

高 zeta 势下 Phan-Thien-Tanner (PTT) 流体的电渗微推进器*

郑佳璇^{1,2}, 梁韵笛³, 菅永军³

1. 内蒙古师范大学 数学科学学院, 呼和浩特 010022;
2. 内蒙古自治区应用数学中心, 呼和浩特 010022;
3. 内蒙古大学 数学科学学院, 呼和浩特 010021)

摘要: 在高的壁面 zeta 电势下, 考查了 Phan-Thien-Tanner (PTT) 黏弹性流体在平行板微通道中的电渗推进器问题. 在没有考虑 Debye-Hückel 线性近似的条件下, 求解了非线性 Poisson-Boltzmann 方程, 得到了高 zeta 电势下电势的解析解. 通过求解 PTT 流体满足的 Cauchy 动量方程, 获得了 Navier 滑移条件下微推进器速度的数值解. 进而通过数值积分得到了电渗微推进器的性能分布, 包括比冲、推力、效率和推力-功率比. 最后, 详细分析了黏弹性参数、壁面 zeta 电势、滑移系数和双电层厚度对速度分布及推进器性能的影响. 结果表明, 与 Newton 流体相比, PTT 流体作为推进剂有利于推进器性能的提高, 比如, 流体速度随着黏弹性参数的增大而增大, 导致推进器性能也呈增大的趋势. 此外, 当前推进器比冲为 800~1 000 ms 时, 推力可达 0~250 μN , 效率为 6%~12%, 推力-功率比为 0~20 mN/W.

关键词: 高 zeta 电势; 电渗流 (EOF); 微推进器; 推进器性能

中图分类号: O357.1; O361.4 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430346

Electroosmotic Micro Thrusters of Phan-Thien-Tanner (PTT) Fluid at High Zeta Potential

ZHENG Jiaxuan^{1,2}, LIANG Yundi³, JIAN Yongjun³

1. College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, P.R.China;
2. Center for Applied Mathematics of Inner Mongolia Autonomous Region, Hohhot 010022, P.R.China;
3. School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, P.R.China)

Abstract: Electroosmotic micro thrusters filled with Phan-Thien-Tanner (PTT) viscoelastic fluid between 2 parallel plates were investigated at high wall zeta potential. The nonlinear Poisson-Boltzmann equation was

* 收稿日期: 2022-10-31; 修订日期: 2023-03-13

基金项目: 国家自然科学基金项目 (12262026); 内蒙古自治区自然科学基金项目 (2021MS01007); 内蒙古自治区高校创新科研团队计划项目 (NMGIRT2323); 内蒙古自治区“草原英才”工程 (12000-12102013)

作者简介: 郑佳璇 (1992—), 女, 讲师, 博士 (E-mail: 31536015@mail.imu.edu.cn);
梁韵笛 (1996—), 女, 硕士生 (E-mail: 31936003@mail.imu.edu.cn);
菅永军 (1974—), 男, 教授, 博士生导师 (通讯作者. E-mail: jianyj@imu.edu.cn).

引用格式: 郑佳璇, 梁韵笛, 菅永军. 高 zeta 势下 Phan-Thien-Tanner (PTT) 流体的电渗微推进器[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(10): 1213-1225.

solved without the Debye-Hückel linear approximation, to obtain the analytical electric potential at the high zeta potential. The numerical velocity of the micro thruster was given under the Navier slip condition in solution of the Cauchy momentum equation satisfied by the PTT fluid. Performances of the micro thrusters, including the specific impulse, the thrust, the efficiency, and the thrust-to-power ratio, were obtained through numerical integration. Finally, effects of the viscoelastic parameters, the wall zeta potential, the slip coefficient, and the double electric layer thickness on the velocity distributions and propeller performances, were discussed. The results show that, compared with the Newtonian fluid, the PTT fluid as a propellant is conducive to the improvement of propeller performances. For example, the fluid velocity increases with the viscoelastic parameters, resulting in an increasing trend of propeller performances. The present thruster delivers a thrust about $0\sim 250\ \mu\text{N}$ with a specific impulse of $800\sim 1\ 000\ \text{ms}$, achieving an efficiency of $6\%\sim 12\%$ and a thrust-power ratio of $0\sim 20\ \text{mN/W}$.

Key words: high zeta potential; electroosmotic flow; micro-thruster; thruster performance

0 引 言

近年来,随着科学技术的进步与航天事业的发展,复杂多样的空间活动日益增加,促使微纳推进器广泛被关注.与传统卫星相比,微型卫星或航行器具有轻便、成本低、精度高等优势,它们的小型化已成为现代航空事业发展的主要趋势.其中,微纳推进器作为小型卫星动力系统中空间推进的重要组成部分,也逐渐向低质量和小体积的方向发展.比如,遥感卫星在绕地旋转时会形成一个旋转的轨道,卫星实现自身功能的同时还有姿态调整的任务,那么航天器的精准控制和轨道的校正就可以用微纳推进器去完成^[1-2].此外,电推进技术也已被广泛研究并应用于许多相关的空间任务中^[3-7].而电渗就是一个基本的电动现象,它能有效驱动和控制小型化系统中流体的流动.在外加电场的作用下,流体被产生的电渗体力所驱动,即电渗流(EOF)^[8-9],这与微纳管道内的双电层(EDL)^[10]密切相关.微纳管道内电渗流动的问题已被广泛探讨,比如,电渗与压力混合驱动的幂律流体特性^[11]、电磁电渗驱动的流体流动^[12]以及电渗驱动溶液浓度的扩散^[13]等.

基于电渗流具有实现微纳推进器高效率和低功耗的优势,许多专家和学者将其作为电渗推进器中微/纳流体的运输流而研究^[14-15].Diez等^[16]首先将纳米管道内流体的电动力学特征引入空间推进的研究中,使微纳流体力学进入一个新的领域,为之后研究微推进器提供了理论基础和研究参考.Huang等^[17]将纳米电动推进器与两层流体的电渗流动相结合,当存在壁面滑移条件时,对电渗推进器的推进性能进行了研究.Zheng和Jian^[18-19]考虑了在柔性纳米管道内空间电渗推进器的问题,得到了推进器性能的解析表达式,这些性能包括推力、比冲、效率以及推力-功率比,它们是衡量推进器是否满足不同空间推进任务的关键因素.随后,他们数值研究了steric效应对柔性纳米管道内电渗推进器的影响^[20],并且发现由于Joule热效应的存在,在考虑离子大小的实际情况下,虽然推进器的推力可以提高,但效率为 $30\%\sim 70\%$,推力-功率比的峰值也会逐渐地消失.然而,在以上研究中,推进器内的流体认为都是Newton流体,因此,非Newton黏弹性流体还没有在电渗推进器的研究中被考虑.

大部分的生物流体是以非Newton黏弹性行为为特征的,具有长链分子结构的溶液,常见的有血液、唾液、蛋白质溶液以及DNA溶液等.具有模拟流体流动黏弹性的模型之一就是简化的Phan-Thien-Tanner(s-PTT)流体模型^[21],它与原始的PTT流体模型相比,区别在于前者仅考虑分子的仿射运动,这意味着简化的PTT流体在较小程度上显示剪切变薄的特性^[22].近年来,利用简化的PTT模型,非Newton黏弹性流体的流变学特性被学者们广泛研究^[15,23-26].Hashemabadi等^[27]调查了通过两平行板间的简化PTT流体流动的问题,并且考虑了本构方程中应力系数分为线性和指数形式的两种情况.他们发现,对于线性应力的情况,弹性系数对流体的速度以及速度的极值有强烈影响.进一步地,在线性和非线性的Navier滑移边界条件下,Ferrás等^[28]增加了二次型PTT黏弹性流体模型的数值研究,并且他们获得了线性PTT流体速度的完全解析解.此外,一个黏弹性流体的电渗流模型被Sarma等^[29]考虑,他们利用简化的PTT本构关系描述了弹性流体的流变学行为,并且在壁面处带有高zeta电势和水动力滑移的条件.他们发现,较高的zeta电势和滑移系数导致体积流率明显增强.

本文首次选取 PTT 流体,即典型的黏弹性非 Newton 流体,作为推进器中的推进剂,并在高 zeta 电势下,利用数值方法调查 PTT 流体的电渗微推进器的性能分布.通过求解非线性的 Poisson-Boltzmann 方程,得到完整的电势解析解.采用广义的 Cauchy 动量方程,根据 Navier 线性滑移边界条件数值地求解电渗流的速度分布.从而,由流体电势和速度所产生的微推进器的推力、比冲、效率和推力-功率比就可以数值地获得.最后,对系统的各个影响参数和推进器的性能进行分析,主要目的是考察 PTT 流体在高 zeta 电势下对电渗微推进器性能的影响.

1 数学模型分析

在推进器的微管道中,我们考虑一个稳定且完全发展的不可压缩黏弹性流体的电渗流动,如图 1 所示,微管道的长和宽分别为 L 和 W ,高为 $2H$,并假设它的长和宽远远大于高,即 $L \gg 2H$, $W \gg 2H$,因此,管道内的流动可看作是在两无限平行的平板间的流动.在通道中心建立直角坐标系,并且假设上下壁面处的双电层不重叠^[30].当在 x 轴方向上施加强度为 E_x 的外部电场时,双电层中的离子被驱动而发生移动,流体微团由于黏性作用而一起移动,从而在整个微管道中形成电渗流.此外,在壁面处具有均匀的表面电荷,即壁面处存在均匀的 zeta 电势.本文采用简化的 PTT 模型来描述流体的流变行为,并用线性 Navier 滑移定律作为壁面边界条件,其中 u_w 是滑移速度.研究中仅考虑温度均匀且不施加外界压力的纯电渗流的流动.

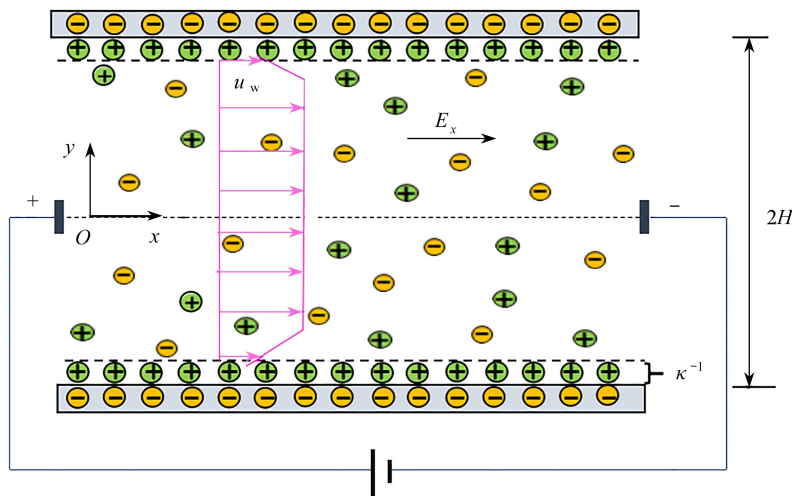


图 1 平行板微管道中黏弹性流体的纯电渗流

Fig. 1 The pure electroosmotic flow of the viscoelastic fluid in a parallel plate microchannel

控制流体流动的动力学方程是连续性方程和动量方程.连续性方程表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

Cauchy 动量方程为

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho_e \mathbf{E}, \quad (2)$$

其中, \mathbf{u} 是速度矢量, ρ 和 ρ_e 分别是流体的密度和净电荷密度, $\boldsymbol{\tau}$ 是聚合物额外应力张量, \mathbf{E} 是电场.

1.1 电势分布

在研究电渗微推进器的性能之前,首先应该考虑微管道内的电势分布.电势 Φ 是两种电势贡献之和,一部分为位于入口和出口由电极产生的电势 ϕ , 由 Laplace 方程 $\nabla^2 \phi = 0$ 描述,另一部分是管道壁面附近自发诱导的电势 ψ , 由如下 Poisson 方程给出^[30-32]:

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_r \varepsilon_0}, \quad (3)$$

其中, ε_r 和 ε_0 分别是聚合物溶液的相对介电常数和真空介电常数,净电荷密度 ρ_e 服从 Boltzmann 分布^[33]:

$$\rho_e = -2n_0 e z \sinh\left(\frac{ez}{k_b T} \psi\right), \quad (4)$$

其中, n_0 是离子密度($n_0 = CN_A$ 为聚合物溶液中离子的体积数浓度, C 为离子的摩尔浓度, N_A 为 Avogadro 常数), k_b 是 Boltzmann 常数, T 是绝对温度, e 是基本点电荷, z 是离子化合价. 由于流动是完全发展的、不重叠的、稳定的电渗流, 故方程(3)可简化为

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_r \varepsilon_0}. \quad (5)$$

联立方程(4)和(5), 有

$$\frac{d^2 \psi}{dy^2} = \frac{2_0 e z}{\varepsilon_r \varepsilon_0} \sinh\left(\frac{ez}{k_b T} \psi\right). \quad (6)$$

对应的边界条件为

$$\left. \frac{d\psi}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad (7a)$$

$$\psi = \zeta \Big|_{y=H}. \quad (7b)$$

对方程(6)积分, 并利用边界条件(7), 可得电势的解析解. 需要指出的是, 由于存在另一隐含边界条件 $\psi = \zeta \Big|_{y=-H}$, 给出整个通道上完整的电势解析解为^[16]

$$\psi = \frac{4k_b T}{ez} \left[\operatorname{arctanh}\left(\tanh\left(\frac{ez\zeta}{4k_b T}\right) \exp(-\kappa y - \kappa H)\right) + \operatorname{arctanh}\left(\tanh\left(\frac{ez\zeta}{4k_b T}\right) \exp(\kappa y - \kappa H)\right) \right], \quad (8)$$

其中, $\kappa = (2n_0 e^2 z^2 / (\varepsilon_r \varepsilon_0 k_b T))^{1/2}$ 定义为双电层厚度的倒数. 为了便于计算, 我们引入以下无量纲量:

$$y^* = \frac{y}{H}, \quad \kappa^* = \kappa H, \quad (\psi^*, \zeta^*) = \frac{(\psi, \zeta)}{k_b T / (ez)}. \quad (9)$$

故方程(8)的电势解析解可用无量纲的形式给出:

$$\psi^* = 4 \left[\operatorname{arctanh}\left(\tanh\left(\frac{\zeta^*}{4}\right) \exp(-\kappa^* y^* - \kappa^*)\right) + \operatorname{arctanh}\left(\tanh\left(\frac{\zeta^*}{4}\right) \exp(\kappa^* y^* - \kappa^*)\right) \right]. \quad (10)$$

1.2 速度分布

简化 PTT 流体的本构方程可以写为^[34]

$$f(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau})) \boldsymbol{\tau} + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \eta (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (11)$$

其中, f 是应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 的迹函数, λ 是弛豫时间(即聚合物分子在流动时重新分配所需的时间), η 是黏度系数, $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$ 是上随体导数, 表示如下:

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\tau} - [(\nabla \mathbf{u})^T \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{u}]. \quad (12)$$

函数 f 可以用线性和指数的形式表示, 本文选择线性形式^[34], 具体如下:

$$f(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau})) = 1 + \frac{\varepsilon \lambda}{\eta} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}), \quad (13)$$

其中, ε 是拉伸参数.

对于二维区域内完全发展的简化 PTT 流体的单向流动(即 \mathbf{u} 只有 x 轴方向的分量), 本构方程简化为

$$f(\tau_{xx} + \tau_{yy}) \tau_{xx} = 2\lambda \tau_{xy} \left(\frac{du}{dy}\right), \quad (14)$$

$$f(\tau_{xx} + \tau_{yy}) \tau_{yy} = 0, \quad (15)$$

$$f(\tau_{xx} + \tau_{yy}) \tau_{xy} = \eta \left(\frac{du}{dy}\right) + \lambda \tau_{yy} \left(\frac{du}{dy}\right). \quad (16)$$

从方程(13)中可以看出, $f(\tau_{xx} + \tau_{yy}) = 0$ 或者 $\tau_{yy} = 0$, 但如果前者等于零, 将得到不现实的结果, 因此唯一可能的结果是 $\tau_{yy} = 0$ ^[35]. 结合方程(13)——(16), 得到以下速度梯度与剪应力的关系:

$$\tau_{xy} + \frac{2\varepsilon\lambda^2}{\eta^2} (\tau_{xy})^3 = \eta \frac{du}{dy}. \quad (17)$$

此外,本文是忽略压力梯度的纯电渗流问题,因此 Cauchy 动量方程(2)化为

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} - \varepsilon_r \varepsilon_0 E_x \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0. \quad (18)$$

对方程(16)积分,得

$$\tau_{xy} = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_x \frac{d\psi}{dy} + A. \quad (19)$$

假设双电层不重叠,则微管道上下两壁面处的电势和滑移速度相同,即边界条件对称,故

$$\left. \frac{d\psi}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad \tau_{xy} \Big|_{y=0} = 0. \quad (20)$$

根据方程(19)和相应的边界条件(20),得 $A = 0$.将 A 代入方程(19),有

$$\tau_{xy} = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_x \frac{d\psi}{dy}. \quad (21)$$

结合方程(13)、(16)、(17)和(19),得到流场的速度梯度为

$$\frac{du}{dy} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 E_x}{\eta} \frac{d\psi}{dy} + 2\varepsilon\lambda^2 \left(\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 E_x}{\eta} \right)^3 \left(\frac{d\psi}{dy} \right)^3. \quad (22)$$

引入以下无量纲变量:

$$\tau_{xy}^* = \frac{\tau_{xy}}{\eta \kappa u_{sh}}, \quad u^* = \frac{u}{u_{sh}}, \quad (23)$$

其中, $u_{sh} = -\varepsilon_r \varepsilon_0 E_x \zeta / \eta$ 是 Helmholtz-Smoluchowski 速度^[36-38],定义 $De = \lambda \kappa u_{sh}$ 是基于双电层厚度的 Deborah 数.将无量纲变量(9)和(23)代入方程(22),确定微管道中流体的无量纲速度梯度:

$$\frac{du^*}{dy^*} = -\frac{1}{\zeta^*} \frac{d\psi^*}{dy^*} - \frac{2\varepsilon De^2}{\kappa^{*2} \zeta^{*3}} \left(\frac{d\psi^*}{dy^*} \right)^3. \quad (24)$$

在微纳尺度的管道中,当双电层存在时,流体在壁面处的滑移条件是不容忽视的,壁面存在滑移有利于电渗流速度的增强,这种增强源于 Navier 滑移边界条件^[39].因此,在非 Newton 流体的研究中,选择线性 Navier 滑移定律来描述流体在固液接触面的滑移条件,该定律定义的壁面滑移速度 u_w 与壁面剪切应力 $\tau_{yx,w}$ 的关系如下^[40-42]:

$$u_w = k_{nl} (\mp \tau_{yx,w}), \quad (25)$$

其中 k_{nl} 是滑移系数,符号“-”表示图 1 中上壁面,“+”表示下壁面.引入无量纲化的 $u_w^* = u_w / u_{sh}$ 和 $k_{nl}^* = k_{nl} \eta / H$, 则无量纲滑移速度可写为

$$u_w^* = k_{nl}^* (\mp \kappa^* \tau_{yx,w}^*). \quad (26)$$

因此,在边界条件(26)下,用数值计算方法可求得速度分布.

2 推进器性能分析

基于几何形状的对称性,本节只对微管道上半部分进行讨论,即 $0 \leq y \leq H$.

2.1 比冲

推进器的比冲定义为推进器每单位重量消耗推进剂所产生的反应脉冲量^[43].假设流动和传热是稳定的,且不考虑不稳态效应的情况下,推进器的比冲直接由平均喷射速度决定,而本文将推进剂排气速度视为平均流速,故比冲可以用排气速度除以重力加速度常数来表示^[18,43-46]:

$$I_{sp} = \frac{1}{g_0 H} \int_0^H u(y) dy. \quad (27)$$

以上方程中的比冲通过 $I_{sp}^* = g_0 I_{sp} / u_{sh}$ 无量纲化,有

$$I_{sp}^* = \int_0^1 u^*(y^*) dy^* . \quad (28)$$

2.2 推力

推进器是将任何形式的能量转化为机械能从而产生推力的装置.在外加电场的驱动下,流体产生速度使得推进器产生推力.推力由流体的平均流速与质量流之间的关系给出,可表示为速度的平方对 y 从 0 到 H 积分^[18,44-45]:

$$T_h = 2W \int_0^H \rho u^2(y) dy . \quad (29)$$

推力的无量纲表达式可写为

$$T_h^* = \int_0^1 u^{*2}(y^*) dy^* , \quad (30)$$

其中 $T_h^* = T_h / (2WH\rho u_{sh}^*)$.

2.3 效率

推进器效率是指发动机提供的推进功率与产生的总功率之比.在我们研究的纯电渗力驱动的情况下,推进剂产生的动能 (K) 提供推进动力,除动能外,总能量还包括 Joule 热效应 (P_j)、黏性耗散 (P_v) 和壁面处摩擦生热 (P_f), 这里我们忽略流体内部的摩擦,仅考虑固液接触面处的摩擦.综上,总功率写为

$$P_{in} = K + P_j + P_v + P_f , \quad (31)$$

动能、Joule 热效应、黏性耗散和摩擦热分别写为^[18,29,32,47]

$$K = \int_{A_{out}} \frac{1}{2} \rho u^3 dA_{out} , \quad (32)$$

$$P_j = \int_V \sigma E_x^2 dV , \quad (33)$$

$$P_v = \int_V \tau_{xy} \frac{du}{dy} dV , \quad (34)$$

$$P_f = \int_{A_{wall}} \mu(y=H) u(y=H) \frac{du}{dy}(y=H) dA_{wall} , \quad (35)$$

其中, A_{out} , A_{wall} 和 V 分别代表微管道的横截面积、表面积和总体积, $\mu = \tau_{xy} / (du/dy)$ 是黏度剖面^[29].为了使分析简单化,以下是各种能量的无量纲表达式:

$$K^* = \int_0^1 \frac{1}{2} u^{*3} dy^* , \quad (36)$$

$$P_j^* = \delta , \quad (37)$$

$$P_v^* = \gamma \int_0^1 \tau_{xy}^* \frac{du^*}{dy^*} dy^* = \gamma P'_v , \quad (38)$$

$$P_f^* = \gamma [\tau_{yx,w}^* u^*(y^* = 1)] = \gamma P'_f , \quad (39)$$

$$P_{in}^* = K^* + \delta + \gamma (P'_v + P'_f) , \quad (40)$$

$$\delta = \frac{L\sigma E_x^2}{\rho u_{sh}^3} , \quad \gamma = \frac{L\eta\kappa^*}{\rho H^2 u_{sh}} , \quad (41)$$

其中, $[P_{in}^*, K^*, P_j^*, P_v^*, P_f^*] = [P_{in}, K, P_j, P_v, P_f] / (2\rho HW u_{sh}^3)$. 效率是动能与总输入功率的比值,表示为

$$\eta_t = \frac{K}{P_{in}} = \frac{K^*}{P_{in}^*} . \quad (42)$$

2.4 推力-功率比

在研究推进器性能的过程中,另一个重要物理量是推力-功率比,其定义为^[44]

$$\xi = \frac{T_h}{P_{in}} \sim \frac{\rho HW v_{sh}^2}{K/\eta_t} = \eta_t \frac{\rho HW v_{sh}^2}{\rho HW v_{sh}^3/2} = \frac{2\eta_t}{v_{sh}} , \quad (43)$$

上式表示推力-功率比与效率成正比.利用 $\xi^* = u_{sh}\xi$ 将推力-功率比的无量纲形式写为如下形式:

$$\xi^* = \frac{T_h^*}{P_{in}^*}. \quad (44)$$

本节中,式(28)、(30)、(36)和(38)可通过数值积分方法求得.

3 结果与讨论

在第 2 节中我们得到了纯电渗作用下黏弹性 PTT 流体速度的数值解,并利用数值积分方法得到推进器性能分布.我们将对推进器的速度、比冲、推力、效率和推力-功率比进行讨论,调查 Deborah 数、滑移系数和 zeta 电势对推进器性能的影响.微管道的半高、宽度和长度分别设置为 $H = 5 \mu\text{m}^{[15,48]}$, $W = 200 \mu\text{m}$ 和 $L = 1 \text{mm}^{[43]}$, 流体密度为 $\rho = 10^3 \text{kg/m}^3^{[15]}$, 电导率为 $\sigma = 10^{-3} \text{S/m}^{[48]}$, 无量纲滑移系数为 $0 \leq k_{sl}^* \leq 1^{[32]}$, 无量纲 zeta 电势为 $1 \leq \zeta^* \leq 10^{[29]}$.其中,含有 Deborah 数的 εDe^2 称为黏弹性基团,它是描述黏性和弹性行为的重要物理参数,取值范围是 $0 \leq \varepsilon De^2 \leq 1^{[29]}$.当对整个系统施加 500 V 电压时, x 轴方向的电场强度为 $E_x = 5 \times 10^5 \text{V/m}$.其他物理量使用以下典型值: $10 \leq \kappa^* \leq 100$, $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{C}/(\text{V} \cdot \text{m})$, $\varepsilon_r = 80$, $T = 300 \text{K}$, $k_b = 1.38 \times 10^{-23}$, $z = 1$, $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C}^{[29]}$.

为了验证本文速度数值解的正确性,图 2 首先给出当前研究的速度数值解与 Sarma 等^[29]的速度解析解的比较,显然本文速度的数值解与 Sarma 等^[29]的解析解非常吻合.图 3 表示电渗微推进器在黏弹性参数 εDe^2 取不同值时所对应的无量纲速度分布,其中 $\kappa = 4 \mu\text{m}^{-1}$, $k_{sl} = 5 \times 10^{-3} \text{m}/(\text{Pa} \cdot \text{s})$, $\zeta = 150 \text{mV}$.当 $\varepsilon De^2 = 0$ 时,所示结果为 Newton 流体的速度分布,当 εDe^2 小于 0.1 时,速度仅有微小变化,也可近似视为 Newton 流体^[49],比如水.当 εDe^2 为 0.5 或 1 时,所示结果为非 Newton PTT 流体的速度分布,在图 3 中流体速度明显增加,这是因为随着黏弹性参数 εDe^2 的增加,流体的剪切变薄行为增强,即黏弹性流体的黏度降低,使得在相同条件下,PTT 流体的流速比 Newton 流体速度更大.因此,与 Newton 流体相比,PTT 流体作为推进剂,其速度的增加有助于推进器性能的提高(图 4).

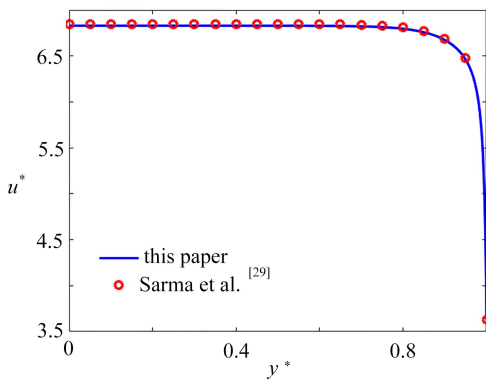


图 2 速度的数值解与 Sarma 等^[29]速度的解析解对比

Fig. 2 The current numerical velocity compared to the analytical velocity of Sarma et al. ^[29]

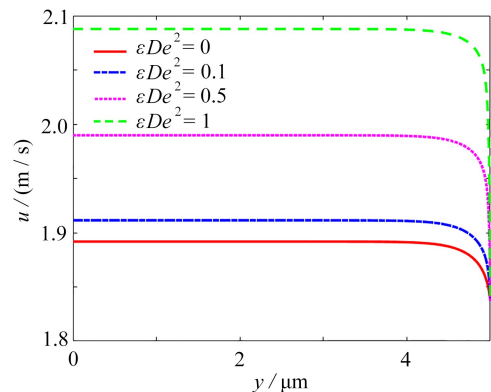


图 3 对于不同的 εDe^2 , 电渗微推进器的速度分布

Fig. 3 The velocity distributions of the electroosmotic microthruster for different values of εDe^2

在图 4 中,当 $\varepsilon De^2 = 0, 0.1, 0.5, 1$ 时,我们绘制了微推进器的性能分布随双电层厚度倒数 κ 的变化图像,这些性能为比冲 I_{sp} 、推力 T_h 、效率 η_t 以及推力-功率比 ξ (此处及之后的讨论中,要求 $\kappa > 2 \mu\text{m}^{-1}$ 即 $\kappa^* > 10$, 否则不满足薄的双电层的假设).其中 $k_{sl} = 5 \times 10^{-3} \text{m}/(\text{Pa} \cdot \text{s})$, $\zeta = 150 \text{mV}$.当固定双电层厚度的倒数 κ 时,推进器的比冲、推力、效率和推力-功率比都随着黏弹性参数值 εDe^2 的增大而增大.在图 4 中,当 εDe^2 小于 0.1 时,视为 Newton 流体的性能曲线,显然 PTT 流体的性能高于 Newton 流体的性能,其中效率和推力-功率比的增长更为明显.这是由于 εDe^2 的增大,意味着黏性和弹性的比值变小,所受阻力减小,使得流速增大(图 3),而比冲、推力、动能分别与速度、速度的二次方、速度的三次方成正比,效率与动能成正比,推力-功率比又与效率成正比,故推进器的性能与速度变化趋势保持一致.另一方面,当固定 εDe^2 时,随着 κ 的增大,双

电层厚度变小,电荷密度增大,致使离子受到较大的电场力而使电渗透速度增大,进而使得比冲、推力、效率和推力-功率比增加。

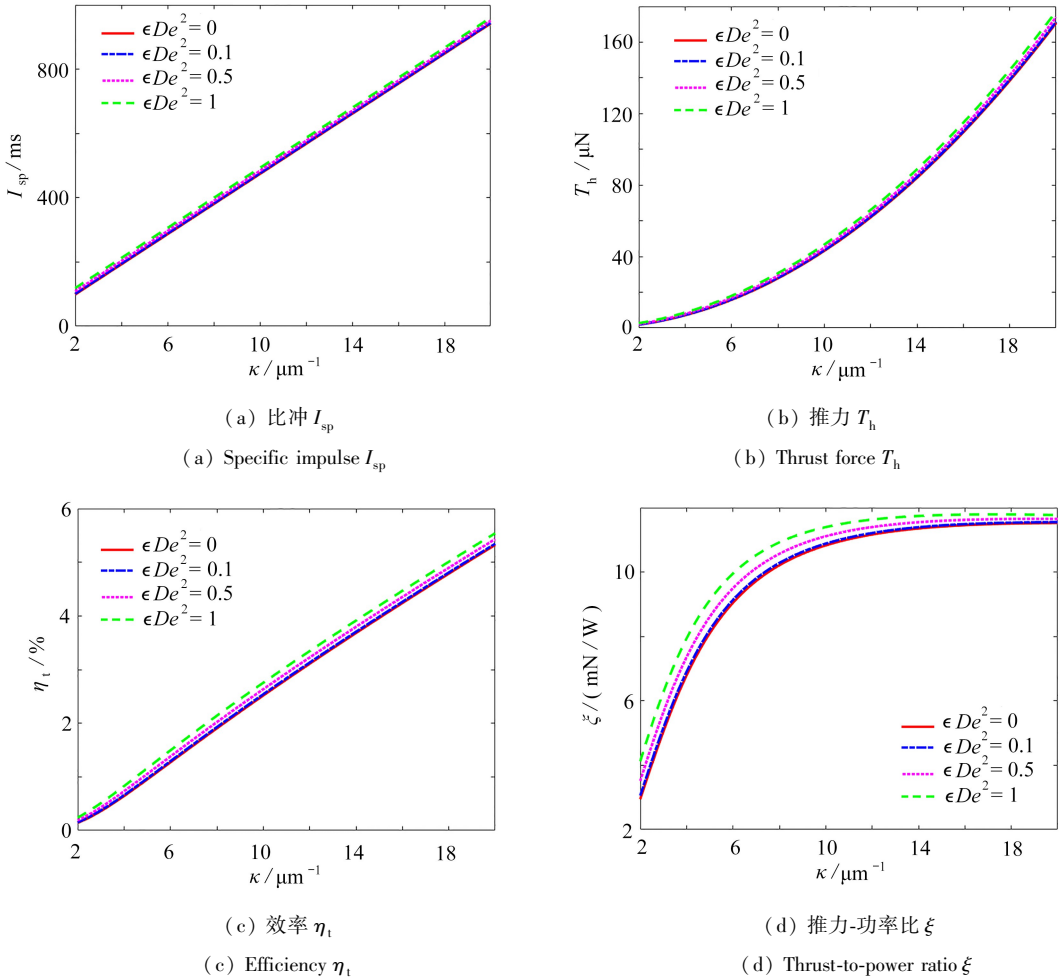


图4 对于不同的 εDe^2 值,推进器性能随 κ 的变化情况

Fig. 4 The thruster performance changes with κ for different values of εDe^2

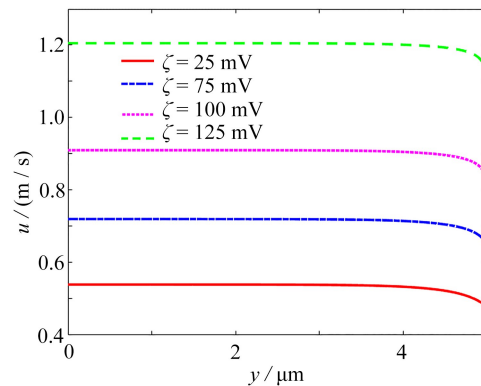


图5 在不同的 zeta 电势下,电渗微推进器的速度分布

Fig. 5 The velocity distributions of the electroosmotic microthruster for different zeta values

图5显示的是不同壁面 zeta 电势 ζ 对电渗微推进器速度分布的影响,其中, $\kappa = 2 \mu\text{m}^{-1}$, $k_{nl} = 1 \times 10^{-2} \text{ m}/(\text{Pa}\cdot\text{s})$, $\varepsilon De^2 = 0.5$ 。正如我们所期望的那样,固定其他参数的值,当壁面 zeta 电势不断增大时电渗流速度也增大。这是因为当电势变大时,电双层内的电荷密度变大,离子浓度增高,流体粒子具有较高的电渗驱动力,这实际上增加了流体的速度^[29]。在不同 zeta 电势下,图6为推进器的性能随双电层厚度的倒数 κ 的变化

分布,其中 $k_{nl} = 1 \times 10^{-2} \text{ m}/(\text{Pa}\cdot\text{s})$, $\varepsilon De^2 = 0.5$.如图 6 所示,当固定 κ 时,随着壁面 zeta 电势 ζ 的增大,推进器的比冲、推力、效率和推力-功率比都明显提高.这归因于图 5 所示的随着 zeta 电势的增大流体速度变大,从而比冲、推力、动能也随 zeta 电势的增大而增大.同样地,上面已经讨论过推进器效率与推力-功率比成正比相关,故它也随 zeta 电势的增加而增加.

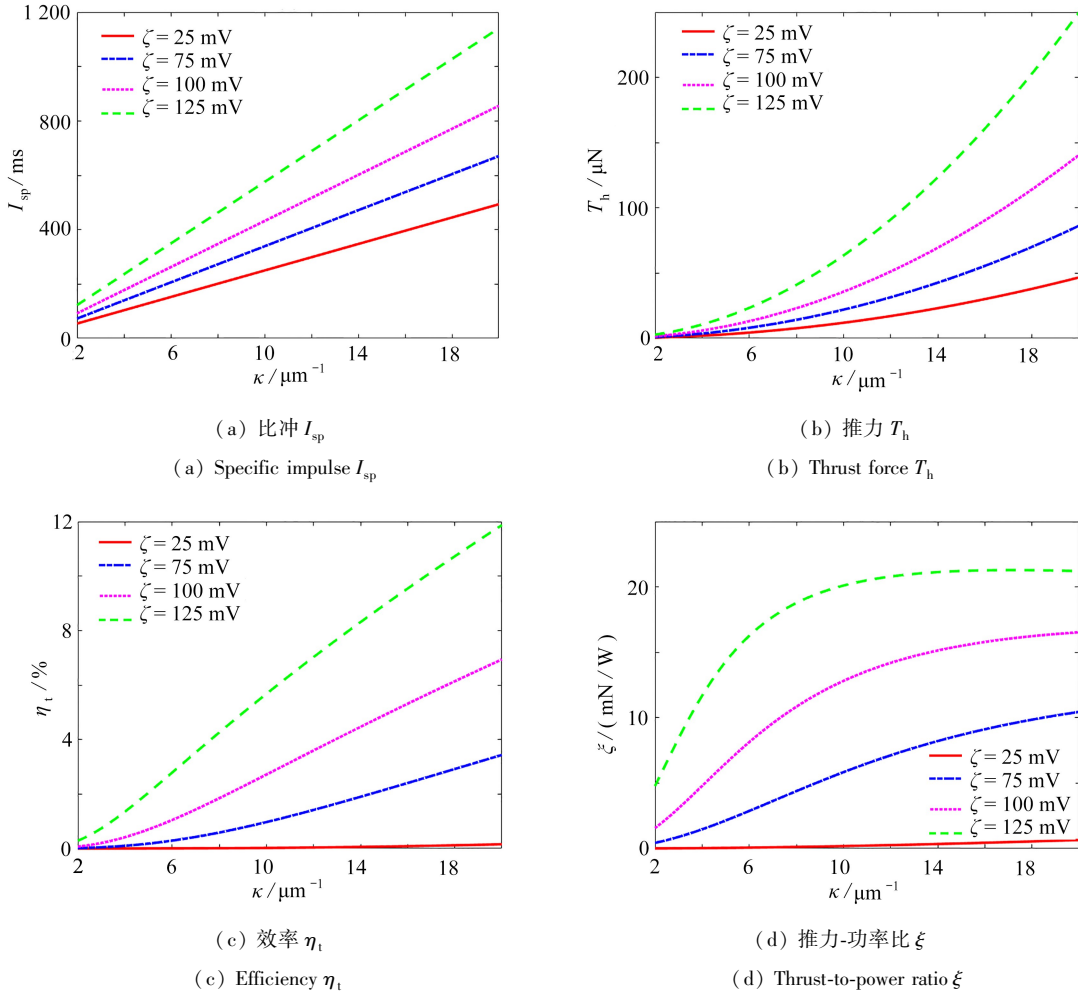


图 6 在不同 zeta 电势下,推进器性能随 κ 的变化情况

Fig. 6 The thruster performance changes with κ for different zeta values

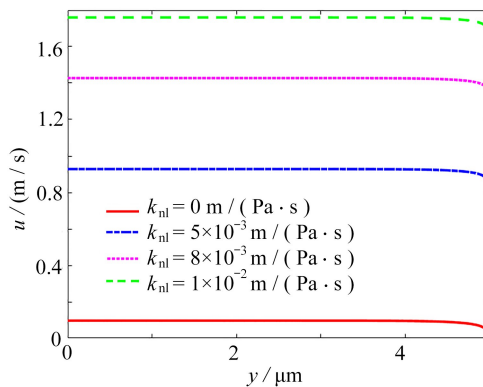


图 7 当滑移系数 k_{nl} 取不同值时,电渗微推进器的速度分布

Fig. 7 The velocity distributions of the electroosmotic microthruster for different slip coefficients

图 7 描述了滑移系数 k_{nl} 和双电层厚度的倒数 κ 对微管道内速度分布的影响,其中 $\kappa = 3 \mu\text{m}^{-1}$, $\zeta = 125$

$mV, \varepsilon De^2 = 0.5$, 所有参数值都在所绘图中给出. 壁面摩擦力的大小可量化为流体在壁面处的 Navier 滑移条件, 当滑移系数为 0 即壁面是无滑移时, 壁面处的摩擦力较大导致流体流动的阻力强, 故流速最小, 如图 7 所示. 随着滑移系数的增大, 流体速度明显增大, 这意味着界面滑移的存在减小了流动阻力使得流速增加. 图 8 绘制了在滑移系数 k_{nl} 取不同值时推进器性能随 κ 的变化. 从图 8 可以看出, 当固定参数 κ 时, 随着滑移系数 k_{nl} 的增大, 推进器的比冲、推力、效率和推力-功率比也明显增大, 这主要归因于速度的增加. 其中 $\zeta = 125 mV, \varepsilon De^2 = 0.5$. 特别地, 当 $k_{nl} = 0$ 即壁面是无滑移时, 推进器的比冲、推力、效率和推力-功率比都近乎为 0, 这主要因为无滑移时流体速度很小所导致的, 因此壁面存在滑移有利于推进器性能的提高.

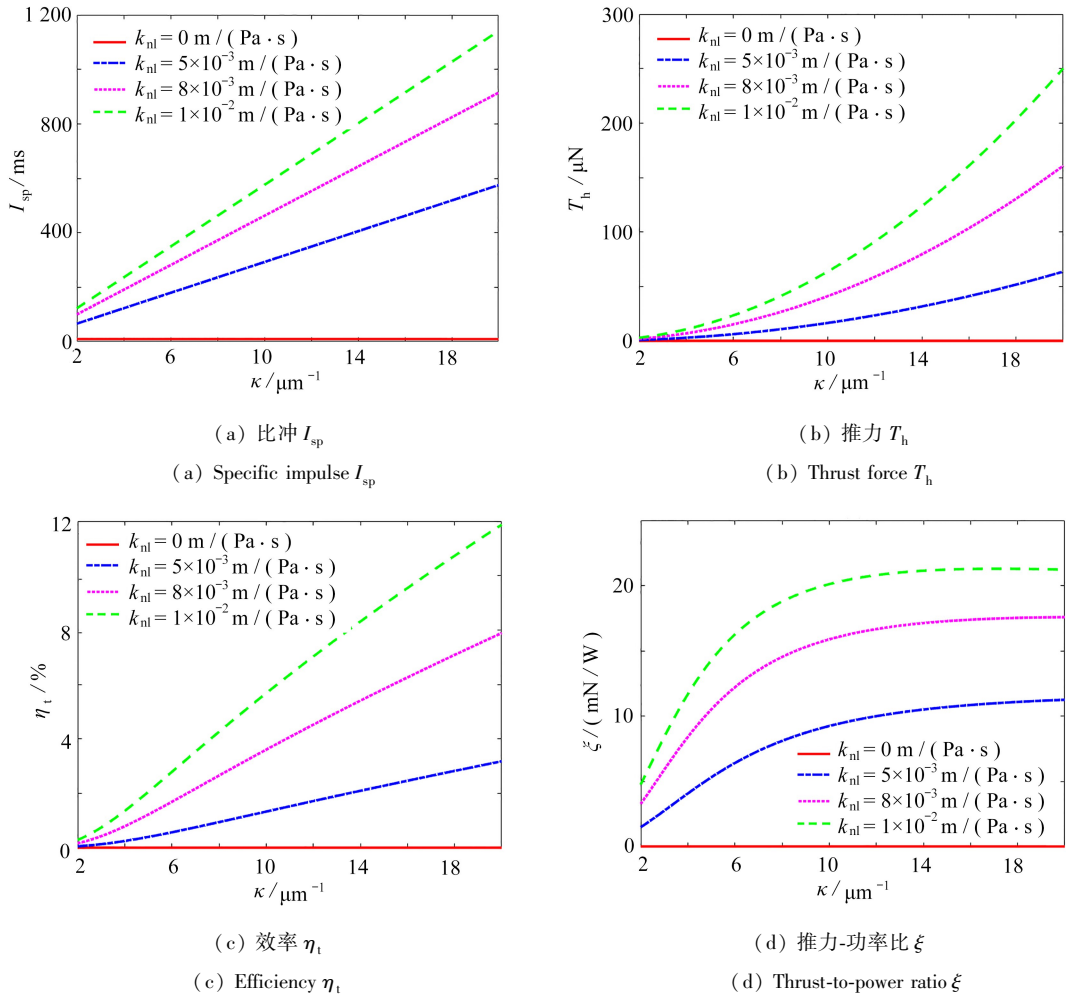


图 8 当滑移系数 k_{nl} 取不同值时, 推进器的性能随 κ 的变化图象

Fig. 8 The thruster performance changes with κ for different slip coefficients

4 结 论

本文基于 PTT 流体模型描述流体的流变行为, 从理论上研究电渗微推进器在空间推进中的应用. 求解了完整的 Poisson-Boltzmann 方程和 Cauchy 动量方程, 同时界面水动力滑移使用线性 Navier 滑移定律建模, 得到电渗微推进器电势的完整解析解和速度的数值解. 利用电势解析解和数值速度揭示双电层厚度、黏弹性参数、zeta 电势和滑移系数对推进器性能的影响, 即考查推进器比冲、推力、效率、推力-功率比随各个参数的化变情况. 在所考虑的微推进器模型中, 与 Newton 流体相比, PTT 流体作为推进剂使得推进器的性能有所提高, 其中效率和推力-功率比的增长较为明显, 这是由于黏弹性参数的增加产生了更大的流速. 此外, 增加壁面 zeta 电势和滑移系数, 流速和推进器的各项性能显著提高. 在所选取的参数范围内, 推进器比冲为 800~1 000 ms 时, 推力可达 0~250 μN , 效率为 6%~12%, 推力-功率比为 0~20 mN/W. 我们认为, 本分析为目前

黏弹性流体作为推进剂的微推进器提供了深入的理论见解,而真正应用到太空任务的操作与运行中,仍需要根据实际情况对每个参数进行优化。

致谢 本文作者衷心感谢内蒙古师范大学基本科研业务费(2022JBYJ022)对本文的资助。

参考文献(References):

- [1] SMITH R S, HADAEGH F Y. Control of deep-space formation-flying spacecraft; relative sensing and switched information[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2005, **28**(1): 106-114.
- [2] 徐晓辉. 深空探测中的微型推进器技术[J]. 机电产品开发与创新, 2007, **20**(6): 29-31.(XU Xiaohui. Micro thruster technology in deep-space exploring[J]. *Development & Innovation of Machinery & Electrical Products*, 2007, **20**(6):29-31. (in Chinese))
- [3] BLANCO A, ROY S. Rarefied gas electro jet (RGEJ) micro-thruster for space propulsion[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2017, **50**(45): 455201.
- [4] MARTINEZ-SANCHEZ M, POLLARD J E. Spacecraft electric propulsion-an overview[J]. *Journal of Propulsion and Power*, 1998, **14**(5): 688-699.
- [5] TAKAHASHI T, TAKAO Y, ERIGUCHI K, et al. Microwave-excited microplasma thruster; a numerical and experimental study of the plasma generation and micronozzle flow[J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2008, **41**(19): 194005.
- [6] KEIDAR M, ZHUANG T, SHASHURIN A, et al. Electric propulsion for small satellites[J]. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2014, **57**(1): 014005.
- [7] 朴思扬, 朱春艳, 褚福运, 等. 基于等效梁模型的运载火箭动力学特性仿真预示研究[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(3): 280-291. (PIAO Siyang, ZHU Chunyan, CHU Fuyun, et al. Dynamic characteristics prediction of launch vehicles based on the equivalent beam model[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(3): 280-291.(in Chinese))
- [8] LYKLEMA J. *Fundamentals of Interface and Colloid Science: Soft Colloids*[M]. Elsevier, 2005.
- [9] QIAO R. Control of electroosmotic flow by polymer coating: effects of the electrical double layer[J]. *Langmuir*, 2006, **22**(16): 7096-7100.
- [10] 解智勇. 两层微流体系统中的电动流动及传热分析[D]. 博士学位论文. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2019.(XIE Zhiyong. The analysis of electrokinetic flow and heat transfer characteristic through a two-layer microfluidic system[D]. PhD Thesis. Hohhot: Inner Mongolia University, 2019. (in Chinese))
- [11] 罗艳, 李鸣, 杨大勇. 微通道内电渗压力混合驱动幂律流体流动模拟[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(4): 373-381. (LUO Yan, LI Ming, YANG Dayong. Simulation of mixed electroosmotic and pressure-driven flows of power-law fluids in microchannels[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 373-381.(in Chinese))
- [12] 王爽, 菅永军. 周期壁面电势调制下平行板微管道中的电磁电渗流动[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(4): 396-405. (WANG Shuang, JIAN Yongjun. Magnetohydrodynamic electroosmotic flow in zeta potential patterned micro-parallel channels[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(4): 396-405.(in Chinese))
- [13] 张凯, 林建忠, 李志华. 电渗驱动微通道流中的扩散[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(5): 512-518. (ZHANG Kai, LIN Jianzhong, LI Zhihua. Diffusion in the micro-channel flow driven by electroosmosis[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, **27**(5): 512-518.(in Chinese))
- [14] JI J, QIAN S, LIU Z. Electroosmotic flow of viscoelastic fluid through a constriction microchannel[J]. *Micromachines*, 2021, **12**(4): 417.
- [15] MARTÍNEZ L, BAUTISTA O, ESCANDÓN J, et al. Electroosmotic flow of a Phan-Thien-Tanner fluid in a wavy-wall microchannel[J]. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 2016, **498**: 7-19.
- [16] DIEZ F J, HERNAIZ G, MIRANDA J J, et al. On the capabilities of nano electrokinetic thrusters for space propulsion[J]. *Acta Astronautica*, 2013, **83**: 97-107.
- [17] HUANG K H, HUANG H F. Two-liquid electroosmotic thrusters for micro propulsion applications[J]. *Physics*

- of Fluids*, 2019, **31**(12): 122003.
- [18] ZHENG J, JIAN Y. Electroosmotic thrusters in soft nanochannels for space propulsion[J]. *Physics of Fluids*, 2020, **32**(12): 122005.
- [19] ZHENG J, JIAN Y. Space electroosmotic thrusters in ion partitioning soft nanochannels[J]. *Micromachines*, 2021, **12**: 777.
- [20] ZHENG J, JIA B, JIAN Y. Steric effects on space electroosmotic thrusters in soft nanochannels[J]. *Mathematics*, 2021, **9**(16): 1916.
- [21] PHAN-THIEN N, TANNER R I. A new constitutive equation derived from network theory[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1977, **93**(2/3): 353-365.
- [22] OLIVEIRA P J, PINHO F T. Analytical solution for fully developed channel and pipe flow of Phan-Thien-Tanner fluids[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1999, **387**: 271-280.
- [23] PINHO F T, OLIVEIRA P J. Analysis of forced convection in pipes and channels with the simplified Phan-Thien-Tanner fluid[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2000, **43**(13): 2273-2287.
- [24] PINHO F T, OLIVEIRA P J. Axial annular flow of a nonlinear viscoelastic fluid: an analytical solution[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2000, **93**(2/3): 325-337.
- [25] CRUZ D O A, PINHO F T. Skewed Poiseuille-Couette flows of sPTT fluids in concentric annuli and channels [J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2004, **121**(1): 1-14.
- [26] 许晓阳, 彭严, 邓方安. 三维 PTT 黏弹性液滴撞击固壁面问题的改进 SPH 模拟[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(6): 616-627. (XU Xiaoyang, PENG Yan, DENG Fang'an. Numerical simulation of 3D PTT droplet impact onto solid surface with an improved smoothed particle hydrodynamics method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(6): 616-627.(in Chinese))
- [27] HASHEMABADI S H, ETEMAD S G, THIBAUT J, et al. Analytical solution for dynamic pressurization of viscoelastic fluids[J]. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2003, **24**(1): 137-144.
- [28] FERRÁS L L, AFONSO A M, ALVES M A, et al. Annular flow of viscoelastic fluids: analytical and numerical solutions[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2014, **212**: 80-91.
- [29] SARMA R, DEKA N, SARMA K, et al. Electroosmotic flow of Phan-Thien-Tanner fluids at high zeta potentials: an exact analytical solution[J]. *Physics of Fluids*, 2018, **30**(6): 062001.
- [30] PARDON G, VAN DER WIJNGAART W. Modeling and simulation of electrostatically gated nanochannels[J]. *Advances in Colloid and Interface Science*, 2013, **199/200**: 78-94.
- [31] FERRÁS L L, AFONSO A M, ALVES M A, et al. Electro-osmotic and pressure-driven flow of viscoelastic fluids in microchannels: analytical and semi-analytical solutions[J]. *Physics of Fluids*, 2016, **28**(9): 093102.
- [32] ANAND V. Effect of slip on heat transfer and entropy generation characteristics of simplified Phan-Thien-Tanner fluids with viscous dissipation under uniform heat flux boundary conditions: exponential formulation[J]. *Applied Thermal Engineering*, 2016, **98**: 455-473.
- [33] BRUUS H. *Theoretical Microfluidics*[M]. Oxford: Oxford University Press, 2008.
- [34] PHAN-THIEN N. A nonlinear network viscoelastic model[J]. *Journal of Rheology*, 1978, **22**(3): 259-283.
- [35] FERRÁS L L, NÓBREGA J M, PINHO F T. Analytical solutions for channel flows of Phan-Thien-Tanner and Giesekus fluids under slip[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2012, **171**: 97-105.
- [36] SMOLUCHOWSKI M. Versuch einer mathematischen theorie der koagulationskinetik kolloider lösungen[J]. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, 1918, **92**(1): 129-168.
- [37] PARK H M, LEE W M. Helmholtz-Smoluchowski velocity for viscoelastic electroosmotic flows[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2008, **317**(2): 631-636.
- [38] PROBSTEIN R F. *Physicochemical Hydrodynamics*[M]. Wiley Interscience, 2003.
- [39] ELJKEL J C T. Liquid slip in micro- and nanofluidics: recent research and its possible implications[J]. *Lab on a Chip*, 2007, **7**(3): 299-301.
- [40] SCHOWALTER W R. The behavior of complex fluids at solid boundaries[J]. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1988, **29**: 25-36.
- [41] NAVIER C. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides[J]. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*

- de l' Institut de France*, 1823, **6**(1823): 389-440.
- [42] FERNANDES C, FERRÁS L L, HABLA F, et al. Implementation of partial slip boundary conditions in an open-source finite-volume-based computational library[J]. *Journal of Polymer Engineering*, 2019, **39**(4): 377-387.
- [43] 张雪儿, 李得天, 张天平. 电推进三种比冲的定义及其工程应用[J]. *真空与低温*, 2020, **26**(6): 486-493. (ZHANG Xueer, LI Detian, ZHANG Tianping. Three types of specific impulses for electric propulsions: their definitions and engineering applications[J]. *Vacuum & Cryogenics*, 2020, **26**(6): 486-493. (in Chinese))
- [44] GOEBEL D M, KATZ I. *Fundamentals of Electric Propulsion; Ion and Hall Thrusters*[M]. John Wiley & Sons, 2008.
- [45] HEY F G. *Micro Newton Thruster Development; Direct Thrust Measurements and Thruster Downscaling* [M]. Springer, 2018.
- [46] JONCQUIERES V, VERMOREL O, CUENOT B. A fluid formalism for low-temperature plasma flows dedicated to space propulsion in an unstructured high performance computing solver[J]. *Plasma Sources Science and Technology*, 2020, **29**(9): 095005.
- [47] ESCANDÓN J P, BAUTISTA O, MÉNDEZ F, et al. Theoretical conjugate heat transfer analysis in a parallel flat plate microchannel under electro-osmotic and pressure forces with a Phan-Thien-Tanner fluid[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2011, **50**(6): 1022-1030.
- [48] ESCANDÓN J, SANTIAGO F, BAUTISTA O, et al. Hydrodynamics and thermal analysis of a mixed electro-magneto-hydrodynamic-pressure driven flow for Phan-Thien-Tanner fluids in a microchannel[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2014, **86**: 246-257.
- [49] DHINAKARAN S, AFONSO A M, ALVES M A, et al. Steady viscoelastic fluid flow between parallel plates under electro-osmotic forces; Phan-Thien-Tanner model[J]. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2010, **344**(2): 513-520.