

基于平铺刚度法的弧形加筋板的轻量化设计*

刘宸宇¹, 骆烜赫¹, 刘康翔¹, 孟增¹, 肖山²

(1. 合肥工业大学 土木与水利工程学院, 合肥 230009;

2. 中国航空工业集团有限公司 沈阳飞机设计研究所, 沈阳 110034)

摘要: 加筋板结构是航空航天结构设计中常见的承载部件,可以在保证加筋板性能的基础上减轻其结构质量,能够带来巨大的实际效益.因此,加筋板结构的轻量化设计一直是航空航天领域的研究重点.基于同步失效的概念,设计了一种新型的弧形加筋板,旨在充分利用加筋肋的轴向承载能力.同时,基于平铺刚度法,准确预测了弧形加筋板的临界屈曲载荷.最后采用粒子群优化算法对弧形加筋板进行了轻量化设计.算例结果表明,弧形加筋板承载能力优异,轻量化设计效果显著,具有良好的优化效果.

关键词: 弧形加筋板; 平铺刚度法; 临界屈曲载荷; 轻量化

中图分类号: TB114.3; O213.2 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430342

Lightweight Design of Arc Rib Stiffened Plates Based on the Smeared Stiffener Method

LIU Chenyu¹, LUO Xuanhe¹, LIU Kangxiang¹, MENG Zeng¹, XIAO Shan²

(1. College of Civil Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, P.R.China;

2. Shenyang Aircraft Design and Research Institute, Aviation Industry Corporation of China, Ltd.,
Shenyang 110034, P.R.China)

Abstract: Stiffened plates are common bearing components in aerospace structure design, which can bring great economic benefits and reduce the structure weight based on the insurance of the plate performance. Therefore, the lightweight design of stiffened plate structures is a research focus in the aerospace field. Based on the concept of synchronous failure, a new type of arc rib stiffened plate was proposed to sufficiently make use of the axial bearing capacity of ribs. Then, the critical buckling load of the arc rib stiffened plate was accurately predicted based on the smeared stiffener method. The lightweight design of arc rib stiffened plates was carried out by means of the particle swarm optimization algorithm. The results show that, the arc rib stiffened plate has excellent bearing capacity, significant lightweight design effects, and promising optimization results.

Key words: arc rib stiffened plate; smeared stiffener method; critical buckling load; lightweight

0 引言

加筋板具有较高的比强度和刚度,因此在航空航天工业中得到了广泛应用.结构屈曲是加筋薄板的主要

* 收稿日期: 2022-10-28; 修订日期: 2022-12-08

基金项目: 国家自然科学基金(面上项目)(11972143)

作者简介: 刘宸宇(2001—),男(E-mail: 2019210816@mail.hfut.edu.cn);

孟增(1987—),男,副教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: mengz@mail.dlut.edu.cn).

引用格式: 刘宸宇, 骆烜赫, 刘康翔, 孟增, 肖山. 基于平铺刚度法的弧形加筋板的轻量化设计[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(8): 953-964.

破坏形式,所以如何准确地预测屈曲承载力具有十分重要的工程意义。截至目前,加筋板的稳定性问题已经得到了较多理论和试验上的研究。面向四边简支的加筋薄板,王伟和吴梵^[1-2]通过线弹性理论求解了其整体屈曲临界应力。李彦娜和董科^[3]深入研究了铝合金加筋板的轴压极限强度。伴随计算机性能的快速发展,有限元方法由于其方便和精度高的优势迅速得到普及。与此同时,面向加筋板结构的有限元力学性能分析方法也受到了工程界的青睐。张振兴等^[4]对矩形薄板脱层约束的屈曲现象进行了数值模拟,通过建立精细化有限元模型获得了相应结构的屈曲承载极限。朱菊芬等^[5]为进一步分析层合板壳脱层问题,建立了一个新的参考面单元,并就脱层尺寸对屈曲载荷的影响规律进行了深入探讨。叶广宁等^[6]对有限元与工程计算结果进行了详细对比,并发现两者结果较为吻合。江玮等^[7]研究了结构参数对加筋板性能的影响,同时总结了加筋板类型和结构参数对承载力的敏感程度。但需要注意的是,航空航天实际工程结构常由非线性塑性材料组成,因此需要考虑加筋板的后屈曲承载力。黄丕帅和陈昆^[8]利用有限元分析软件 ANSYS 对均匀受压下的加筋板进行了后屈曲承载能力研究,讨论了加筋肋的刚性与柔性问题以及加筋板的极限承载能力,并从试验分析、理论计算以及有限元仿真三个方面进行了详细对比。黄丽华等^[9]进一步研究了层合加筋板,对在承受压缩、剪切或压剪复合荷载下加筋板的弹性屈曲及后屈曲行为进行了分析研究。近年来,随着复合材料的快速发展,其在航天领域展现出巨大的实用价值,引起了学者们对复合材料加筋板的广泛关注。刘毅等^[10]推导了考虑铺层复合材料加筋板屈曲和后屈曲极限承载力的解析解。高伟等^[11]在对变厚度复合材料加筋板轴压作用下的变厚度加筋板进行试验时发现,其屈曲后仍然具备一定的后屈曲承载能力。石峰等^[12]采用高阶剪切变形理论分析了复合材料层合板的屈曲问题,然后根据虚功原理推导出了复合材料层合板在面内载荷作用下临界屈曲的控制微分方程。吴菁等^[13]推导了复合材料帽型加筋层合板的纵向和横向弯曲刚度。王平远等^[14]基于非局部应变梯度理论,研究了功能梯度纳米板结构的弯曲和屈曲问题。此外,工程结构在服役过程中不仅需要考虑其服役环境,其极限承载力也会受到制造工艺的限制。面向受热力耦合作用下的加筋薄板,李若愚和王天宏^[15]推导了其具体的屈曲临界载荷表达式。任慧龙等^[16]指出加筋薄壁结构在工程中往往通过焊缝连接,其焊缝的承载力对结构具有显著影响。万育龙和朱旭光^[17]进一步考虑了多种应力组合模式和多种初始缺陷组合模式下加筋板的极限强度。上述研究工作表明,加筋板由于其良好的力学性能,在工程中具有重要的应用价值。但是,随着科学技术的快速发展,航空航天结构愈加复杂,相应地,对结构的力学性能和经济性要求越来越高,而传统的加筋板在使用过程中存在材料利用率低、承载力不够和制造成本过高等问题,因此如何深入挖掘材料潜能、提高结构承载力和降低制造成本至关重要。

为了解决上述问题,结构优化设计理论应运而生。其核心思想是在保证结构安全性的前提下,大幅减小制造成本,从而实现结构安全性和经济性的完美平衡。朴春雨和章怡宁^[18]对飞机结构中加筋板的几何尺寸进行了优化设计。满林涛和杨婵^[19]考虑了工艺可实施性,大幅提升了矩形加筋板的承载能力。施利娟等^[20]进一步兼顾了强度及稳定性,使铝合金加筋板在不同的载荷范围内都能满足安全性与经济性需求。然而,由于传统的尺寸设计方法可设计的空间有限,因此如何拓展薄壁加筋板的可设计性、给出加筋肋的最优形状和布局,对于进一步提高材料利用率至关重要。王博等^[21]提出了宏观和微观协同设计方法,通过对主层级稀疏加筋和次层级密集点阵同步设计,有效地提升了材料利用率。崔荣华等^[22]采用了拓扑优化理论对加强筋优化布局进行了相关探索。Meng 等^[23]通过调整加筋肋的形状提出了弧形加筋圆柱壳,大幅扩大了设计空间,从而获得了比经典设计更优的设计结果。常楠等^[24]和赵群等^[25]对复合材料加筋构件的布局和形状进行了协同优化。王栋和李正浩^[26]将布局设计方法拓展至频率优化问题。此外,加筋薄板在屈曲约束的非线性程度极高,优化模型往往存在多个局部最优解,且基于有限元分析的优化问题求解需要反复迭代,计算量巨大,所以需要建立高效、稳定的全局优化策略。郝鹏等^[27]针对轴压作用下的加筋柱壳后屈曲性能优化计算量较大的问题,提出了一种基于代理模型和等效刚度模型的混合优化策略,并运用基于等效刚度的平铺加筋模型进行优化设计,以代替试验设计中大量的精细有限元分析。李刚和孟增^[28]通过拉丁超立方策略构造了代理模型,并基于自适应更新代理模型,直至满足需求。张洪波^[29]采用多目标优化设计方法,在降低了材料使用率的同时提高了结构可靠性。郑俊锋等^[30]针对均布平压载荷下四边简支的矩形加筋板,通过解析推导大幅提高了拓扑优化的计算效率。截止目前,在面向加筋板壳结构的优化设计方面已取得了丰硕的成果。然而随着航空航

天结构的大型化和设计的精细化需求,其强度与轻量化设计之间的矛盾日益突出,所以,如何深层次挖掘材料潜能和降低结构承载能力具有重要的工程意义。

因此,本文基于同步失效的概念,提出了一种新型的弧形加筋板,旨在有效地利用其轴向承载力的潜力,使其在满足设计要求的条件下,结构质量更轻、结构效率更高。同时,基于平铺刚度法,准确预测了弧形加筋板的临界屈曲载荷。随后,采用粒子群优化算法对其进行了轻量化设计。算例结果表明,弧形加筋板承载能力优异,轻量化设计效果显著,具有良好的优化效率。

1 弧形加筋板

1.1 背景

正交网格加筋板结构由蒙皮和等直筋肋组成,如图 1 所示。对于加筋板结构,其主要屈曲形式包括蒙皮局部屈曲、筋条局部屈曲和整体屈曲等。工程中常用的加筋板结构多为中等长度的加筋板结构,若筋条先于蒙皮发生局部屈曲将会大幅降低加筋板的承载能力,相比而言,蒙皮的局部屈曲能够提供更高的承载能力。

本文采用的加筋板模型如图 1 所示,板长 $L = 1\ 200\ \text{mm}$,板宽 $W = 800\ \text{mm}$,板厚 $H = 1\ \text{mm}$,筋肋高 $h = 24\ \text{mm}$ 。结构单轴加载,四边简支。

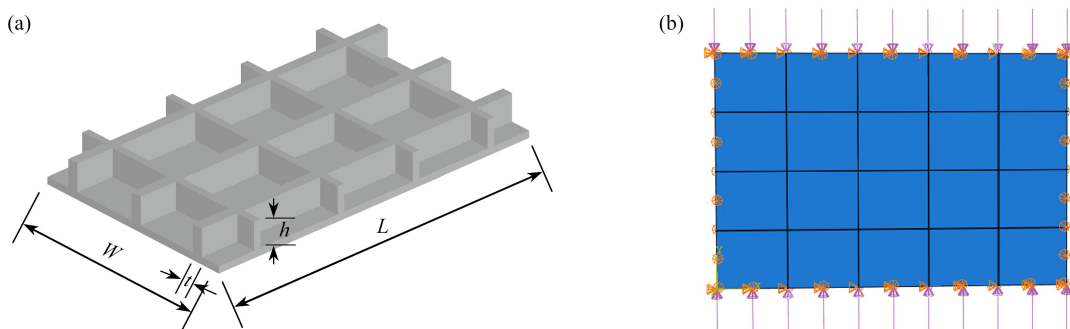


图 1 正交网格加筋板示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the orthogonal grid stiffened plate

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

对于传统的正交网格加筋板结构,考虑其受双向均布荷载,如图 1(b) 所示,该模型采用二重 Fourier 级数作为位移函数,满足简支边界条件,设沿坐标三个方向满足位移边界条件的位移函数分别为

$$u = A_{mn} \cos(m\alpha x) \sin(n\beta y), \quad (1)$$

$$v = B_{mn} \sin(m\alpha x) \cos(n\beta y), \quad (2)$$

$$w = C_{mn} \sin(m\alpha x) \sin(n\beta y), \quad (3)$$

其中, $\alpha = \pi/L, \beta = \pi/W, L, W$ 分别为板在 x, y 方向的几何尺寸; A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} 为待定系数, m 和 n 分别表示 x 和 y 方向的半波数。利用蒙皮和筋条刚度的叠加原理可以计算加筋板的等效刚度。整体等效刚度表示如下:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\text{sk}} + \mathbf{A}^{\text{st}}, \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\text{sk}} + \mathbf{B}^{\text{st}}, \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\text{sk}} + \mathbf{D}^{\text{st}}, \quad (6)$$

式中, \mathbf{A}, \mathbf{B} 和 \mathbf{D} 分别表示拉伸刚度系数、耦合刚度系数和弯曲刚度系数,上标 sk 和 st 分别代表蒙皮和筋条。根据改进的大挠度理论,加筋板任意点的应变分量可以由中间表面的应变和曲率得到:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zk_x, \\ \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + zk_y, \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + 2zk_{xy}, \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$\varepsilon_x^0 = u_{,x}, \varepsilon_y^0 = v_{,y}, \gamma_{xy}^0 = u_{,y} + v_{,x}, k_x = -w_{,xx}, k_y = -w_{,yy}, k_{xy} = -w_{,xy}. \quad (8)$$

矩形板内力和内力矩表示如下:

$$\{N_x, N_y, N_{xy}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} dz, \quad \{M_x, M_y, M_{xy}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} z dz. \quad (9)$$

对于筋肋,考虑筋肋和蒙皮位移的连续性,其几何方程依然采用式(7).其本构方程可以用均匀化原理表示为

$$\sigma_x = \frac{1}{b} E \varepsilon_x, \quad \sigma_y = \frac{1}{d} E \varepsilon_y, \quad \tau_{xy} = \frac{1}{b} G \gamma_{xy}, \quad \tau_{yx} = \frac{1}{d} G \gamma_{yx}, \quad (10)$$

$$b = W/N_a, \quad d = L/N_c, \quad (11)$$

其中, N_a 为纵向(x 轴方向)筋条数, N_c 为横向(y 轴方向)筋条数.筋肋截面单位长度内力和内力矩为

$$\begin{cases} N_x = A_s \sigma_x = \frac{A_s E}{b} \varepsilon_x, \quad N_y = A_r \sigma_y = \frac{A_r E}{d} \varepsilon_y, \\ M_x = \frac{E \bar{I}_s}{b} \kappa_x = \left(\frac{E I_s}{b} + \frac{E z_s^2 A_s}{b} \right) \kappa_x, \quad M_y = \frac{E \bar{I}_r}{d} \kappa_y = \left(\frac{E I_r}{d} + \frac{E z_r^2 A_r}{d} \right) \kappa_y, \\ M_{xy} = \left(\frac{G J_s}{2b} + \frac{G J_r}{2d} \right) \kappa_{xy}, \end{cases} \quad (12)$$

$$A_s = A_r = th, \quad z_s = z_r = (h + H)/2, \quad I_s = I_r = th^3/12, \quad (13)$$

$$J_s = J_r = \frac{t^3 h}{16} \left[\frac{16}{3} - 3.36 \frac{t}{h} \left(1 - \frac{t^4}{12h^4} \right) \right]. \quad (14)$$

对于拉弯耦合,考虑到

$$(A_{ij}^{st}, B_{ij}^{st}, D_{ij}^{st}) = \int Q_{ij}^{st} (1, z, z^2) dz, \quad (15)$$

所以,对于筋肋有

$$B_{ij}^{st} = \int Q_{ij}^{st} z dz = Q_{ij}^{st} h z_s = A_{ij}^{st} z_s. \quad (16)$$

1.2 模型描述

正交网格加筋板作为一种经典的加筋板结构,其加筋肋在每个位置的高度都相同.这就导致板体的屈曲破坏沿径向分布不均匀.如图2所示,传统正交网格加筋板中部屈曲变形小于上下两侧受力侧的屈曲变形,大于左右两侧的屈曲变形.由此可知,失效发生在板上下两侧的局部区域,板中部并未达到失效状态.因此,加筋板的承载能力还有进一步提高的空间.

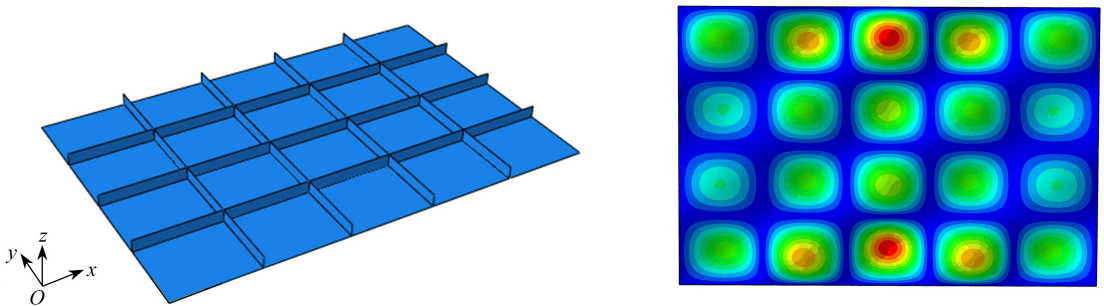


图2 传统网格加筋板

Fig. 2 The traditional grid stiffened plate

根据优化理论中的同步失效准则,当加筋板各个位置的材料同时失效时,材料利用率最大,质量最小.此时,加筋板的屈曲变形和破坏沿板体高度均匀分布,可以显著提高结构的承载力.为此,本文设计了一种新型的弧形加筋板,其轴向和横向筋肋高度分别沿 x 和 y 方向呈弧形曲线.如图3所示,当径向筋肋中间部分高度大于两侧高度时,刚度也会随之变化.可以推断,弧形设计的加强筋能改变结构的刚度分布,进而使轴向半波均匀分布.因此,沿轴向加筋板体可以实现同步失效,其材料利用率也得到了明显提高.为了建立该模型,本

文采用了二次函数来描述弧形加强筋高度的变化,弧形加强筋高度 z 与纵坐标 x 之间的关系如下:

$$z = ax^2 + bx + c. \tag{17}$$

上式边界条件为

$$\begin{cases} z = h_e, & x = \pm \frac{L}{2}, \\ z = h_m, & x = 0. \end{cases} \tag{18}$$

将式(18)代入式(17),可得到

$$z = \frac{4(h_e - h_m)}{L^2}x^2 + h_m, \tag{19}$$

式中, h_e 表示加强筋末端高度, h_m 表示加强筋中部高度. 如图 4 所示, 当 $h_m > h_e$ 时, 加强筋具有凸弧形形状; 当 $h_m < h_e$ 时, 加强筋呈凹弧形; 当 $h_m = h_e$ 时, 弧形加强筋退化为传统等直加强筋.

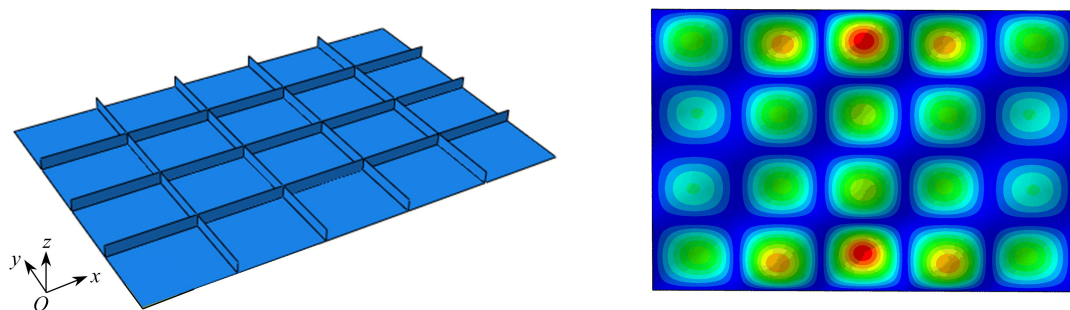


图 3 弧形网格加强板

Fig. 3 The arc grid stiffened plate

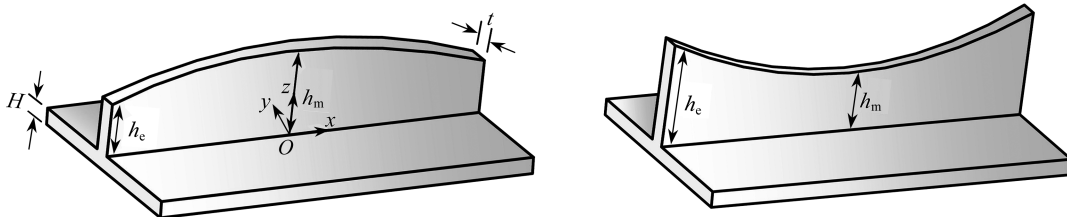


图 4 带凸筋和凹筋的弧形加强板示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the stiffened plate with convex and concave arc ribs

1.3 平铺刚度法

对于非均匀分布的加强筋,传统的内力等效法无法得到精确的刚度系数.因此,可以采用能量等效的方法,将非均匀高度加强筋等效为均匀高度加强筋,其等效刚度系数可通过应变能公式获得.弧形加强筋可分为凸型和凹型两种,当加强筋为凸型 ($h_m > h_e$) 时,其应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma_x \varepsilon_x dv = \frac{1}{2} \varepsilon_x \int_v \frac{E}{b} (\varepsilon_x^0 + z\kappa_x) dv = \frac{E\varepsilon_x}{2b} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{H/2}^{H/2+h(x)} (\varepsilon_x^0 + z\kappa_x) t dz dx = \frac{Et\varepsilon_x}{2b} L \left(\left(\frac{h_e + 2h_m}{3} \right) \varepsilon_x^0 + \frac{1}{2} \left(\frac{H(h_e + 2h_m)}{3} + \frac{3h_e^2 + 8h_m^2 + 4h_e h_m}{15} \right) \kappa_x \right); \tag{20}$$

外力的功可以表示为

$$W = \frac{1}{2} N_x \varepsilon_x L. \tag{21}$$

根据能量守恒定律,可得如下公式:

$$N_x = \frac{Et}{b} \left(\varepsilon_x \left(\frac{h_e + 2h_m}{3} \right) + \left(\frac{(h_e + 2h_m)H}{3} + \frac{3h_e^2 + 8h_m^2 + 4h_e h_m}{15} \right) \kappa_x \right), \tag{22}$$

其刚度系数为

$$A_{11}^{\text{st}} = \frac{Et}{b} \left(\frac{h_e + 2h_m}{3} \right) = \frac{EA_s}{b}, \quad (23)$$

$$B_{11}^{\text{st}} = \frac{Et}{2b} \left(\frac{(h_e + 2h_m)H}{3} + \frac{3h_e^2 + 8h_m^2 + 4h_e h_m}{15} \right) = z_s \frac{EA_s}{b}. \quad (24)$$

当加强筋处于弯曲状态时,凸加强筋的应变能为

$$U = \frac{1}{2} \kappa_x \int_{-L/2}^{L/2} \int_{H/2}^{H/2+h(x)} \sigma_x z t dz dx = \frac{Et k_x}{2b} \left(\left(\frac{(h_e + 2h_m)H}{6} + \frac{3h_e^2 + 8h_m^2 + 4h_e h_m}{30} \right) L \varepsilon_x^0 + \left(\frac{5h_e^3 + 16h_m^3 + 6h_e^2 h_m + 8h_e h_m^2}{105} + \frac{(3h_e^2 + 8h_m^2 + 4h_e h_m)H}{30} + \frac{(h_e + 2h_m)H^2}{12} \right) L k_x \right); \quad (25)$$

外力做的功为

$$W = \frac{1}{2} M_x k_x L. \quad (26)$$

根据能量守恒定律,由方程求出刚度系数如下:

$$D_{11}^{\text{st}} = \frac{Et}{3b} \left(\frac{5h_e^3 + 16h_m^3 + 6h_e^2 h_m + 8h_e h_m^2}{35} + \frac{(3h_e^2 + 8h_m^2 + 4h_e h_m)H}{10} + \frac{(h_e + 2h_m)H^2}{4} \right) = \frac{EI_s}{b} + z_s^2 \frac{EA_s}{b}. \quad (27)$$

当加强筋处于扭转状态时,应变能可表示为

$$U = \frac{1}{2} \frac{G}{b} J \frac{k_{xy}}{2} \frac{k_{xy}}{2} = \frac{G}{8b} k_{xy}^2 \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{t^3}{3} h(x) - \frac{3.36t^4}{16} + \frac{3.36t^8}{192} \frac{1}{h^4(x)} \right) dx = \frac{G}{8b} k_{xy}^2 L \left(\frac{(h_e + 2h_m)t^3}{9} - \frac{3.36t^4}{16} \right) + \frac{1.12Gt^8}{2^{10}bh_m^4} k_{xy}^2 L \left(\frac{8h_m^3 + 10h_e h_m^2 + 15h_e^2 h_m}{24h_e^3} + \frac{5}{16} \sqrt{\frac{h_m}{h_m - h_e}} \ln \frac{2h_m - h_e + 2\sqrt{h_m(h_m - h_e)}}{h_e} \right); \quad (28)$$

外力的功可以表示为

$$W = \frac{1}{2} M_{xy} \frac{k_{xy}}{2} L. \quad (29)$$

根据能量守恒定律,可求出刚度系数为

$$D_{66}^{\text{st}} = \frac{G}{2b} \left(\frac{(h_e + 2h_m)t^3}{9} - \frac{3.36t^4}{16} + \frac{1.12t^8}{2^8 h_m^4} \left(\frac{8h_m^3 + 10h_e h_m^2 + 15h_e^2 h_m}{24h_e^3} + \frac{5}{16} \sqrt{\frac{h_m}{h_m - h_e}} \ln \frac{2h_m - h_e + 2\sqrt{h_m(h_m - h_e)}}{h_e} \right) \right) = \frac{GJ_s}{2b}. \quad (30)$$

当加劲肋为凹形时 ($h_m < h_e$),板体的局部屈曲总是发生在板体中部.为了评估凹肋对刚度的贡献,利用面积等效方法引入了一个等效因子 k .因此,凹式加强筋的应变能可以表示为

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dv = \frac{Et \varepsilon_x}{2b} L \left(\left(\frac{kh_e + 2h_m}{3} \right) \varepsilon_x^0 + \frac{1}{2} \left(\frac{H(kh_e + 2h_m)}{3} + \frac{3k^2 h_e^2 + 8h_m^2 + 4kh_e h_m}{15} \right) k_x \right), \quad (31)$$

其中

$$k = \frac{h_e + 2h_m}{3h_e}. \quad (32)$$

同样,根据能量守恒定律,刚度系数为

$$A_{11}^{\text{st}} = \frac{Et}{b} \left(\frac{kh_e + 2h_m}{3} \right) = \frac{EA_s}{b}, \quad (33)$$

$$B_{11}^{\text{st}} = \frac{Et}{2b} \left(\frac{(kh_e + 2h_m)H}{3} + \frac{3k^2h_e^2 + 8h_m^2 + 4kh_e h_m}{15} \right) = z_s \frac{EA_s}{b}. \quad (34)$$

加强筋处于弯曲状态时,应变能表示为

$$U = \frac{1}{2} \kappa_x \int_{-L/2}^{L/2} \int_{H/2}^{H/2+h(x)} \sigma_x z t dz dx = \frac{Et\kappa_x}{2b} \left(\left(\frac{(kh_e + 2h_m)H}{6} + \frac{3k^2h_e^2 + 8h_m^2 + 4kh_e h_m}{30} \right) L \mathcal{E}_x^0 + \left(\frac{5k^3h_e^3 + 16h_m^3 + 6k^2h_e^2h_m + 8kh_e h_m^2}{105} + \frac{(3k^2h_e^2 + 8h_m^2 + 4kh_e h_m)H}{30} + \frac{(kh_e + 2h_m)H^2}{12} \right) L \kappa_x \right). \quad (35)$$

同理,刚度系数为

$$D_{11}^{\text{st}} = \frac{Et}{3b} \left(\frac{5k^3h_e^3 + 16h_m^3 + 6k^2h_e^2h_m + 8kh_e h_m^2}{35} + \frac{(3k^2h_e^2 + 8h_m^2 + 4kh_e h_m)H}{10} + \frac{(kh_e + 2h_m)H^2}{4} \right) = \frac{EI_s}{b} + z_s^2 \frac{EA_s}{b}. \quad (36)$$

当加强筋处于扭转状态时,其应变能可表示为

$$U = \frac{G}{8b} k_{xy}^2 \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{t^3}{3} h(x) - \frac{3.36t^4}{16} + \frac{3.36t^8}{192} \frac{1}{h^4(x)} \right) dx = \frac{G}{8b} k_{xy}^2 L \left(\frac{(kh_e + 2h_m)t^3}{9} - \frac{3.36t^4}{16} \right) + \frac{1.12Gt^8}{2^{13}bh_m^4} k_{xy}^2 L \left(5 \sqrt{\frac{h_m}{kh_e - h_m}} \arctan \sqrt{\frac{kh_e - h_m}{h_m}} + \frac{15k^2h_e^2h_m + 10kh_e h_m^2 + 8h_m^3}{3k^3h_e^3} \right). \quad (37)$$

同样,可以得到刚度系数为

$$D_{66}^{\text{st}} = \frac{G}{2b} \left(\frac{(kh_e + 2h_m)t^3}{9} - \frac{3.36t^4}{16} + \frac{1.12t^8}{2^{10}h_m^4} \left(5 \sqrt{\frac{h_m}{kh_e - h_m}} \arctan \sqrt{\frac{kh_e - h_m}{h_m}} + \frac{15k^2h_e^2h_m + 10kh_e h_m^2 + 8h_m^3}{3k^3h_e^3} \right) \right) = \frac{GJ_s}{2b}. \quad (38)$$

同样地,横向筋条的刚度系数也可按上述方法推导.根据平铺刚度法求解弧形加筋板,加筋板的整体结构刚度可由蒙皮和筋肋叠加而成,即

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{EH}{1-\mu^2} + \frac{EA_s}{b} & \frac{E\mu H}{1-\mu^2} & 0 \\ \frac{E\mu H}{1-\mu^2} & \frac{EH}{1-\mu^2} + \frac{EA_r}{d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EH}{2(1+\mu)} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{EA_s}{b} z_s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_r}{d} z_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{EH^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{EI_s}{b} + \frac{EA_s}{b} z_s^2 & \frac{E\mu H^3}{12(1-\mu^2)} & 0 \\ \frac{E\mu H^3}{12(1-\mu^2)} & \frac{EH^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{EI_r}{d} + \frac{EA_r}{d} z_r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EH^3}{12(1+\mu)} + \frac{GJ_s}{2b} + \frac{GJ_r}{2d} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

矩形板的平衡方程为

$$\begin{cases} N_{x,x} + N_{xy,y} = 0, \\ N_{y,y} + N_{xy,x} = 0, \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + (N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy}) = 0. \end{cases} \quad (42)$$

当矩形板发生屈曲时,其挠度、内力和内弯矩均会产生一个极小的线性增量,可写成初始量+增量的形式.因此当屈曲发生时,挠度、内力和内弯矩可表示为

$$\begin{cases} u = u_0 + u_1, \\ v = v_0 + v_1, \\ w = w_0 + w_1, \end{cases} \quad \begin{cases} N_x = N_{x0} + N_{x1}, \\ N_y = N_{y0} + N_{y1}, \\ N_{xy} = N_{xy0} + N_{xy1}, \end{cases} \quad \begin{cases} M_x = M_{x0} + M_{x1}, \\ M_y = M_{y0} + M_{y1}, \\ M_{xy} = M_{xy0} + M_{xy1}. \end{cases} \quad (43)$$

则相应的应变分量增量可以写为

$$\begin{cases} \varepsilon_{x1}^0 = u_{1,x}, \\ \varepsilon_{y1}^0 = v_{1,y}, \\ \gamma_{xy1}^0 = u_{1,y}, \end{cases} \quad \begin{cases} \kappa_{x1} = -w_{1,xx}, \\ \kappa_{y1} = -w_{1,yy}, \\ \kappa_{xy1} = -w_{1,xy}. \end{cases} \quad (44)$$

将上式代入平衡方程中,并将方程线性化,消去满足初始平衡方程的项,并忽略高阶小项和包含壳初始转角($w_{0,x}$ 和 $w_{0,y}$)的项,则平衡方程变为

$$\begin{cases} N_{x1,x} + N_{xy1,y} = 0, \\ N_{y1,y} + N_{xy1,x} = 0, \\ M_{x1,xx} + 2M_{xy1,xy} + M_{y1,yy} + (N_{x0} w_{1,xx} + 2N_{xy0} w_{1,xy} + N_{y0} w_{1,yy}) = 0. \end{cases} \quad (45)$$

对位移进行偏导计算,并将物理方程和几何方程代入平衡方程最终可解得临界屈曲荷载表达如下:

$$P_{cr} = \frac{1}{(n\beta)^2} \left(T_{33} - \frac{T_{11}T_{23}T_{32} + T_{22}T_{13}T_{31} - T_{12}T_{13}T_{23} - T_{21}T_{13}T_{32}}{T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21}} \right), \quad (46)$$

其中

$$\begin{cases} T_{11} = A_{11}(m\alpha)^2 + A_{33}(n\beta)^2, T_{12} = A_{12}mn\alpha\beta + A_{33}mn\alpha\beta, T_{13} = -B_{11}(m\alpha)^3, \\ T_{21} = A_{21}mn\alpha\beta + A_{33}mn\alpha\beta, T_{22} = A_{22}(n\beta)^2 + A_{33}(m\alpha)^2, T_{23} = -B_{22}n^3\beta^3, \\ T_{31} = -B_{11}(m\alpha)^3, T_{32} = -B_{22}(n\beta)^3, \\ T_{33} = D_{11}(m\alpha)^4 + (D_{12} + 2D_{33} + D_{21})(m\alpha)^2(n\beta)^2 + D_{22}(n\beta)^4. \end{cases} \quad (47)$$

2 弧形加筋板的轻量化设计

临界屈曲荷载作为加筋板等结构的一项重要设计指标,常被用于结构的初始设计阶段.因此,本节将基于平铺刚度法并结合粒子群优化算法对弧形加筋板进行轻量化设计——即在满足承载力约束条件下,使结构质量 M 最小,其相应的轻量化公式如下:

$$\begin{cases} \text{find } \mathbf{d}, \\ \text{min } M, \\ \text{s.t. } P_0 - P_{cr} \leq 0, \end{cases} \quad (48)$$

其中, $\mathbf{d} = [H, t, h_{e1}, h_{m1}, h_{e2}, h_{m2}, N_a, N_c]$, H 为板厚, t 为筋条宽度, h_{e1} 和 h_{m1} 为纵向筋条端部和中部高度, h_{e2} 和 h_{m2} 为横向筋条端部和中部高度, N_a 和 N_c 为纵筋数和横筋数, P_0 为设计临界荷载,大小为14 kN/m.

弧形加筋板的相关设计参数及其设计范围如表 1 所示.此外,为验证该模型的准确性,以有限元法为参考,应用商业软件 ABAQUS 进行分析验证.

本文采用了粒子群优化算法进行优化设计,粒子群优化算法的种群数取为 100,优化迭代次数取为 50.在每次迭代过程中根据平铺刚度法预测临界屈曲荷载值,同时将优化结果代入 ABAQUS 进行验算.考虑到效率和精度,网格大小取 8 mm,计算出的结果精度和计算时间均能够满足要求.当优化迭代结果满足收敛条件后即可认为最优设计满足设计要求,否则将继续进行迭代搜索,直到满足迭代终止条件后停止搜索,最终输出最优解.

表 1 弧形加筋板参数的验证与设计空间

Table 1 The validation and design space of parameters of arc rib stiffened cylindrical plates

	H/mm	t/mm	h_{e1}/mm	h_{m1}/mm	h_{e2}/mm	h_{m2}/mm	N_a	N_c
lowerbound	1	5	5	20	20	5	3	4
upperbound	4	15	20	80	80	20	10	10

表 2 传统加筋板和弧形加筋板优化

Table 2 Optimization of traditional and arc rib stiffened plates

	H/mm	t/mm	h_{e1}/mm	h_{m1}/mm	h_{e2}/mm	h_{m2}/mm	N_a	N_c	critical load $P_{cr}/(kN/m)$	structural mass M/kg
initial design	1.10	13.00	24.00	24.00	24.00	24.00	3	3	13.5	7.91
lightweight design (traditional)	1.00	8.13	25.40	25.40	25.40	25.40	3	4	14.1	6.82
lightweight design (arc rib stiffened)	1.00	6.00	5.00	66.14	25.08	13.35	3	4	14.1	5.42

加筋板优化结果如表 2 所示.从表 2 中可以看出,优化后的弧形加筋板质量为 5.42 kg,比初始设计的 7.91 kg 降低了 31.5%,比传统非弧形加筋板质量降低了 20.5%.由此可以推断,弧形加筋板的优化效果优于传统加筋板,其材料的潜力得到进一步深入挖掘.此外,采用平铺刚度法计算出弧形加筋板的临界屈曲荷载为 14.05 kN/m,而采用有限单元法计算出弧形加筋板的临界屈曲荷载为 14.27 kN/m,二者相对误差仅为 1.5%,满足精度要求.这说明使用本文所推导的平铺刚度法可以准确预测弧形加筋板的临界屈曲荷载.

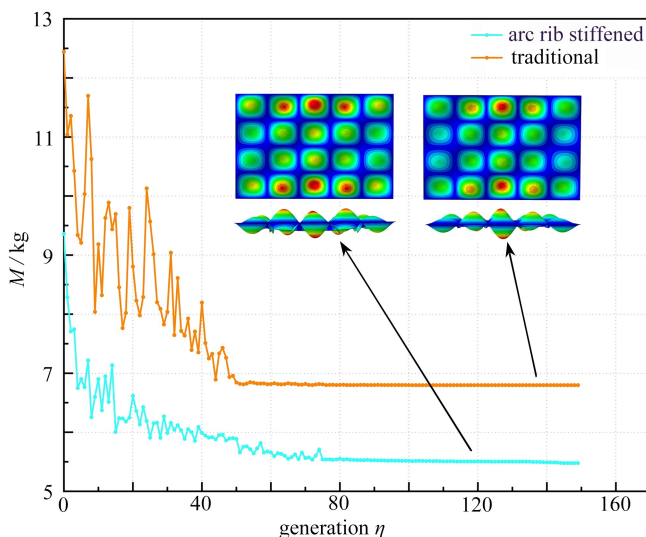


图 5 优化历程

Fig. 5 The optimization process

图 5 给出了传统加筋板与弧形加筋板的优化迭代历程及其对应的屈曲模态.可以看出,结合平铺等效刚度法的优化迭代收敛速度较快,且较为稳定,计算效率较高.通过对两种加筋板的屈曲变形云图的比较,可以看出传统加筋板的屈曲变形主要发生在板边的中间部分,而弧形加筋板的屈曲波形沿板边分布更为均匀.因

此,弧形加筋板更容易实现同步破坏,其材料利用率更高。

3 总 结

伴随着航天装备大型化、承载重型化的发展趋势,薄壁承载结构的强度与轻量化设计之间的矛盾逐渐突出。因此,本文从同步失效的概念出发,设计了一种新型的弧形加筋板结构。新型弧形加筋板的主要目的是提高其承载能力,实现轻量化设计。同时给出了基于弹性大挠度理论的平铺刚度法,通过与 ABAQUS 的结果进行对比,验证了平铺刚度法的可靠性。在此基础上,结合平铺刚度法和粒子群优化算法,对线性屈曲状态下的弧状加筋板进行了轻量化设计。

算例表明,所提出的弧型加筋板比传统加筋板具有更高的性能,同时基于平铺刚度法能准确预测临界屈曲载荷。结果表明,与传统的优化设计相比,弧形加筋板优化后的质量比传统加筋板优化后的质量降低了 20.5%,具有更好的优化效果。弧形加筋板可以更好地提高材料利用率和结构承载能力,获得更大的实际效益。

参考文献(References):

- [1] 王伟,吴梵.单根加筋板整体屈曲临界应力计算与分析[J].舰船科学技术,2010,32(10):3-7.(WANG Wei, WU Fan. Calculating and analysising of the overall buckling's critical stress of single stiffened panels[J]. *Ship Science and Technology*, 2010, 32(10): 3-7.(in Chinese))
- [2] 王伟,吴梵.加筋板整体屈曲临界应力计算与分析[J].中国舰船研究,2011,6(3):21-27.(WANG Wei, WU Fan. Computational analysis on the critical stress of stiffened plates' overall buckling[J]. *Chinese Journal of Ship Research*, 2011, 6(3): 21-27.(in Chinese))
- [3] 李彦娜,董科.基于广义切线模量理论的铝合金加筋板结构轴压极限强度分析[J].船舶工程,2016,38(1):78-81.(LI Yanna, DONG Ke. Analysis of ultimate axial compressive strength of stiffened aluminum panel structure based on generalized tangent modulus theory[J]. *Ship Engineering*, 2016, 38(1): 78-81.(in Chinese))
- [4] 张振兴,肖刚,李四平.横向纤维搭桥下的脱层屈曲数值模拟[J].上海交通大学学报,2010,44(1):130-133.(ZHANG Zhenxing, XIAO Gang, LI Siping. Simulation of delamination buckling by fiber bridges[J]. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2010, 44(1): 130-133.(in Chinese))
- [5] 朱菊芬,郑罡,武金璞.层合板壳脱层屈曲的有限元分析[J].应用数学和力学,2000,21(3):301-306.(ZHU Jufen, ZHENG Gang, WU Jinying. FEM analysis of delamination buckling in composite plates & shells[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 21(3): 301-306.(in Chinese))
- [6] 叶广宁,邵青,何宇廷,等.铝合金加筋板轴压屈曲稳定性的有限元分析[J].机械工程材料,2013,37(3):83-86.(YE Guangning, SHAO Qing, HE Yuting, et al. FEM analysis on compress buckling stability of stiffened aluminum alloy panels[J]. *Materials for Mechanical Engineering*, 2013, 37(3): 83-86.(in Chinese))
- [7] 江玮,郁鼎文,冯平法.加筋板结构静态性能分析及优化设计[J].机械设计与制造,2008,2:4-6.(JIANG Wei, YU Dingwen, FENG Pingfa. Static stiffness analysis and structure optimization of stiffened plate[J]. *Machinery Design & Manufacture*, 2008, 2: 4-6.(in Chinese))
- [8] 黄丕帅,陈昆.均匀受压加筋板的刚性加筋与柔性加筋临界点确定[J].起重运输机械,2017,5:42-45.(HUANG Pishuai, CHEN Kun. Determination of critical point between rigid reinforcement and flexible reinforcement of stiffened plate under uniform pressure [J]. *Hoisting and Conveying Machinery*, 2017, 5: 42-45.(in Chinese))
- [9] 黄丽华,刘鹏洋,曲激婷.正交各向异性加筋板屈曲分析方法研究[J].计算力学学报,2021,38(1):78-83.(HUANG Lihua, LIU Pengyang, QU Jiting. Study on the buckling algorithm of orthotropic stiffened plate[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, 38(1): 78-83.(in Chinese))
- [10] 刘毅,聂坤,戴瑛.任意铺层复合材料加筋板屈曲/后屈曲行为的解析解[J].南京航空航天大学学报,2018,50(1):1-10.(LIU Yi, NIE Kun, DAI Ying. Analytical solution for buckling and postbuckling behavior of stiffened arbitrary laminated composite panels [J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*,

- 2018, **50**(1): 1-10. (in Chinese))
- [11] 高伟, 刘存, 陈顺强. 变厚度复合材料加筋板轴压试验及分析方法[J]. 航空学报, 2022, **43**(11): 526764. (GAO Wei, LIU Cun, CHEN Shunqiang. Axial compression test and analysis method of composite stiffened plates with variable thickness[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2022, **43**(11): 526764. (in Chinese))
- [12] 石峰, 马洪英, 孙义真, 等. 基于 n 阶剪切变形理论的复合材料层合板屈曲分析[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(12): 1346-1357. (SHI Feng, MA Hongying, SUN Yizhen, et al. Buckling analysis of composite laminate plates based on the n th-order shear deformation theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(12): 1346-1357. (in Chinese))
- [13] 吴菁, 胡明勇, 章向明, 等. 复合材料帽型加筋板等效弯曲刚度[J]. 复合材料学报, 2022, **39**(12): 6088-6095. (WU Jing, HU Mingyong, ZHANG Xiangming, et al. Equivalent bending stiffness of composite hat-stiffened panel[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2022, **39**(12): 6088-6095. (in Chinese))
- [14] 王平远, 李成, 姚林泉. 基于非局部应变梯度理论功能梯度纳米板的弯曲和屈曲研究[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(1): 15-26. (WANG Pingyuan, LI Cheng, YAO Linquan. Bending and buckling of functionally graded nanoplates based on the nonlocal strain gradient theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(1): 15-26. (in Chinese))
- [15] 李若愚, 王天宏. 薄板热力耦合的屈曲分析[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(8): 877-886. (LI Ruoyu, WANG Tianhong. Thermo-mechanical buckling analysis of thin plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(8): 877-886. (in Chinese))
- [16] 任慧龙, 马开开, 杨征, 等. 不同扶强材形式的纵骨贯穿舱壁结构疲劳试验[J]. 船舶工程, 2019, **41**(2): 15-18. (REN Huilong, MA Kaikai, YANG Zheng, et al. Fatigue test of the cutout of bulkhead for longitudinals with different type of stiffeners[J]. *Ship Engineering*, 2019, **41**(2): 15-18. (in Chinese))
- [17] 万育龙, 朱旭光. 加筋板屈曲和极限强度有限元计算方法研究[J]. 船海工程, 2013, **42**(6): 17-21. (WAN Yulong, ZHU Xuguang. Studies on the nonlinear finite element method for buckling and ultimate strength of stiffened panels[J]. *Ship & Ocean Engineering*, 2013, **42**(6): 17-21. (in Chinese))
- [18] 朴春雨, 章怡宁. 典型加筋板的优化设计[J]. 飞机设计, 2003, **4**: 29-32. (PIAO Chunyu, ZHANG Yining. Optimal design of typical stiffened panels[J]. *Aircraft Design*, 2003, **4**: 29-32. (in Chinese))
- [19] 满林涛, 杨婵. 矩形加筋板结构优化设计[J]. 中国科技信息, 2018, **19**: 45-48. (MAN Lintao, YANG Chan. Rectangular stiffened plate structure optimization design[J]. *China Science and Technology Information*, 2018, **19**: 45-48. (in Chinese))
- [20] 施利娟, 杨平. 高速铝船合金带筋板的力学性能优化设计[J]. 船海工程, 2011, **40**(2): 36-39. (SHI Lijuan, YANG Ping. Optimum design of mechanical properties of aluminum sheets-with-ribs of high speed ships[J]. *Ship & Ocean Engineering*, **40**(2): 36-39. (in Chinese))
- [21] 王博, 周子童, 周演, 等. 薄壁结构多层级并发加筋拓扑优化研究[J]. 计算力学学报, 2021, **38**(4): 487-497. (WANG Bo, ZHOU Zitong, ZHOU Yan, et al. Concurrent topology optimization of hierarchical stiffened thin-walled structures[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, **38**(4): 487-497. (in Chinese))
- [22] 崔荣华, 崔天晨, 孙直, 等. 基于水平集法的薄板加强筋分布优化理论研究[J]. 固体力学学报, 2018, **39**(6): 587-593. (CUI Ronghua, CUI Tianchen, SUN Zhi, et al. Topology optimization for stiffener layout of thin plate structures based on level set method[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, **39**(6): 587-593. (in Chinese))
- [23] MENG Z, LUO X, ZHOU H. Lightweight design of arcuately stiffened cylindrical shells based on smeared stiffener method and active learning strategy[J]. *Thin-Walled Structures*, 2022, **174**: 109167.
- [24] 常楠, 杨伟, 赵美英. 典型复合材料加筋壁板优化设计[J]. 机械设计, 2007, **24**(12): 46-48. (CHANG Nan, YANG Wei, ZHAO Meiyong. Optimization design on typical reinforced wainscot of composite materials[J]. *Journal of Machine Design*, 2007, **24**(12): 46-48. (in Chinese))
- [25] 赵群, 丁运亮, 金海波. 基于压弯刚度匹配论则的复合材料加筋板结构优化设计[J]. 南京航空航天大学学报, 2010, **42**(3): 357-362. (ZHAO Qun, DING Yunliang, JIN Haibo. Structural optimization design of composite

- stiffened panels based on matching regulations of compression and bending stiffnesses[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2010, **42**(3): 357-362.(in Chinese))
- [26] 王栋, 李正浩. 薄板结构加筋布局优化设计方法研究[J]. 计算力学学报, 2018, **35**(2): 138-143.(WANG Dong, LI Zhenghao. Layout optimization method for stiffeners of plate structure[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2018, **35**(2): 138-143.(in Chinese))
- [27] 郝鹏, 王博, 李刚, 等. 基于代理模型和等效刚度模型的加筋柱壳混合优化设计[J]. 计算力学学报, 2012, **29**(4): 481-486.(HAO Peng, WANG Bo, LI Gang, et al. Hybrid optimization of grid-stiffened cylinder based on surrogate model and smeared stiffener model[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, **29**(4): 481-486.(in Chinese))
- [28] 李刚, 孟增. 基于RBF神经网络模型的结构可靠度优化方法[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(11): 1271-1279.(LI Gang, MENG Zeng. Reliability based design optimization with the RBF neural network model[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(11): 1271-1279.(in Chinese))
- [29] 张洪波. 加筋板结构稳定优化设计研究[J]. 山西建筑, 2011, **37**(3): 44-45.(ZHANG Hongbo. Research on stability optimization design for stiffened plate structure[J]. *Shanxi Architecture*, 2011, **37**(3): 44-45.(in Chinese))
- [30] 郑俊锋, 姚卫星, 王磊. 均布平压下加筋板拓扑优化的工程方法[J]. 飞机设计, 2017, **37**(2): 31-35.(ZHENG Junfeng, YAO Weixing, WANG Lei. Engineering algorithm for topology optimization of stiffened panel under uniform pressure[J]. *Aircraft Design*, 2017, **37**(2): 31-35.(in Chinese))