

# 基于键型近场动力学非连续 Galerkin 有限元法的爆炸毁伤模拟\*

成嘉禾, 顾鑫, 章青

(河海大学 力学与材料学院, 南京 211100)

(本刊编委章青来稿)

**摘要:** 近场动力学是一种积分型非局部的连续介质力学理论,已广泛应用于固体材料和结构的非连续变形与破坏分析中,其数值求解方法主要采用无网格粒子类的显式动力学方法.近年来,弱形式近场动力学方程的非连续 Galerkin 有限元法得到发展,该方法不仅可以描述考察体的非局部作用效应和非连续变形特性,还可以充分利用有限单元法高效求解的特点,并继承了有限元法能直接施加局部边界条件的优点,可有效避免近场动力学的表面效应问题.该文阐述了键型近场动力学的非连续 Galerkin 有限元法的基本原理,导出了计算列式,给出了具体算法流程和细节,计算模拟了脆性玻璃板动态开裂分叉问题,并对爆炸冲击荷载作用下混凝土板的毁伤过程进行了计算分析.研究表明,该方法能够再现爆炸冲击荷载作用下结构的复杂破裂模式和毁伤破坏过程,且具有较高的计算效率,是模拟结构爆炸冲击毁伤效应的一种有效方法.

**关键词:** 近场动力学; 非连续 Galerkin 有限单元法; 爆炸毁伤; 混凝土

**中图分类号:** O242; O342 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430338

## Blast Damage Simulation With the Discontinuous Galerkin Finite Element Method of Bond-Based Peridynamics

CHENG Jiahe, GU Xin, ZHANG Qing

(College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 211100, P.R.China)

(Contributed by ZHANG Qing, M. AMM Editorial Board)

**Abstract:** The peridynamics (PD) as an integral non-local continuum mechanics theory, is widely used in the discontinuous deformation and failure analyses of solid materials and structures, mainly with the explicit dynamic solution method for meshless particles. In recent years, the discontinuous Galerkin finite element method for weak-form peridynamic equations has been developed. This method can not only describe the non-local action effects and discontinuous deformation characteristics of the investigated body, but also make full use of the finite element method. It has the advantages of efficient solution, direct application of local boundary conditions, and effective avoidance of the surface effects in peridynamics. The basic principle of the discontinuous

\* 收稿日期: 2022-10-25; 修订日期: 2023-01-07

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(12172121;U1934206);中央高校科研业务费(B210201031)

**作者简介:** 成嘉禾(1997—),男,硕士生(E-mail: jexooooo@163.com);

顾鑫(1991—),男,副研究员,硕士生导师(E-mail: xingu@hhu.edu.cn);

章青(1963—),男,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: lxzhangqing@hhu.edu.cn).

**引用格式:** 成嘉禾,顾鑫,章青. 基于键型近场动力学非连续 Galerkin 有限元法的爆炸毁伤模拟[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(4): 394-405.

Galerkin finite element method of bond-based peridynamics was expounded, the calculation formula was derived, the specific algorithm flowchart and details were given, and the dynamic cracking and bifurcation problems of brittle glass plates were simulated. The damage processes of concrete slabs under blast impact loads were calculated and analyzed. The research results show that, the proposed method can predict the complex rupture mode and the damage process of the structure under blast impact loads, with high computational efficiency, and makes an effective way to the simulation of the structural blast damage effects.

**Key words:** peridynamics; discontinuous Galerkin FEM; explosive damage; concrete

## 0 引言

随着全世界范围内因政治、经济和宗教等因素引发各类型爆炸事故的发生,国内外对爆炸研究的关注度有所提升<sup>[1]</sup>.爆炸荷载作为一种非常规极端荷载,以其传播迅速、峰值大、作用时间短以及具有负超压等特点<sup>[2]</sup>,极易导致目标结构发生灾变破坏,造成严重的人员伤亡和经济损失<sup>[3]</sup>.为了确保结构安全,研究爆炸荷载作用下结构的毁伤破坏效应,进而揭示爆炸毁伤破坏的作用机制,具有重要意义.

目前,数值计算与仿真技术在结构爆炸毁伤模拟中发挥重要作用<sup>[4]</sup>.Ruwan等<sup>[5]</sup>针对钢筋混凝土框架进行爆炸荷载数值模拟,研究了框架结构在爆炸荷载作用下的倒塌机制;Xu等<sup>[6]</sup>基于ANSYS/LS-DYNA对爆炸荷载作用下钢筋混凝土板产生的碎片进行模拟分析;朱劲松等<sup>[7]</sup>采用ALE算法,模拟了炸药爆炸后桥梁结构的动态响应和毁伤失效过程.上述数值模拟方法大都建立在经典连续介质力学基础上,在求解裂纹等不连续处的微分方程时遭遇奇异性困扰<sup>[8]</sup>,不能自发地模拟裂纹的生成、扩展,也无法直接描述碎块形成与剥离的过程,模拟结构爆炸毁伤的能力尚有不足.

近场动力学(peridynamics, PD)<sup>[9-12]</sup>兼具连续介质力学和分子动力学的特点,作为一种新兴的积分型非局部连续介质力学方法,通过求解空间内一系列包含物性信息的物质点的运动方程组,以描述材料的变形和破坏过程,在固体破坏问题分析中具有独特优势<sup>[13]</sup>.近场动力学主要采用强形式方程的无网格粒子类显式动力学方法进行求解<sup>[14-15]</sup>,该类解法要求结构离散为高密度的均匀离散点阵,离散粒子或结点数量众多,计算效率低,且相比于传统局部有限元方法,近场动力学方法还存在表面效应问题与自然边界条件施加的困难.

近年来,弱形式近场动力学方程的非连续 Galerkin 有限元方法得到发展<sup>[16-18]</sup>.非连续 Galerkin 有限元法通过形函数插值构建单元内连续的位移场,采用分段连续位移场代替近场动力学的位移近似场,再求解弱形式的近场动力学方程,在有限元框架内实现基于近场动力学理论的数值计算,以充分利用有限元法的通用高效求解器.需要指出,局部模型的非连续 Galerkin 有限元方法需要额外设定单元间的数值通量限制条件<sup>[19]</sup>,但在近场动力学理论中,通过各离散点之间的键建立了单元间的连通性,无需增加额外的限制条件.该方法采用 Gauss 积分点进行积分运算,既放松了有限元法对位移解连续性的要求,又保持了有限元格式,还继承了有限元法能直接施加局部边界条件、约束和接触条件以及适应非均匀网格的优点,并可以通过修正边界附近积分点上键对应的微弹性模量,确保整体材料等效性能均匀分布,可有效避免传统近场动力学方法的表面效应问题.2011年,Chen等<sup>[20]</sup>开创性地将非连续 Galerkin 有限元法应用于近场动力学模型,并求解了一维问题;Aksoy等<sup>[21]</sup>利用非连续 Galerkin 有限元法构建了键型近场动力学的控制方程;2015年,键型近场动力学的非连续 Galerkin 有限元法被置入大型商业软件LS-DYNA中;Ren等<sup>[22-23]</sup>将该方法应用于脆性材料和纤维增强复合材料的破坏分析中.但总体来看,国内外现有文献对于近场动力学非连续 Galerkin 有限元方法的数值实施方案描述不够清晰,缺少具体算法细节,且鲜有大变形破坏问题的研究成果报道.

本文阐述了键型近场动力学的非连续 Galerkin 有限元法的算法细节,计算模拟了脆性玻璃板动态开裂过程中的裂纹分叉问题.在此基础上,采用该方法对爆炸冲击荷载作用下混凝土板的毁伤过程进行了建模分析,获得了混凝土板损伤产生、裂纹扩展直至破坏的全过程,为结构爆炸毁伤过程的破坏模拟提供了新的途径.

## 1 键型近场动力方程及其弱形式

近场动力学将研究对象离散为一系列物质点,采用空间积分型运动方程描述物质点的运动和变形,物质点的受力变形等状态取决于该点与其所在的有限空间内其他物质点间的非局部相互作用.考虑三维空间中

的计算域  $\Omega \in R^3$ , 对于任一物质点  $\mathbf{X}$  与其周围一定范围内的其他物质点  $\mathbf{X}' \in \Omega$ :  $\|\mathbf{X}' - \mathbf{X}\| \leq \delta$ , 在时刻  $t$  存在相互作用力, 则近场动力学运动方程为

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \int_{H_x} \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{X}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \boldsymbol{\xi}) dV_{X'} + \mathbf{b}(\mathbf{X}, t), \quad (1)$$

其中,  $\rho$  为物质密度,  $\mathbf{u}$  为物质点位移矢量,  $H_x$  表示以  $\delta$  为半径的近场邻域,  $\mathbf{f}$  为物质点  $\mathbf{X}$  和点  $\mathbf{X}'$  的近场动力学键力密度函数,  $\mathbf{b}$  为体力密度函数,  $V_{X'}$  为物质点体积.

在键型近场动力学中, 对于均匀微观弹性材料, 物质点间“键”所蕴含的能量密度  $\omega$  与键力密度函数满足如下关系<sup>[14]</sup>:

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}), \quad (2)$$

式中,  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{X}' - \mathbf{X}$  为两物质点的相对位置,  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}(\mathbf{X}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  表示两物质点的相对位移.

键型近场动力学中的微观弹性材料可以是各向同性或各向异性材料, 经典微弹脆性 (prototype micro-brittle, PMB) 材料是线性各向同性的, 其能量密度  $\omega$  可以表征为<sup>[14]</sup>

$$\omega(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} c s^2 |\boldsymbol{\xi}|, \quad (3)$$

式中,  $c = 18k/(\pi\delta^4)$  是微弹性模量<sup>[22]</sup>,  $k$  为体积模量;  $s = (|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}| - |\boldsymbol{\xi}|)/|\boldsymbol{\xi}|$  表示键的伸长率, 则物质点间的键力密度函数为<sup>[14]</sup>

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = cs \frac{\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\xi}|}. \quad (4)$$

材料的损伤通过物质点之间的相互作用进行描述, 当“键”的伸长率  $s$  超过了其临界值  $s_0$  时, “键”断开, 损伤发生, 相应的键力将不可逆地永久消除<sup>[15]</sup>. 临界伸长率  $s_0$  与经典断裂力学中的断裂能释放率  $G_c$  有关, 基于能量守恒原理, 可以求得三维键型近场动力学模型的临界伸长率<sup>[22]</sup>, 具体为

$$s_0 = \sqrt{\frac{10G_c}{\pi c \delta^5}}. \quad (5)$$

当物质点  $\mathbf{X}$  具有完整近场邻域  $H_x(\mathbf{X}, \delta)$  时, 通过假设物质点的弹性能密度与其所有键在各向同性变形条件下的应变能密度相等, 建立刚度系数与微弹性模量之间的等效关系<sup>[22]</sup>:

$$3E = \sum_{\boldsymbol{\xi}} \frac{1}{2} c_x |\boldsymbol{\xi}| \Delta V_{X'}, \quad (6)$$

式中,  $E$  为弹性模量. 为满足弹性能密度与应变能密度的一致性, 根据式(6)的等效关系, 人为修正边界周围物质点间键的微弹性模量, 从而确保整体材料等效性能的均匀分布, 避免近场动力学的表面效应问题, 具体为椭球体校准算法, 通过键之间的球坐标关系校正微弹性模量, 可参考文献[24].

式(1)的解属于受限的 Banach 空间, 记计算域  $\Omega$  的位移边界为  $S_u$ , 位移解  $\mathbf{u}$  和权函数  $\mathbf{v}$  定义在  $L^2$  函数空间内, 即

$$\begin{cases} S(\Omega) = \{\mathbf{u}(\mathbf{X}) \in L^2(\Omega) \mid \mathbf{u}(\mathbf{X}_g) = \mathbf{g}(\mathbf{X}_g), \forall \mathbf{X}_g \in S_u\}, \\ S'(\Omega) = \{\mathbf{v}(\mathbf{X}) \in L^2(\Omega) \mid \mathbf{v}(\mathbf{X}_g) = 0, \forall \mathbf{X}_g \in S_u\}, \end{cases} \quad (7)$$

其中,  $S(\Omega)$  为 Banach 仿射空间,  $S'(\Omega)$  为子空间,  $\mathbf{X}_g$  为 Gauss 点坐标,  $\mathbf{g}(\mathbf{X}_g)$  为 Gauss 点在位移边界的已知值.

运动方程两端同乘以权函数矩阵  $\mathbf{v}(\mathbf{X})$  后, 在求解域内积分, 得到积分弱形式的控制方程:

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{X}) dV_x = \int_{\Omega} \int_{H_x} \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) dV_{X'} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{X}) dV_x + \int_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{X}) dV_x, \\ \forall \mathbf{u}(\mathbf{X}) \in S(\Omega), \mathbf{v}(\mathbf{X}) \in S'(\Omega). \quad (8)$$

## 2 键型近场动力学的非连续 Galerkin 有限元方法

如图 1 所示, 传统有限元域相邻单元共享节点, 而非连续 Galerkin 有限元法离散采用非连续网格, 即相

邻单元间不共用节点,以反映非连续变形效应,则节点总数等于所有单元的节点数之和。

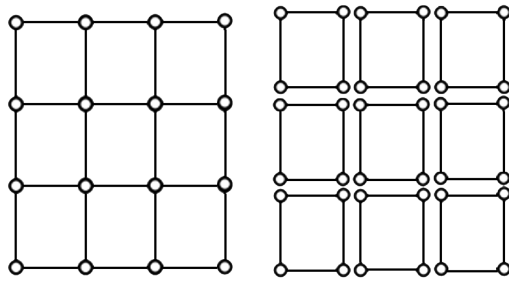


图 1 传统有限元的连续网格(左)与非连续 Galerkin 有限元的网格(右)<sup>[22]</sup>

Fig. 1 The continuous mesh of traditional finite elements (left) and the mesh of non-continuous Galerkin finite element (right)<sup>[22]</sup>

类似于连续 Galerkin 有限元法<sup>[25]</sup>,位移解  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$  和权函数  $\mathbf{v}(\mathbf{X})$  分别由形函数插值得到

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{N}(\mathbf{X})\mathbf{d}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{X}) = \mathbf{N}(\mathbf{X})\mathbf{v}^i, \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{d}$  为单元节点位移列向量,  $\mathbf{v}^i$  为节点对应的权函数列向量。

将求解域  $\Omega$  划分为若干个单元,并选择单元体积  $\Omega_e$  作为积分域,将近似解和权函数代入近场动力学积分弱形式方程(8),可得到

$$\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T(\mathbf{X})\rho\mathbf{N}(\mathbf{X})\ddot{\mathbf{d}}dV_X = \int_{\Omega_e} \left( \int_{h_X} f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) dV_{X'} \right) \mathbf{N}^T(\mathbf{X}) dV_X + \int_{\Omega_e} \mathbf{b}(\mathbf{X})\mathbf{N}^T(\mathbf{X}) dV_X. \quad (10)$$

对上式中的积分进行离散化处理,即可得到离散化的弱形式方程:

$$\sum_{g=1}^{n_g} \mathbf{N}^T(\mathbf{X}_g)\rho\mathbf{N}(\mathbf{X}_g)\ddot{\mathbf{d}}V_g = \sum_{g=1}^{n_g} \mathbf{N}^T(\mathbf{X}_g) \left( \sum_{g'=1}^{n_{g'}} f(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_{g'}), \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_{g'})) V_{g'} \right) V_g + \sum_{g=1}^{n_g} \mathbf{N}^T(\mathbf{X}_g)\mathbf{b}(\mathbf{X}_g)V_g, \quad (11)$$

式中,  $n_g$  表示单元  $\Omega_e$  内 Gauss 点的总数,  $n_{g'}$  是 Gauss 点  $\mathbf{X}_g$  近场域内的 Gauss 点数量,  $V_g$  是 Gauss 点  $\mathbf{X}_g$  对应的体积,  $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_{g'})$  是 Gauss 点  $\mathbf{X}_g$  与其近场域内的 Gauss 点  $\mathbf{X}_{g'}$  之间键的相对位置,  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_{g'})$  为两 Gauss 点间的相对位移,  $\sum_{g'=1}^{n_{g'}} f(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_{g'}), \boldsymbol{\xi}(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_{g'})) V_{g'}$  为式(11)右端第一项第一重积分求和的结果,反映了近场域内所有 Gauss 点的相互作用,也体现了 Gauss 点间存在跨越单元的非局部作用效应,并通过 Gauss 点间键的断开实现了损伤开裂模拟。外层积分的积分域为单元自身,表征单元行为,进而可扩展到在整个构型积分,以表征系统的力学行为。

将式(11)中的相关项记为单元质量矩阵  $\mathbf{M}^e$  和单元荷载列阵  $\mathbf{F}^e$ , 即

$$\begin{cases} \mathbf{F}^e = \sum_{i=1}^{n_g} \mathbf{N}^T(\mathbf{X}_g)\mathbf{b}(\mathbf{X}_g)V_g, \\ \mathbf{M}^e = \sum_{i=1}^{n_g} \rho\mathbf{N}^T(\mathbf{X}_g)\mathbf{N}(\mathbf{X}_g)V_g. \end{cases} \quad (12)$$

需要指出的是,上式推导不包含边界单元的情形。当涉及到边界单元求解时,由于近场动力学的自然边界条件施加不同于传统的有限元法,需要将面力转化为体力密度施加于边界物质点上,通过形函数插值实现单元表面面力到 Gauss 点体力密度的转换,并保持有限元格式,即

$$\mathbf{F}^e = \sum_{i=1}^{n_g} \mathbf{N}^T(\mathbf{X}_g)\mathbf{b}(\mathbf{X}_g)V_g + \sum_{i=1}^{n_g} \mathbf{N}^T(\mathbf{X}_g)\bar{\mathbf{T}}S_X,$$

其中,  $\bar{\mathbf{T}}$  为边界上受到的面力矢量,  $S_X$  为单元表面积。

为简便计, Gauss 点  $\mathbf{X}_g$  的初始位置矢量也记为  $\mathbf{X}_g$ , 这个位置矢量和位移矢量  $\mathbf{u}_g$  可由所属单元节点列向量插值得到,分别为

$$\mathbf{X}_g = \mathbf{N}(\mathbf{X}_g)\bar{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{u}_g = \mathbf{N}(\mathbf{X}_g)\mathbf{d}, \quad (13)$$

其中,  $\bar{\mathbf{X}}$  为该 Gauss 点所在单元的节点坐标列向量。



于是, Gauss 点的相对位置和相对位移为

$$\begin{cases} \xi(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_{g'}) = \mathbf{X}_{g'} - \mathbf{X}_g = \mathbf{N}'(\mathbf{X}_{g'})\bar{\mathbf{X}}' - \mathbf{N}(\mathbf{X}_g)\bar{\mathbf{X}}, \\ \boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_{g'}) = \mathbf{u}_{g'} - \mathbf{u}_g = \mathbf{N}'(\mathbf{X}_{g'})\mathbf{d}' - \mathbf{N}(\mathbf{X}_g)\mathbf{d}. \end{cases} \quad (14)$$

分别使用  $i, j (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n_{g'})$  表征 Gauss 点  $\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_{g'}$ , 可以将相对位移表示为矩阵形式:

$$\boldsymbol{\eta}_{ji}(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_{g'}) = \mathbf{N}_j \mathbf{d}_j - \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i = [\mathbf{N}_{ji}] [d_{ji}], \quad (15)$$

其中,  $[\mathbf{N}_{ji}] = \begin{bmatrix} -N_i^1 & 0 & 0 & \cdots & N_j^1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -N_i^1 & 0 & \cdots & 0 & N_j^1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -N_i^1 & \cdots & 0 & 0 & N_j^1 & \cdots \end{bmatrix}_{3 \times 6n}$ ,  $n$  为单元节点数,  $N_i^1$  表示第  $i$  个 Gauss 点所属单元的节点形函数;  $[d_{ji}] = [u_i^{1(1)} \ u_i^{1(2)} \ u_i^{1(3)} \ \cdots \ u_j^{1(1)} \ u_j^{1(2)} \ u_j^{1(3)} \ \cdots]_{6n \times 1}$ ,  $u_i^{1(1)}$  表示第  $i$  个 Gauss 点所属单元第一个点坐标的第一个自由度位移, 其他物理量的含义以此类推.

根据近场动力学 PMB 模型线性化后的键力密度函数表达式, 经推导后不难得到 Gauss 点间键力的矩阵形式<sup>[24]</sup>:

$$\mathbf{f}_{ji} V_j^g = [\mathbf{T}_{ji}] \begin{bmatrix} \chi c \\ |\xi_{ji}| \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{ji} V_j^g = \frac{\chi c V_j^g}{|\xi_{ji}|} [\mathbf{T}_{ji}] [\mathbf{N}_{ji}] [d_{ji}] = [\mathbf{K}_{ji}^\xi] [d_{ji}], \quad (16)$$

式中,  $\chi$  为近场动力学中表征物质点间损伤情况的函数;  $V_j^g$  为 Gauss 点  $j$  对应的积分体积;  $[\mathbf{T}_{ji}]$  为局部坐标系与整体坐标系的变换矩阵,  $[\mathbf{T}_{ji}] = \begin{bmatrix} l^2 & lm & ln \\ lm & m^2 & mn \\ ln & mn & n^2 \end{bmatrix}$ , 通常将两物质点间的连线作为局部坐标系的第一个

方向, 容易求得相关元素;  $[\mathbf{K}_{ji}^\xi] = \frac{\chi c V_j^g}{|\xi_{ji}|} [\mathbf{T}_{ji}] [\mathbf{N}_{ji}]$ , 称为键的劲度矩阵.

这样, 式(11)右端第一项可改写为

$$\sum_{g=1}^{n_g} \mathbf{N}^T(\mathbf{X}_g) \left( \sum_{g'=1}^{n_{g'}} \mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_{g'}), \xi(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_{g'})) V_{g'}^g \right) V^g = \sum_{i=1}^{n_g} \left( \sum_{j=1}^{n_{g'}} [\mathbf{N}_i]^T [\mathbf{K}_{ji}^\xi] [d_{ji}] \right) V^g. \quad (17)$$

在计算域内, 对 Gauss 点  $i = 1, 2, \dots, n$  的近场范围内的所有 Gauss 点  $j = 1, 2, \dots, n_{g'}$  进行二重循环求和, 可以求得单元劲度矩阵, 再按照总体节点编号进行组装, 即可形成整体劲度矩阵  $\mathbf{K}$ . 再将单元质量矩阵与单元荷载列阵进行整体组装, 得到整个系统的运动方程:

$$[\mathbf{M}^e]_{3N \times 3N} [\ddot{\mathbf{U}}(t)]_{3N \times 1} = [\mathbf{K}]_{3N \times 3N} [\mathbf{U}(t)]_{3N \times 1} + [\mathbf{F}^e(t)]_{3N \times 1}, \quad (18)$$

相应的静力平衡方程表示为

$$[\mathbf{K}]_{3N \times 3N} [\mathbf{U}]_{3N \times 1} + [\mathbf{F}^e]_{3N \times 1} = \mathbf{0}. \quad (19)$$

至此, 根据式(18)和(19), 施加边界条件后即可求解整个系统方程. 由于近似场是通过传统的有限元形函数构造的, 所以边界条件可由有限元法的标准形式执行. 对于应力边界条件, 面力可直接转化为等效节点荷载; 对于位移边界条件, 可将其表示为约束方程  $\mathbf{G}\mathbf{U} + \mathbf{U}^* = \mathbf{0}$ , 其中  $\mathbf{G}$  为约束方程系数矩阵, 与未知位移向量  $\mathbf{U}$  相关,  $\mathbf{U}^*$  为已知位移约束值构成的列阵. 引入 Lagrange 乘子法  $\boldsymbol{\lambda}$ , 对系统平衡方程和约束方程的混合变分形式进行重构, 得到求解  $\mathbf{U}$  和  $\boldsymbol{\lambda}$  的代数方程组:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{U}^* \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

该方程组可采用 MKL 英特尔数学核心函数库提供的大型稀疏方程组求解器 PARDISO 或 GMRES 等求解.

## 3 算例分析

### 3.1 玻璃板的动态裂纹扩展模拟

如图 2 所示, 含预制裂纹玻璃板的长度为 100 mm, 宽度为 40 mm, 左端预制裂纹长 50 mm. 玻璃板<sup>[26]</sup>的

材料参数为:弹性模量  $E = 72 \text{ GPa}$ , 密度  $\rho = 2\,240 \text{ kg/m}^3$ , 能量释放率  $G_c = 135 \text{ N/m}$ , Poisson 比  $\mu = 0.25$ . 板的上下两端受均匀拉伸应力载荷  $\sigma = 14 \text{ MPa}$  作用,持续时间为  $t = 5 \times 10^{-5} \text{ s}$ .

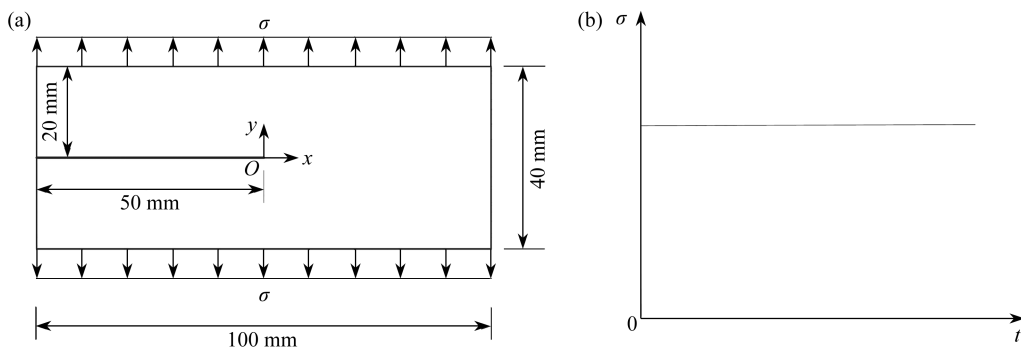


图 2 含预制裂纹玻璃板及其外荷载

Fig. 2 The pre-cracked glass panel and its external load

采用基于键型近场动力学的非连续 Galerkin 有限元方法对上述问题进行求解.考虑  $\Delta x = 1 \text{ mm}, 0.5 \text{ mm}, 0.25 \text{ mm}$  三种不同的物质点间距,近场范围为  $\delta = 3 \text{ mm}$ , 显式动力求解的时间步长取为  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-8} \text{ s}$ . Ha 等<sup>[26]</sup>采用基于均匀粒子离散的传统键型近场动力学方法对该问题进行了模拟计算,但应力边界条件进行了特殊处理.图 3 和图 4 分别给出了本文方法和 Ha 等<sup>[26]</sup>计算得到的裂纹扩展结果,从所示结果可以看出,三种不同物质点间距的结果均能反映玻璃板的裂纹萌生、扩展过程,只是当物质点间距为  $\Delta x = 1 \text{ mm}$  时裂纹扩展路径较为粗糙,本文得到的裂纹扩展路径和裂纹分叉特征与 Ha 等<sup>[26]</sup>的结果非常相似,物质点间距的不同对裂纹分叉点的位置几乎没有影响,但间距过大会使得裂纹扩展路径不够平顺.

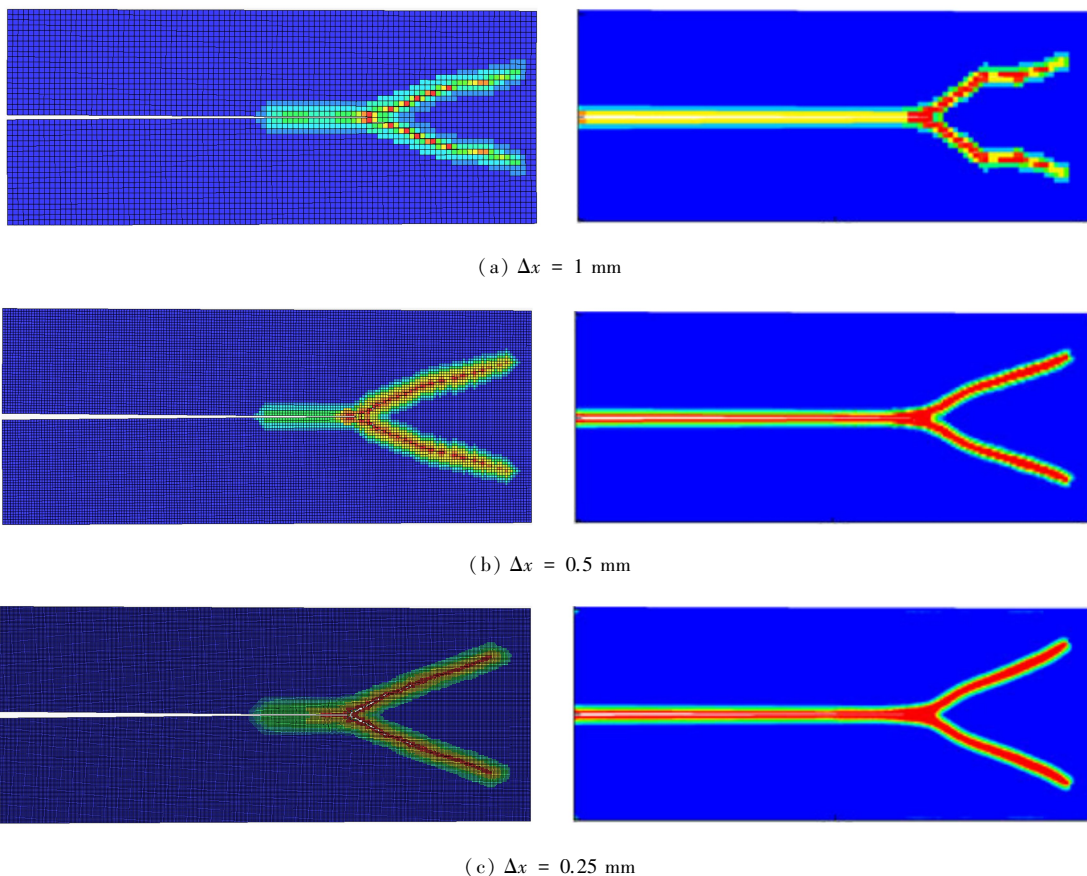


图 3 本文方法(左)与 Ha 等<sup>[26]</sup>方法(右)得到的裂纹扩展模式 ( $t = 46 \mu\text{s}$ )

Fig. 3 The crack propagation modes obtained with the present method (left) and the method of Ha et al. <sup>[26]</sup> (right) ( $t = 46 \mu\text{s}$ )

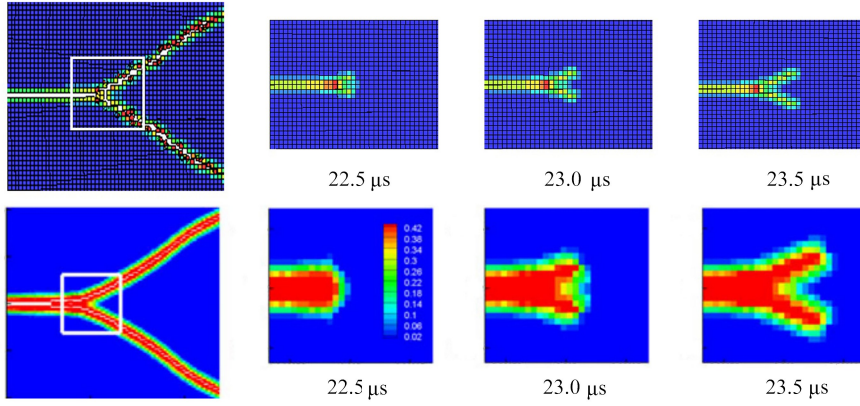


图4 本文方法(上)与 Ha 等<sup>[26]</sup>方法(下)得到的裂纹在分叉点演变情况

Fig. 4 The evolution of crack bifurcation points obtained with the present method (top) and the method of Ha et al.<sup>[26]</sup> (bottom)

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

为了比较基于键型近场动力学的非连续 Galerkin 有限元方法与传统键型近场动力学方法的计算效率,本文还采用 Ha 等<sup>[26]</sup>的方法对上述问题进行了模拟计算,两种方法的物质点间距和近场范围等计算条件均保持相同。表 1 给出了本文方法与传统键型近场力学方法的计算时间对比情况,表明本文方法相较于传统键型近场力学方法在计算效率上有较大提升。

表 1 计算时间对比

Table 1 The computation time comparison

	$\Delta x = 1 \text{ mm}$	$\Delta x = 0.5 \text{ mm}$	$\Delta x = 0.25 \text{ mm}$
present method	54 s	246 s	1 350 s
conventional bond-based PD method	104 s	522 s	3 277 s

### 3.2 三维混凝土板的爆炸模拟

三维混凝土板的长度、宽度和厚度分别为 1 m, 1 m 和 40 mm<sup>[27]</sup>, 考虑在板的中心正上方有 TNT 炸药发生爆炸。采用本文的基于键型近场动力学的非连续 Galerkin 有限元方法进行计算模拟, 研究板的边界条件、爆距和炸药当量对混凝土板毁伤破坏模式的影响。材料参数为: 密度  $\rho = 2\,750 \text{ kg/m}^3$ , 弹性模量  $E = 38.2 \text{ GPa}$ , 临界断裂能释放率  $G_c = 120 \text{ J/m}^2$ , Poisson 比  $\mu = 0.25$ 。采用八节点六面体单元离散混凝土板, 在板的长、宽和厚度方向上, 单元网格尺寸分别为 10 mm, 10 mm 和 8 mm。

对于爆炸荷载, 本文采用美国陆军技术手册 TM5-855-1 提供的 Kingery-Bulmash 经验公式<sup>[28]</sup>, 将 TNT 炸药爆炸后产生的冲击波直接施加到混凝土板迎爆面所有单元表面上, 考虑了入射压力和反射压力等的作用, 具体为

$$P(t) = P_r(t) \cos^2 \theta + P_i(t) (1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta), \quad (21)$$

式中,  $P$  为施加到单元表面上的压力值;  $\theta$  为入射角, 即单元上表面中心和爆源连线与单元法线的夹角;  $P_i$  为入射压力,  $P_r$  为反射压力, 可表示为

$$\begin{cases} P_i(t) = P_{i0} \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \exp\left(-a \frac{t}{t_0}\right), \\ P_r(t) = P_{r0} \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \exp\left(-b \frac{t}{t_0}\right), \end{cases} \quad (22)$$

式中,  $P_{i0}$  和  $P_{r0}$  分别为入射压力峰值和反射压力峰值, 与炸药性能、炸药当量、冲击波荷载作用点与爆炸中心的距离等有关, 可参考文献<sup>[28]</sup>,  $a$  和  $b$  为衰减系数,  $t_0$  为正压作用时间, 同样可参考文献<sup>[28]</sup>。

#### 3.2.1 不同边界条件对混凝土板毁伤的影响

考虑两种边界条件, 一种是对边固定, 另一种是四边固定, 相应的几何模型如图 5 所示。爆炸中心距离混凝土板的上表面中心 0.4 m, TNT 炸药当量为 0.15 kg。

以炸药起爆时刻为零点, 图 6 给出了对边固定条件下混凝土板受爆炸冲击载荷作用后不同时刻的毁伤



情况.在 0.9 ms 时刻,由于左右两边固定边界的混凝土板迎爆面和背爆面的对边边界内缘处均出现裂纹,迎爆面裂纹更长,已逐渐延伸至混凝土板的上下边缘处,整体动态响应下背爆面中心处开始出现不规则裂纹.在 5.0 ms 时刻,混凝土板迎爆面左右两边裂纹扩展至板的上下边缘,中心出现较多的裂纹,并随着损伤累积向边界方向扩展,且竖向产生了贯穿性裂纹;背爆面远离直接荷载但裂纹扩展并未停止,出现的轻微裂纹数量更多,由混凝土板中心向四周扩展至边界.在 11.5 ms 时刻,混凝土板中部和约束内缘处出现断裂现象,产生这种情况的原因是混凝土板上下边界约束的缺失,中心裂纹更易沿竖向扩展形成贯穿性裂纹,混凝土板朝向背爆面挤压而逐渐脱离左右边框的固定约束,整体从中间发生断裂破坏.冲击波传播到混凝土板的背爆面,形成反射拉伸波,由于混凝土的低抗拉强度特性,导致了背爆面产生更多的竖向裂纹.

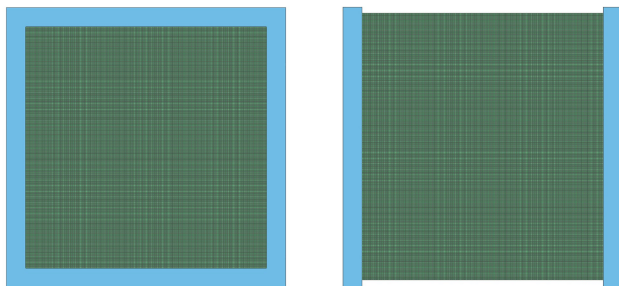


图 5 左右两边固定约束(左)与四周固定约束(右)的几何模型

Fig. 5 Geometric models with fixed constraints on the left and right sides (left) and fixed constraints on all sides (right)

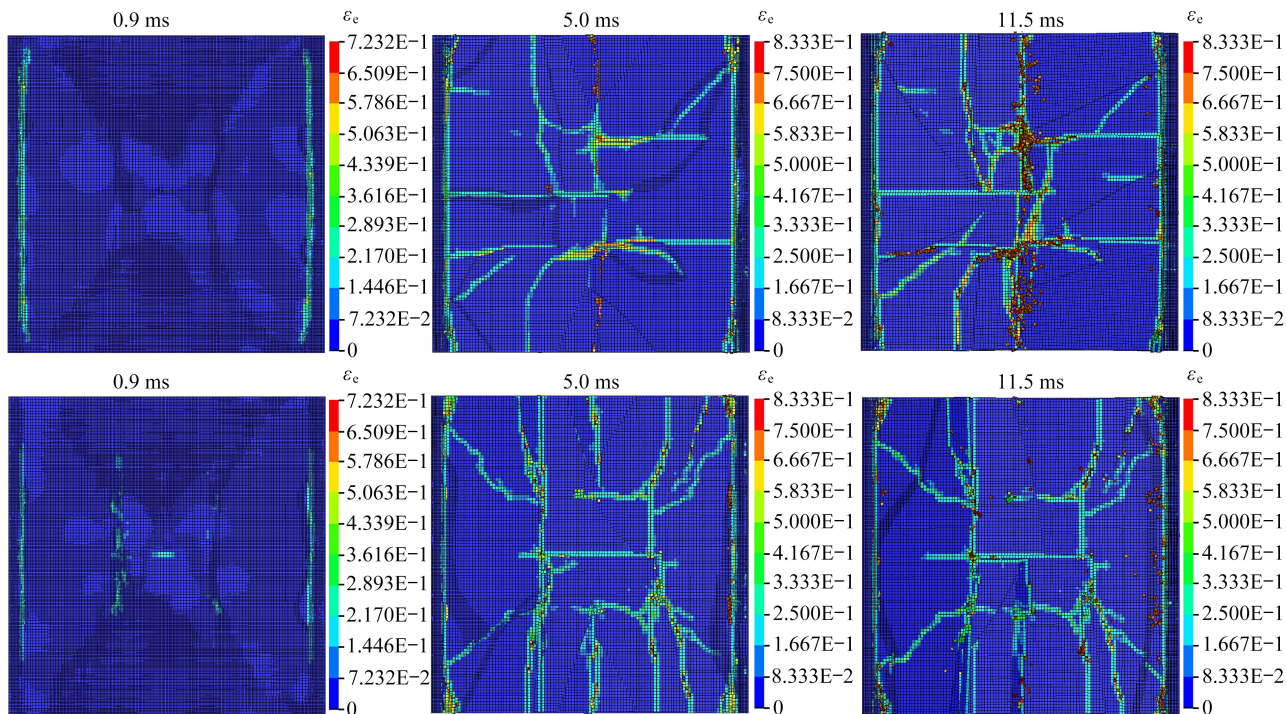


图 6 对边固定混凝土板迎爆面(上)与背爆面(下)的毁伤情况

Fig. 6 The damages of the front surface (top) and the back surface (bottom) of the concrete slab fixed on the opposite sides

图 7 给出了四边固定条件下混凝土板受爆炸冲击载荷作用后不同时刻的毁伤情况.在 0.9 ms 时刻,混凝土板迎爆面裂纹相较于两对边固定板更为均匀,在边框内缘处形成了明显的环状裂纹角;背爆面边框内缘处出现环向裂纹,中心处出现环向裂纹并开始向四周扩展.在 5.0 ms 时刻,混凝土板迎爆面中心出现环形裂纹,四边内缘处的裂纹也有微小扩展;背爆面开裂显著,中心处的环形裂纹沿对角线扩展,并与边缘裂纹贯通,出现多条放射状裂纹,背爆面的毁伤情况要比迎爆面更为严重,反映了反射拉伸波的作用效果.在 11.5 ms 时刻,混凝土板迎爆面出现较大范围破碎现象,且有向外飞溅的趋势,中间环形裂纹沿对角线扩展贯通至边缘裂纹处;背爆面形成了对角贯穿裂纹,且有碎片向外飞溅.造成与对边固定板损伤情况不同的原因是四边固



定的混凝土板受力更为均匀,在大变形情况下结构动态响应得到缓冲,虽然板的破损程度更为严重,有碎片向外飞溅现象,但四边固定混凝土板并未从中间断裂,能保持更好的稳定性,且由于结构整体性较强,损伤情况分布更加对称。

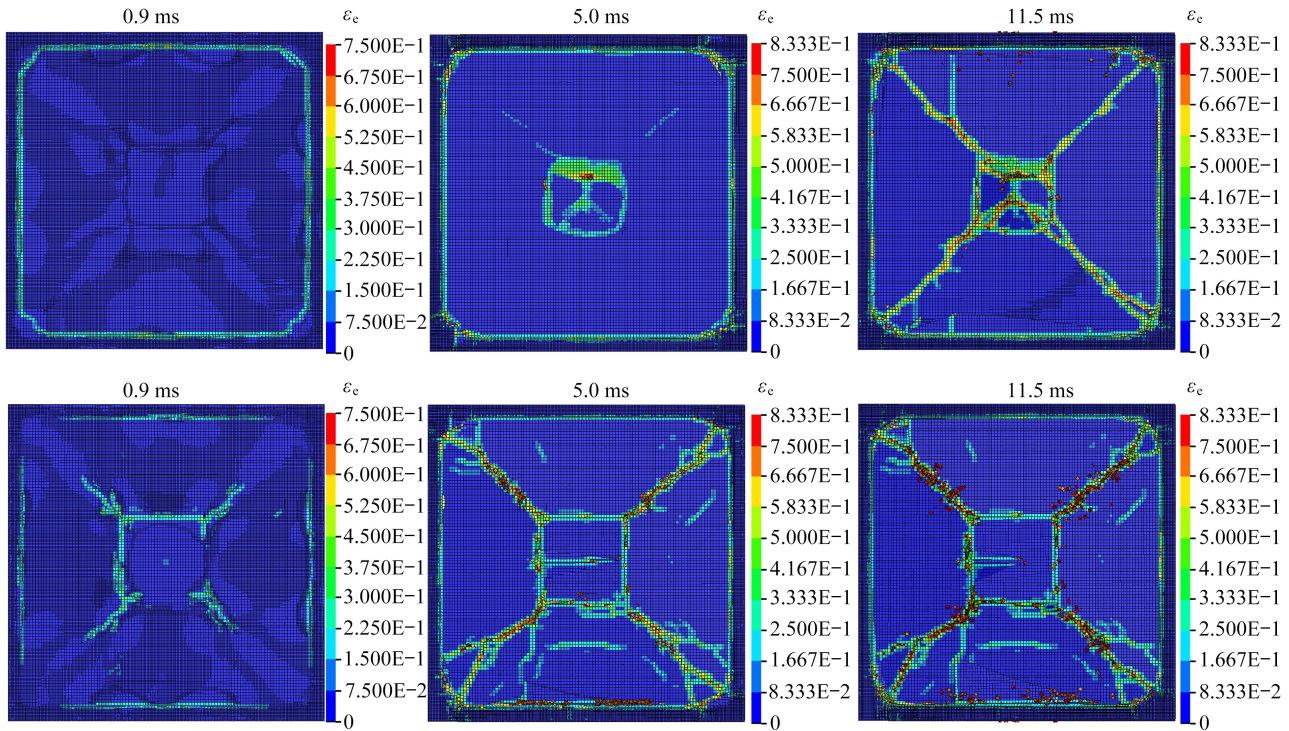
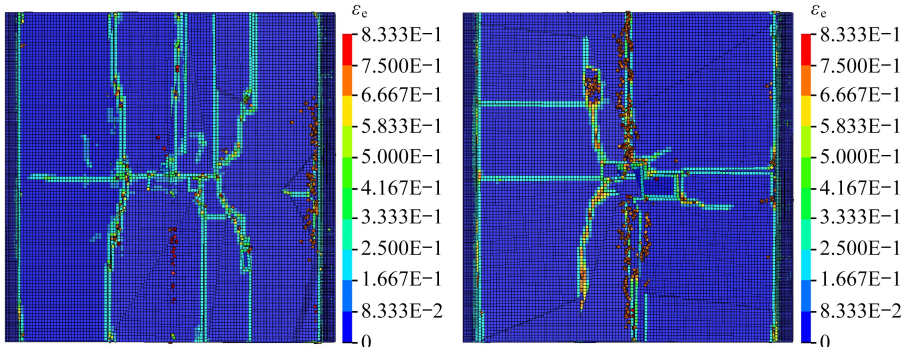


图7 四边固定混凝土板迎爆面(上)与背爆面(下)的毁伤情况

Fig. 7 The damages of the front surface (top) and the back surface (bottom) of the concrete slab fixed on 4 sides

### 3.2.2 不同爆距对混凝土板毁伤的影响

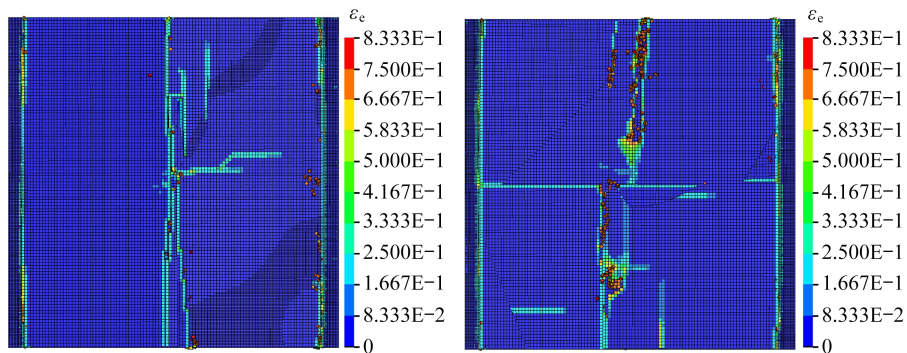
考虑两对边固定的混凝土板,其他计算条件不变,研究炸药爆距对混凝土板爆炸毁伤的影响.TNT炸药当量还是为0.15 kg,爆距分别为0.4 m,0.5 m和0.6 m.图8给出起爆11.5 ms时刻、爆距0.5 m和0.6 m情况下,混凝土板迎爆面和背爆面的毁伤情况.当爆距为0.5 m时,混凝土板迎爆面中心出现较多的贯穿裂纹,当损伤累积不足以造成结构断裂时,裂纹在中心聚集形成了较大的破碎区域,背爆面出现了多条明显的竖向裂纹,中心有裂纹聚集的趋势.当爆距为0.6 m时,混凝土板的迎爆面出现了十字状裂纹,但由于爆距不足并未使得竖向裂纹贯通,遂出现了竖向碎片,且背爆面出现微少竖向裂纹.结合图6给出的爆距为0.4 m对应的混凝土板毁伤情况可以看出,爆距增大使得作用于混凝土板的爆炸冲击荷载有所减小,裂纹扩展阻塞导致了损伤区域化累积,迎爆面更易出现破片区域,背爆面裂纹更少,混凝土板的毁伤情况也随之减弱。



(a) 0.5 m 爆距

(a) 0.5 m blast distance



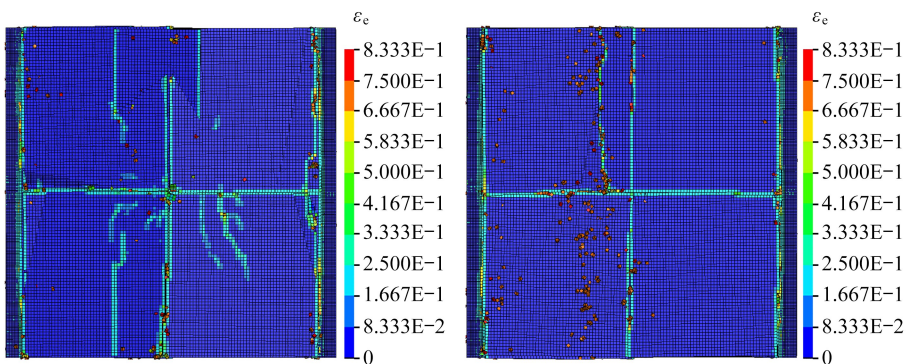


(b) 0.6 m 爆距

(b) 0.6 m blast distance

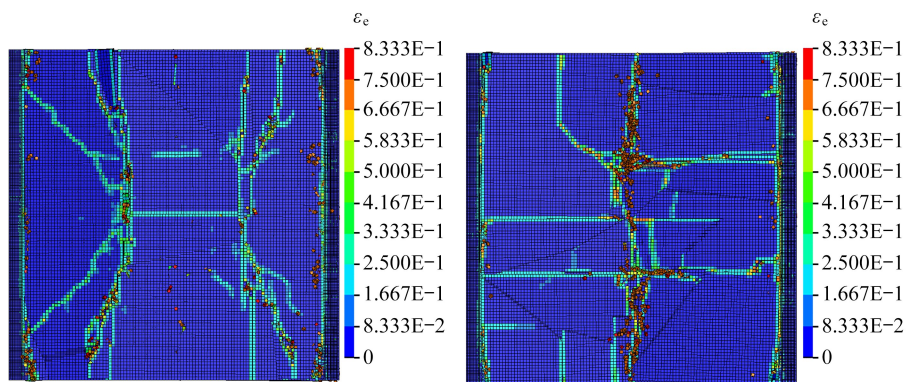
图 8 0.5 m,0.6 m 爆距下,起爆 11.5 ms 时刻混凝土板迎爆面(左)与背爆面(右)的毁伤情况

Fig. 8 The damages of the front surface (left) and the back surface (right) of the concrete slab at 11.5 ms after detonation at 0.5 m, 0.6 m blast distances



(a) 0.1 kg 炸药当量

(a) For the 0.1 kg explosive equivalent



(b) 0.3 kg 炸药当量

(b) For the 0.3 kg explosive equivalent

图 9 0.1 kg,0.3 kg 炸药当量下,起爆 11.5 ms 时刻混凝土板迎爆面(左)与背爆面(右)的毁伤情况

Fig. 9 The damages of the front surface (left) and the back surface (right) of the concrete slab at 11.5 ms after detonation for 0.1 kg,0.3 kg explosive equivalents

### 3.2.3 不同炸药当量对混凝土板毁伤的影响

考虑两对边固定的混凝土板,其他计算条件不变,研究炸药当量对混凝土板爆炸毁伤的影响.固定爆距为 0.4 m,炸药当量由 0.15 kg 分别减少到 0.1 kg、增加到 0.3 kg.图 9 给出了 0.1 kg 和 0.3 kg 炸药当量作用下混凝土板迎爆面和背爆面的毁伤情况.0.1 kg 炸药当量作用下的混凝土迎爆面出现十字状裂纹,毁伤情况不明显;背爆面中心出现横向放射状裂纹,竖向裂纹仅中间裂纹较为严重.0.3 kg 炸药当量作用下的混凝土迎

爆面裂纹明显,由于冲击波压力增大造成混凝土板中间发生断裂且整体呈现向下凹陷趋势,毁伤情况较明显;背爆面毁伤情况较迎爆面轻微,混凝土板断裂造成中心竖向裂纹向角隅处延展,裂纹呈现蛛网形状。

结合图6给出的炸药当量为0.15 kg的毁伤情况,可以看出,炸药当量减少使得冲击波作用减弱,混凝土板毁伤情况不显著;增加炸药当量使得混凝土板更易断裂,迎爆面下陷导致了背爆面产生放射状裂纹延伸,显著加剧了混凝土板的毁伤程度。

## 4 结 语

本文阐述了键型近场动力学的非连续 Galerkin 有限元法的基本原理,导出了计算列式,计算模拟了脆性玻璃板动态开裂分叉问题,并对爆炸冲击荷载作用下混凝土板的毁伤过程进行了计算分析,研究了板的边界条件、炸药当量和爆距等对混凝土板毁伤情况的影响,得到了一些有益的认识。

本文的研究结果表明,键型近场动力学弱形式方程对应的非连续 Galerkin 有限元方法,能在有限元计算框架内充分发挥近场动力学特有的非连续变形分析能力,便于施加传统边界条件和减轻近场动力学的表面效应问题,且具有较高的计算效率,能够再现爆炸冲击荷载作用下结构的复杂破裂模式和毁伤破坏过程,是能模拟结构爆炸冲击毁伤效应的方法。

## 参考文献 (References):

- [1] 胡嘉辉, 吴昊, 方秦. 近区爆炸作用下砌体填充墙损伤破坏与动态响应的数值模拟[J]. 振动与冲击, 2021, **40**(9): 1-11. (HU Jiahui, WU Hao, FANG Qin. Numerical simulation of damage and dynamic response of masonry-infilled wall under near zone explosion[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, **40**(9): 1-11. (in Chinese))
- [2] 师燕超, 李忠献, 郝洪. 爆炸荷载作用下钢筋混凝土框架结构的连续倒塌分析[J]. 解放军理工大学学报(自然科学版), 2007, **8**(6): 652-658. (SHI Yanchao, LI Zhongxian, HAO Hong. Numerical analysis of progressive collapse of reinforced concrete frame under blast loading[J]. *Journal of PLA University of Science and Technology*, 2007, **8**(6): 652-658. (in Chinese))
- [3] 顾鑫, 章青. 爆炸荷载作用下大坝破坏分析的数值模拟研究进展[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2017, **45**(1): 45-55. (GU Xin, ZHANG Qing. Progress in numerical simulation of dam failure under blast loading[J]. *Journal of Hohai University(Natural Sciences)*, 2017, **45**(1): 45-55. (in Chinese))
- [4] 宁建国, 王猛. 关于计算爆炸力学的进展与现状[J]. 力学与实践, 2012, **34**(1): 10-19. (NING Jianguo, WANG Meng. Review on computational explosion mechanics[J]. *Mechanics in Engineering*, 2012, **34**(1): 10-19. (in Chinese))
- [5] RUWAN J, DAVID P T, NIMAL J P. Blast and residual capacity analysis of reinforced concrete framed buildings[J]. *Engineering Structures*, 2011, **33**(12): 3483-3495.
- [6] XU K, LU Y. Numerical simulation study of spallation in reinforced concrete plates subjected to blast loading [J]. *Computers & Structures*, 2006, **84**(5/6): 431-438.
- [7] 朱劲松, 邢扬. 爆炸荷载作用下城市桥梁动态响应及其损伤过程分析[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2015, **48**(6): 510-519. (ZHU Jingsong, XING Yang. Dynamic response and damage process analysis of urban bridge subjected to blast load. [J]. *Journal of Tianjin University(Science and Technology)*, 2015, **48**(6): 510-519. (in Chinese))
- [8] 辛春亮, 薛再清. TrueGrid 和 LS-DYNA 动力学数值计算详解[M]. 北京: 机械工业出版社, 2019. (XIN Chunliang, XUE Zaiqing. *TrueGrid and LS-DYNA Dynamics Numerical Calculation Details* [M]. Beijing: China Machine Press, 2019. (in Chinese))
- [9] SILLING S A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2000, **48**(1): 175-209.
- [10] SILLING S A, EPTON M, WECKNER O. Peridynamic states and constitutive modeling[J]. *Journal of Elasticity*. 2007, **88**(2): 151-184.
- [11] 黄丹, 章青, 乔丕忠, 等. 近场动力学方法及其应用[J]. 力学进展, 2010, **40**(4): 448-459. (HUANG Dan,

- ZHANG Qing, QIAO Pizhong, et al. A review on peridynamics(PD) method and its application[J]. *Advances in Mechanics*, 2010, **40**(4): 448-459. (in Chinese)
- [12] 周保良,李志远,黄丹. 二维瞬态热传导的 PDDO 分析[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(6): 660-668. (ZHOU Baoliang, LI Zhiyuan, HUANG Dan. PDDO analysis of 2D transient heat conduction problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(6): 660-668. (in Chinese))
- [13] KILIC B, AGWAI A, MADENCI E. Peridynamic theory for progressive damage prediction in center-cracked composite laminates[J]. *Composite Structures*, 2009, **90**(2): 141-151.
- [14] 章青,顾鑫,郁杨天. 冲击载荷作用下颗粒材料动态力学响应的近场动力学模拟[J]. *力学学报*, 2016, **48**(1): 64-71. (ZHANG Qing, GU Xin, YU Yangtian. Peridynamics simulation for dynamic response of granular materials under impact loading[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2016, **48**(1): 56-63. (in Chinese))
- [15] 张尚元,聂玉峰,李义强. RBF-PU 方法求解二维非局部扩散问题和近场动力学问题[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(6): 608-618. (ZHANG Shangyuan, NIE Yufeng, LI Yiqiang. The RBF-PU method for solving 2D non-local diffusion and peridynamic equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(6): 608-618. (in Chinese))
- [16] HAN F, LUBINEAU G, AZDOUD Y. Adaptive coupling between damage mechanics and peridynamics: a route for objective simulation of material degradation up to complete failure[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016, **94**: 453-472.
- [17] DU Q, ZHOU K. Mathematical analysis for the peridynamic nonlocal continuum theory[J]. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2011, **45**(2): 217-234.
- [18] XU F F, GUNZBURGER M, BURKARDT J. A multiscale method for nonlocal mechanics and diffusion and for the approximation of discontinuous functions[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, **307**: 117-143.
- [19] AZDOUD Y. A hybrid local/non-local framework for the simulation of damage and fracture[D]. PhD Thesis. Thuwal: King Abdullah University of Science and Technology, 2014.
- [20] CHEN X, GUNZBURGER M. Continuous and discontinuous finite element methods for a peridynamics model of mechanics[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2011, **200**(9/12): 1237-1250.
- [21] AKSOY H G, SENOCAK E. Discontinuous Galerkin method based on peridynamic theory for linear elasticity [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, **88**(7): 673-692.
- [22] REN B, WU C T, ASKARI E. A 3D discontinuous Galerkin finite element method with the bond-based peridynamics model for dynamic brittle failure analysis[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2017, **99**: 14-25.
- [23] REN B, WU C T, SELESON P, et al. A peridynamic failure analysis of fiber-reinforced composite laminates using finite element discontinuous Galerkin approximations[J]. *International Journal of Fracture*, 2018, **214**(1): 49-68.
- [24] MADENCI E, OTERKUS E. Peridynamic theory and its applications[M]. New York: Springer, 2014.
- [25] TIAN X C, DU Q. Nonconforming discontinuous Galerkin methods for nonlocal variational problems[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2015, **53**(2): 762-781.
- [26] HA D, BOBARU F. Studies of dynamic crack propagation and crack branching with peridynamics[J]. *International Journal of Fracture*, 2010, **162**(1): 229-244.
- [27] WANG W, ZHANG D, LU F Y, et al. Experimental study on scaling the explosion resistance of a one-way square reinforced concrete slab under a close-in blast loading[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2012, **49**: 158-164.
- [28] KINGERY C N, BULMASH G. Airblast parameters from TNT spherical air burst and hemispherical surface burst: ARBRL-TR-02555[R]. Maryland: Defence Technical Information Center, Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, 1984.