统通过 HP bif、3T bif 和 CIC bif 的形式使系处于周期-混沌-周期运动状态.参数解域界结构表明齿轮啮合重合度是影响齿轮冲击的主要因素,随 α 递增齿面脱啮、齿背接触的概率增大.在系统的共振频率附近多周期、混沌现象加剧,并出现了齿轮传动系统典型的周期 3 分岔行为.

系统 I/P 解域界结构对应的齿面脱啮、齿背接触和动载特性如图 3(b)—3(d) 所示.图 3(b) 表明,齿轮脱啮程度随周期分岔和齿面冲击的转迁而阶跃突变,在 $1/1$ 解域内其脱啮程度并不一致,在 G bif 分岔线附近 δ_{NMDC} 达到极值 0.55 左右.随 α 增大其脱啮程度加剧,而在 $1/N$ 和 $2/N$ 解域内 δ_{NMDC} 值并未达到极值,即多周期或混沌运动下齿面脱啮未必最严重.图 3(c) 表明,在双边冲击的 $2/1$ 域界内其齿背接触最为严重达到

极值 0.38 左右,在 $2/3$ 、 $2/N$ 域界内其齿背接触状态随 α 递增而加剧但没有达到极值,即齿轮啮合的双边冲击程度与系统混沌现象并无必然联系.图 3(d) 表明,系统的 δ_{DLC} 随齿面冲击和周期运动分岔出现了突变,在同一解域内其动载系数随 α 递增而增大,在无冲击的 $0/1$ 解域内其值较小,在双边冲击的 $2/1$ 、 $2/N$ 域界内达到极值 2.8.

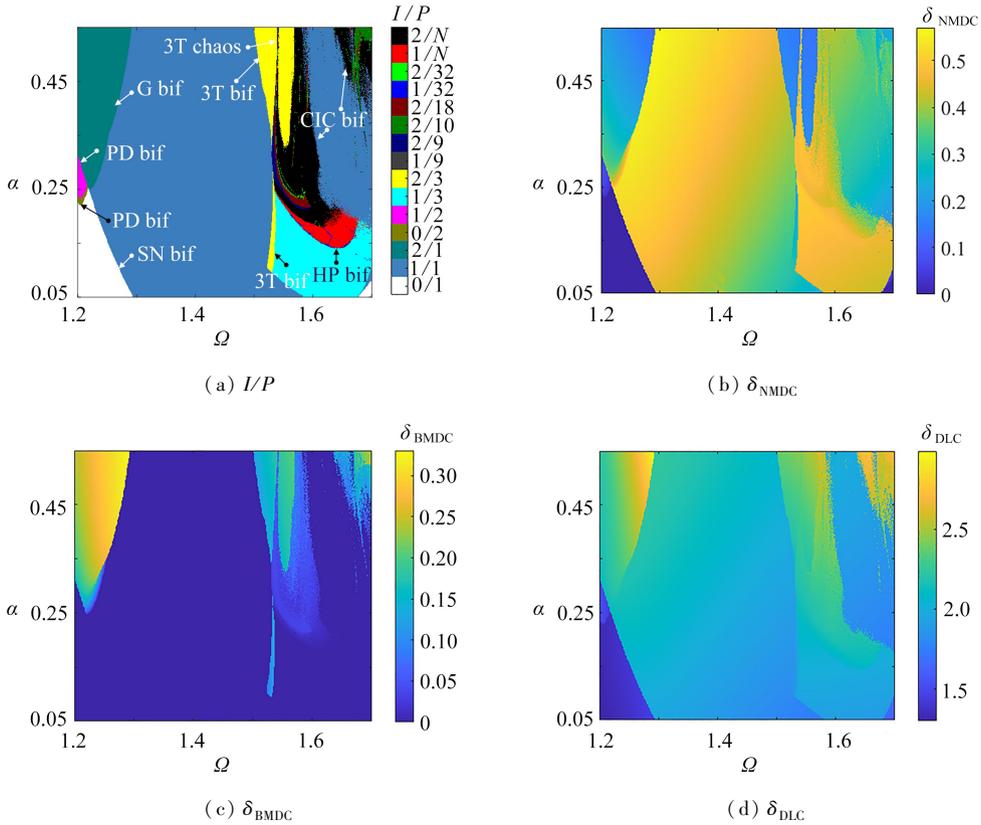


图 3 $\Omega \times \alpha$ 平面动态特性解域边界结构

Fig. 3 Dynamic properties solution domain boundary structures in the $\Omega \times \alpha$ 2-parameter plane

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

为验证 CPNF 法求解的正确性,沿 α 方向以 0.05 等距选取截面,用 Runge-Kutta 法对 Ω 参数分岔进行数值计算获得三维 I/P 分岔图(图 4).

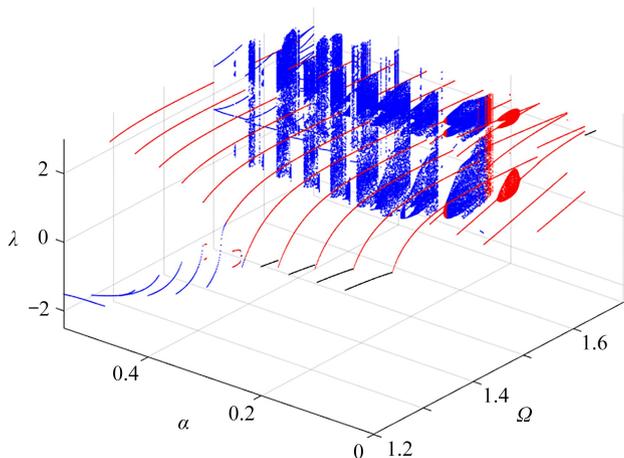


图 4 $\Omega \times \alpha$ 双参分岔图

Fig. 4 The bifurcation diagram in the $\Omega \times \alpha$ 2-parameter plane

图 4 中,黑、红、蓝色映射点分别对应无冲击、单边冲击和双边冲击,其 I/P 分岔过程与图 3(a) 相匹配验

证了解界域结构的正确性.因 CPNF 法对周期运动求解追踪过程不用计算瞬态,故较 Runge-Kutta 法求解效率高.

为更清晰地展示周期分岔与齿面脱啮的关联关系,取 $\alpha = 0.20, 0.40$ 的分岔图如图 5 所示.图 5(a)中的系统通过 SN bif、3T bif、HP bif 和激变(CIC bif)分岔方式使系统处于 $0/1, 1/1, 2/3, 1/3, \text{quasi-}P, 2/\text{chaos}, 1/\text{chaos}, 1/1$ 运动.图 5(b)中系统通过 SN bif、3T bif、PD bif 和 C bif 分岔使系统处于 $2/1, 1/1, 2/3, 2/\text{chaos}$ 运动状态.HP bif 和 SN bif 可通过 CPNF 追踪中 Floquet 乘子 $|\lambda|_{\max}$ 来判定,而 G bif 与 SN bif 是通过齿面冲击类型和 Floquet 乘子共同判别,若穿越 $\lambda = \pm b$ 截面时 Floquet 乘子从实数轴方向穿越单位圆则发生了鞍结分岔,否则为擦切分岔.

取 $\alpha = 0.20$ 截面(图 5(a))的部分 Poincaré 映射和相图(图 6)验证 CPNF 求解的分岔过程. $\Omega = 1.531$ 时系统为 $1/1$ 运动(图 6(a))经 3T 分岔为 $2/3$ 运动(图 6(b)), $P = 3$ 迁为 3 个焦点(图 6(c))、Hopf 圈(图 6(d))、扭曲锁相(图 6(e))直至形成混沌运动(图 6(f)).即图 5 验证了通过周期 3 分岔和 Hopf 分岔使系统处于 $1/1, 2/3, 1/1$, 拟周期和混沌运动.

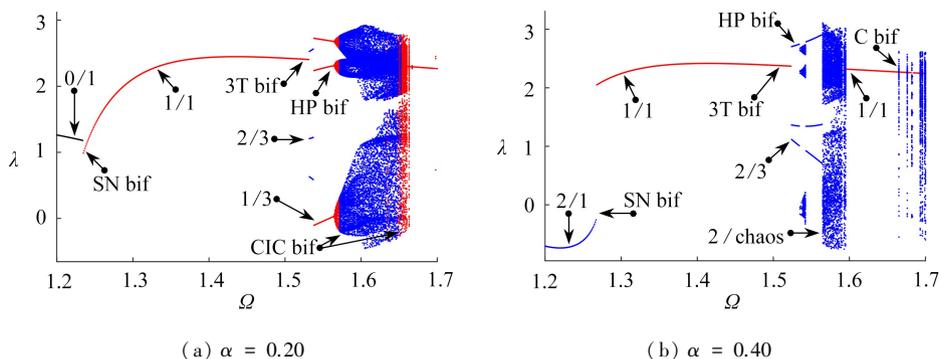


图 5 分岔图

Fig. 5 The bifurcation diagram via α

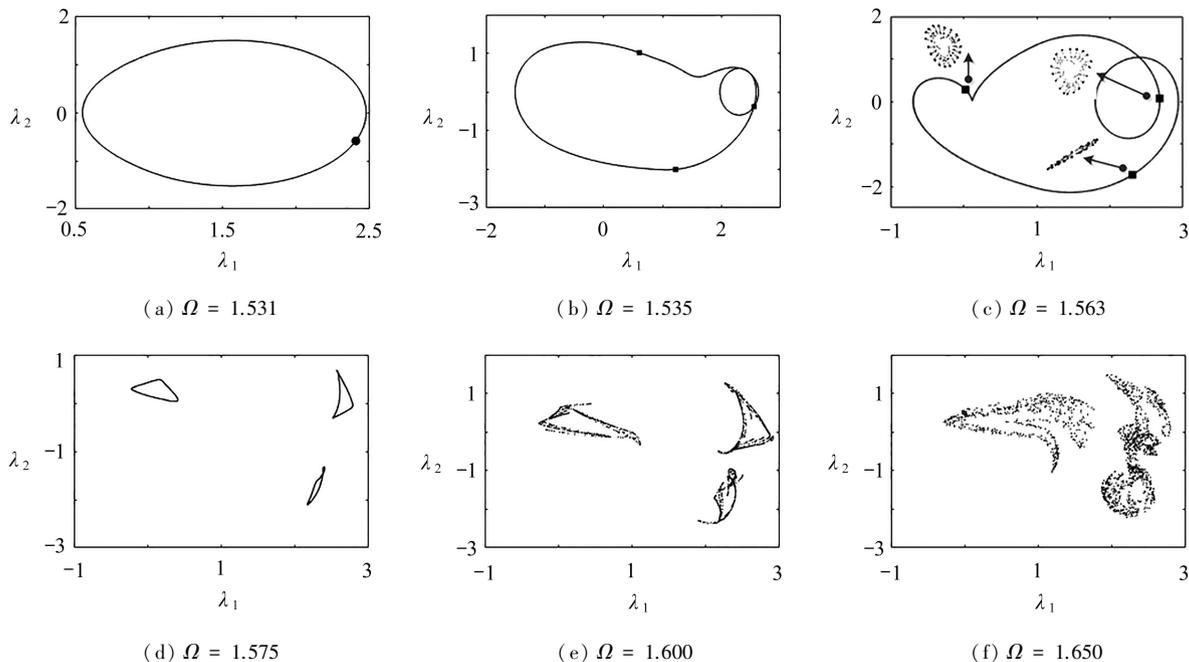


图 6 Poincaré 映射图和相图

Fig. 6 Poincaré and phase maps

图 7 为图 5(b)中 $\alpha = 0.40$ 时 I/P 部分的 Poincaré 映射和相图. $\Omega = 1.523$ 时系统处于 $0/1$ 运动(图 7(a))

经周期3分岔为2/3运动(图7(b)), $P = 3$ 再经周期3分岔为 $P = 9$ (图7(c))、 $P = 18$ (图7(d))、……、混沌运动(图7(e)).图7验证了系统经周期3分岔进入混沌的过程.

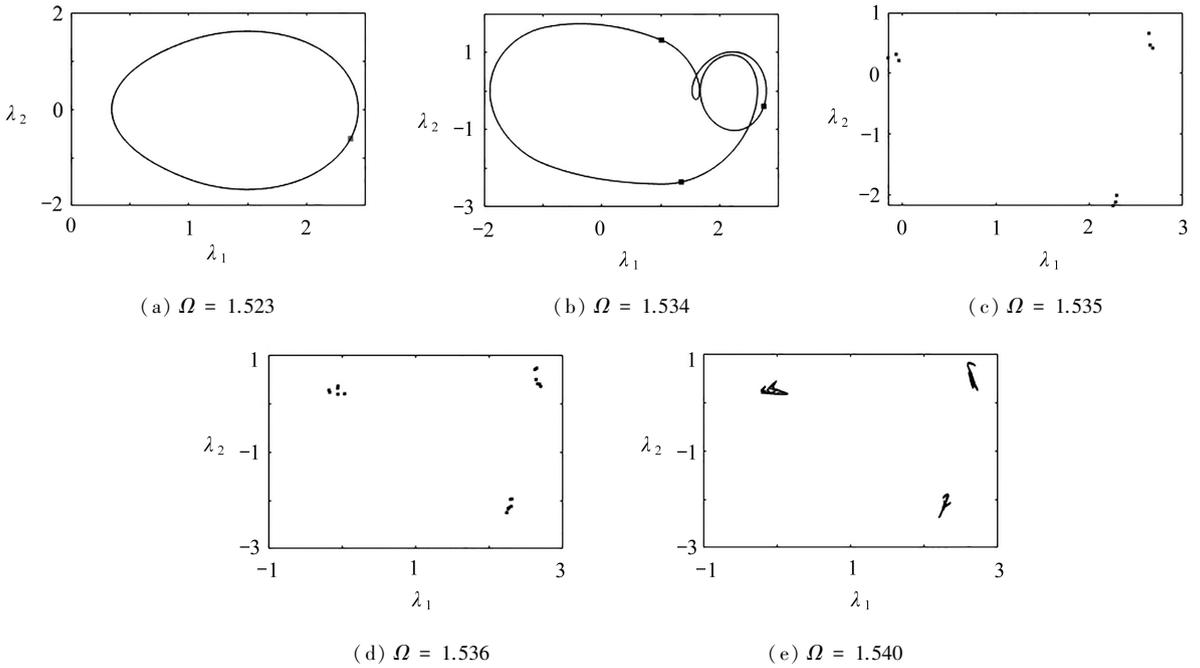


图7 Poincaré映射图和相图

Fig. 7 Poincaré and phase maps

取 $\alpha = 0.40$ 截面(图5(b))对应的齿面脱啮比、齿背接触比和动载系数分布图(图8).齿面脱啮在齿面冲击转迁截面发生了突变,在1/1周期区间其脱啮程度随 Ω 递增而减弱(图8(a)).齿背接触在双边冲击区域随 Ω 递增而加剧,在阵发性混沌区域存在突变现象(图8(b)).动载系数随齿面冲击和周期分岔产生了突变,随齿面冲击加剧其动载系数俱增(图8(c)),在单边冲击区其 δ_{DLC} 随 Ω 递增而递减,在双边冲击区随 Ω 递增而递增.即齿面冲击和周期分岔是影响齿面脱啮、齿背接触及动载特性的主要因素.

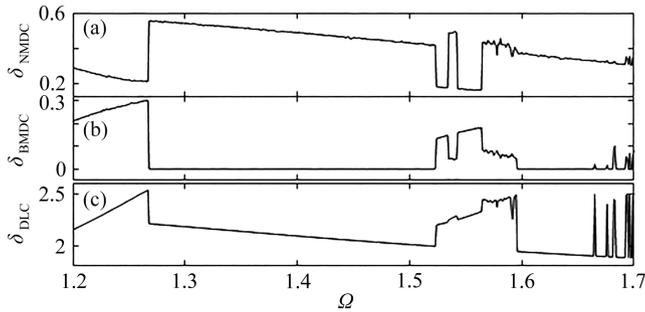


图8 脱啮比、动载系数分布图

Fig. 8 The δ_{NMDC} , δ_{BMDC} and δ_{DLC} distribution diagrams

时变啮合刚度和频率比平面内的 I/P 、 δ_{DLC} 、 δ_{BMDC} 和 δ_{NMDC} 解域界结构揭示了系统随参数分岔、脱啮、冲击、动载荷的转迁规律及其关联关系.针对不同速度车型要求,依据解域界结构对转速和重合度参数进行匹配优化.选取参数时尽量避开混沌、双边冲击和动载较大的参数区域,尽可能在0/1区域选择合理的重合度或转速参数能有效地降低啮合冲击、脱啮和动载对齿轮箱的影响,可延长齿轮箱的服役周期、降低设备维护费用.

5 结 论

本文针对 7 自由度直齿锥齿轮传动系统的周期分岔、齿面冲击、脱啮和动载特性问题,采用胞映射理论构建了重合度和转速激励参数平面,用 CPNF 法进行了数值求解获得了 I/P , δ_{NMDC} , δ_{BMDC} 和 δ_{DLC} 解域界结构,得到了如下结论:

1) 参数平面内基于胞映射理论的 CPNF 法解域界结构求解方法是一种高效的数值求解方法。

2) 含间隙的锥齿轮系统存在鞍结、倍化、Hopf、激变、擦切和周期 3 等分岔现象,随时变啮合刚度系数增加其齿面冲击加剧,在啮频附近系统的周期运动和齿面冲击最为严重。

3) 系统分岔和齿面冲击转迁导致其齿面脱啮和齿背接触及动载行为产生了突变,在各 I/P 区域内其值也随参数波动。随时变啮合刚度系数增大其动态特性加剧。在 $1/1$ 和 $2/N$ 区域其脱啮最为严重,在 $2/1$ 区域内齿背接触最为严重,其动载系数最大。

参考文献(References):

- [1] 王三民,沈允文,董海军. 含间隙和时变啮合刚度的弧齿锥齿轮传动系统非线性振动特性研究[J]. 机械工程学报, 2003, **39**(2): 28-32.(WANG Sanmin, SHEN Yunwen, DONG Haijun. Nonlinear dynamical characteristics of a spiral bevel gear system with backlash and time-varying stiffness[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2003, **39**(2): 28-32.(in Chinese))
- [2] 黄康,孙亚斌,程彪. 螺旋锥齿轮副非线性动力学研究[J]. 合肥工业大学学报, 2018, **41**(8): 1009-1013.(HUANG Kang, SUN Yabin, CHENG Biao. Research on nonlinear dynamics behavior of spiral bevel gear pair [J]. *Journal of Hefei University of Technology*, 2018, **41**(8): 1009-1013.(in Chinese))
- [3] WANG Z, PU W, PEI X, et al. Nonlinear dynamical behaviors of spiral bevel gears in transient mixed lubrication[J]. *Tribology International*, 2021, **160**: 107022.
- [4] HUA X, CHEN Z. Effect of roller bearing elasticity on spiral bevel gear dynamics[J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2020, **12**(7): 1-9.
- [5] CAO W, HE T, PU W, et al. Dynamics of lubricated spiral bevel gears under different contact paths[J]. *Friction*, 2022, **10**(2): 247-267.
- [6] 李飞,袁茹,朱慧玲,等. 计及齿面摩擦的弧齿锥齿轮动态特性[J]. 航空动力学报, 2020, **35**(8): 1687-1694.(LI Fei, YUAN Ru, ZHU Huiling, et al. Dynamic characteristics of spiral bevel gear considering tooth surface friction[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2020, **35**(8): 1687-1694.(in Chinese))
- [7] 张磊,唐从刚,王德全,等. 小波 Galerkin 法在非线性的分岔问题求解中的应用[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(1): 27-35.(ZHANG Lei, TANG Conggang, WANG Dequan, et al. Application of wavelet Galerkin method to solution of nonlinear bifurcation problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(1): 27-35.(in Chinese))
- [8] 王树国,张艳波,刘文亮,等. 多间隙二级齿轮非线性振动分岔特性研究[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(2): 173-183.(WANG Shuguo, ZHANG Yanbo, LIU Wenliang, et al. Nonlinear vibration bifurcation characteristics of multi-clearance 2-stage gear systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(2): 173-183.(in Chinese))
- [9] GOU X, ZHU L, CHEN D. Bifurcation and chaos analysis of spur gear pair in two-parameter plane[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, **79**(3): 2225-2235.
- [10] LIU X, JIANG J, HONG L, et al. Wada boundary bifurcations induced by boundary saddle collision[J]. *Physics Letters A*, 2018, **383**(2/3): 170-175.
- [11] 林何,洪灵,江俊,等. 受激并车弧齿锥齿轮系统两参量平面上解域界结构[J]. 振动工程学报, 2021, **34**(5): 1020-1026.(LIN He, HONG Ling, JIANG Jun, et al. Solution domain structures of power combining spiral bevel gear system under excitations in two-parameter plane[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2021, **34**(5):

- 1020-1026.(in Chinese))
- [12] 李同杰, 朱如鹏, 鲍和云, 等. 行星齿轮传动系的周期运动及其稳定性[J]. 振动工程学报, 2013, **26**(6): 815-822.(LI Tongjie, ZHU Rupeng, BAO Heyun, et al. Coexisting periodic solutions and their stability of a nonlinear planetary gear train[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2013, **26**(6): 815-822.(in Chinese))
- [13] 田亚平, 徐璐, 宋佩颖, 等. 基于 OGY 的含间隙单级齿轮系统混沌运动控制[J]. 振动与冲击, 2020, **39**(14): 17-21.(TIAN Yaping, XU Lu, SONG Peijie, et al. Chaos control of a single-stage spur gear system with backlash based on the OGY method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, **39**(14): 17-21.(in Chinese))
- [14] 田亚平, 褚衍东, 饶晓波. 双参平面内单级直齿圆柱齿轮系统动力学特性综合分析[J]. 振动工程学报, 2018, **31**(2): 219-225.(TIAN Yaping, CHU Yandong, RAO Xiaobo. Dynamic characteristic analysis of a single-stage spur gear system in two-parameter plane[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2018, **31**(2): 219-225.(in Chinese))
- [15] 陈思宇, 谭儒龙, 郭晓冬. 直齿锥齿轮啮合刚度计算方法研究[J]. 机械传动, 2021, **45**(9): 62-67.(CHEN Siyu, TANG Rulong, GUO Xiaodong. Research on calculation method of meshing stiffness of straight bevel gear[J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2021, **45**(9): 62-67.(in Chinese))
- [16] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学-振动、冲击、噪声[M]. 北京: 科学出版社, 1997.(LI Runfang, WANG Jianjun. *Gear System Dynamics Vibration, Shock and Noise*[M]. Beijing: Science Press, 1997.(in Chinese))
- [17] 史美娇, 徐慧东, 张建文. 双侧弹性约束悬臂梁的非光滑擦边动力学[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(6): 619-630.(SHI Meijiao, XU Huidong, ZHANG Jianwen. Non-smooth grazing dynamics for cantilever beams with bilateral elastic constraints[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(6): 619-630.(in Chinese))