

# 基于模态自适应的大变形多体系统动力学分析\*

刘泽斌, 李海艳, 詹宏远, 梁桂铭

(广东工业大学 机电工程学院, 广州 510006)

**摘要:** 柔性大变形系统在进行模态降阶时,若模态选取不当,会影响求解精度甚至导致求解结果发散.对此,提出了基于绝对节点坐标法(ANCF)的柔性大变形系统模态自适应选择方法.通过 ANCF 梁单元建立系统的动力学模型;利用全模态稀疏表示内部区域的坐标;根据 Latin 超立方抽样构建采样矩阵,作用于动力学方程,以减少方程的数量;以采样后的动力学方程作为约束,构造模态坐标范数优化问题;求解优化问题可以得到具有重大贡献的模态.通过两个实例表明:数值计算结果与常用方法的结果高度吻合并且求解效率显著提升.

**关键词:** 柔性多体动力学; 自适应选择; 动态响应; 绝对节点坐标法(ANCF)

**中图分类号:** TP182; TH113.2<sup>+</sup>2; O313.7 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430368

## Dynamics Analysis of Large-Deformation Flexible Multibody Systems Based on the Adaptive Modal Selection Method

LIU Zebin, LI Haiyan, ZHAN Hongyuan, LIANG Guiming

(School of Electromechanical Engineering, Guangdong University of Technology,  
Guangzhou 510006, P.R.China)

**Abstract:** During the modal truncation to reduce the model order of flexible multibody systems, the inappropriate modal selection would impair the precision of dynamic responses, or even cause divergent solutions. Thus, an efficient method of adaptive modal selection based on the absolute nodal coordinate formulation (ANCF) was proposed for large-deformation flexible multibody systems. The dynamic model for the system was established with the ANCF beam elements. The full modal sparse representation was used for the coordinates of the interior region. The sampling matrix was built through the Latin hypercube sampling to reduce the number of dynamic equations. The sparse modal coordinates' norm optimization problem was constructed with the sampling dynamic equations as constraints, to which the solution could give modes of significant contribution. Two examples show that, the numerical results are very close to the results of common methods and the computation efficiency markedly improves.

**Key words:** flexible multibody dynamics; adaptive selection; dynamic response; absolute nodal coordinate formulation (ANCF)

\* 收稿日期: 2022-11-14; 修订日期: 2023-03-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(51375297)

作者简介: 刘泽斌(1997—),男,硕士生(E-mail: 19516931@qq.com);

李海艳(1974—),女,副教授(通讯作者. E-mail: cathylhy@gdut.edu.cn).

引用格式: 刘泽斌,李海艳,詹宏远,梁桂铭. 基于模态自适应的大变形多体系统动力学分析[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(11): 1366-1377.

## 0 引 言

柔性多体系统(flexible multibody system, FMS)已被广泛应用于航空航天工程、车辆工程、机器人工程等多个领域。然而,其动力学模型——微分代数方程组(differential algebraic equations, DAEs)在仿真中求解耗时巨大,效率问题尤为突出。为了提高求解效率,已经提出了许多模型降阶方法<sup>[1-2]</sup>,可以分为两类:一类与振动模态无关,如 Krylov 子空间方法<sup>[3]</sup>,适当的正交分解<sup>[4-5]</sup>等;另一类是模态降阶,如模态组合法(component mode synthesis, CMS)<sup>[6]</sup>,自适应模态集成<sup>[7]</sup>和全局模态参数化(global modal parameterization, GMP)<sup>[8]</sup>。因为模态方法简单,易于实现,使柔性多体系统中的柔性分量自由度显著降低,所以是一类应用广泛的模型降阶技术。国内唐嫣璇博士在基于绝对节点坐标法(absolute nodal coordinate formulation, ANCF)描述的柔性多体系统模型降阶方面开展了较为深入的研究,针对具有大范围运动和大变形的柔性多体系统,提出了一种有效的模态降阶方法——连续局部线性化模态降阶方法<sup>[9]</sup>,通过对柔性多体系统进行多次线性化,再对每个线性系统建立各自的降阶模型,最终达到对整个柔体多体系统降阶的目的。但在降阶过程中该方法就模态选取这一问题未进行考虑,因为许多低频模态集并不促进结构和控制系统之间的相互作用<sup>[10]</sup>。因此,在对柔性多体系统进行模态降阶时,尤其是处于大变形、大旋转状态的柔性多体系统,如果模态选取不当,可能会导致精度问题,甚至求解结果发散。

为了解决上述问题,文献[11]提出了一种基于非线性压缩感知的模态自适应选择方法,它将模态坐标定义为正交模态向量上的稀疏系数;柔性多体系统的动态响应分析定义为以采样后的动力学方程为约束的模态坐标范数优化问题;给出改进的贪婪 Gauss-Newton 迭代算法(modified greedy Gauss-Newton, MGGN)求解优化问题,可以得到稀疏的模态坐标,选择模态坐标中非零元素对应的模态向量,即完成了模态的自适应选择。但此方法存在局限性,仅应用在浮动坐标法(floating frame of reference formulation, FFRF)<sup>[12]</sup>描述的柔性多体系统动态响应分析中。然而,FFRF 在对柔性旋转梁仿真时会出现变形随转速无限增大甚至发散这一错误结果,有违柔性旋转梁绕端部旋转时,伴随转速增大而表现出端部横向变形先快速变大、后快速变小的实验现象<sup>[13]</sup>。

因此,为了满足机械系统的刚性和柔性部件高速运动时,大范围移动和旋转运动导致的柔性部件大的弹性变形需求。本文提出了一种基于 ANCF<sup>[14]</sup>的模态自适应选择方法。因为 ANCF 正好适用于发生任意位移的柔性体的大旋转和大变形分析,并且 ANCF 在数值积分方面具有优势——恒定质量矩阵和没有 Coriolis 力项的动力学方程,这也保证了刚体结构旋转时刚体惯性的精确建模。

本文主要工作归纳为以下 4 点:

- 1) 采用基于连续介质力学的 ANCF 梁单元对系统进行建模,并将系统的动力学方程划分成两个部分——边界区域相关的部分和内部区域相关的部分。
- 2) 应用 Craig-Bampton 法将非线性系统投影到模态空间上<sup>[15]</sup>,模态坐标和模态向量被定义为稀疏系数和稀疏基。
- 3) 根据 Latin 超立方抽样设计的采样矩阵,减少动力学方程的数量。以采样后的方程作为约束条件来构造模态坐标范数优化问题,用贪婪 Gauss-Newton(GGN)算法求解优化问题,得到稀疏的模态坐标(动态响应分析中起主要作用),选择模态坐标非零元素对应的模态向量,即完成了模态的自适应选择。
- 4) 最后通过两个实例验证了该模态自适应选择方法应用在柔性多体系统大变形和大旋转运动中的有效性。

## 1 基于 ANCF 的平面梁系统建模

### 1.1 不含剪切的二维梁单元动力学方程

图 1 显示了在全局坐标系中由多个梁单元组成的梁部件  $k$  的初始和当前构型,长度为  $l^k$ ;图 2 显示了梁单元  $i$  的初始和当前构型,长度为  $l$ 。梁单元  $i$  中轴线上任意一点  $p^{ki}$  在全局坐标系下的位置矢量可以用单元节点坐标和形函数来表示:

$$\mathbf{r}^{ki} = \begin{bmatrix} r_1^{ki} \\ r_2^{ki} \end{bmatrix} = \mathbf{S}^{ki}(x^{ki}) \mathbf{e}^{ki} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{S}^{ki}$  为全局坐标系下定义的形状函数,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{ki} &= [S_1 \mathbf{I}, S_2 \mathbf{II}, S_3 \mathbf{I}, S_4 \mathbf{II}], \\ S_1 &= 1 - 3L^2 + 2L^3, S_2 = L - 2L^2 + L^3, \\ S_3 &= 3L^2 - 2L^3, S_4 = L^3 - L^2, \end{aligned} \quad (2)$$

$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  为单位矩阵,  $L = x^{ki}/l$ ,  $x^{ki}$  为梁单元  $i$  在未变形状态下的局部坐标;  $r_1^{ki}$  和  $r_2^{ki}$  为  $\mathbf{r}^{ki}$  向量坐标列阵中的元素;  $\mathbf{e}^{ki}$  为单元  $i$  的节点坐标向量,

$$\mathbf{e}^{ki} = [e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8]^T \in \mathbb{R}^{8 \times 1}, \quad (3)$$

$e_1 = r_1^{ki}|_{x^{ki}=0}$  和  $e_2 = r_2^{ki}|_{x^{ki}=0}$  是梁单元  $i$  左侧节点在全局坐标系下的坐标,  $e_5 = r_1^{ki}|_{x^{ki}=l}$  和  $e_6 = r_2^{ki}|_{x^{ki}=l}$  是右侧节点在全局坐标系下的坐标;  $e_3 = \left. \frac{\partial r_1^{ki}}{\partial x^{ki}} \right|_{x^{ki}=0}$  和  $e_4 = \left. \frac{\partial r_2^{ki}}{\partial x^{ki}} \right|_{x^{ki}=0}$  是梁单元  $i$  左侧节点斜率,  $e_7 = \left. \frac{\partial r_1^{ki}}{\partial x^{ki}} \right|_{x^{ki}=l}$  和  $e_8 = \left. \frac{\partial r_2^{ki}}{\partial x^{ki}} \right|_{x^{ki}=l}$  是右侧节点斜率.

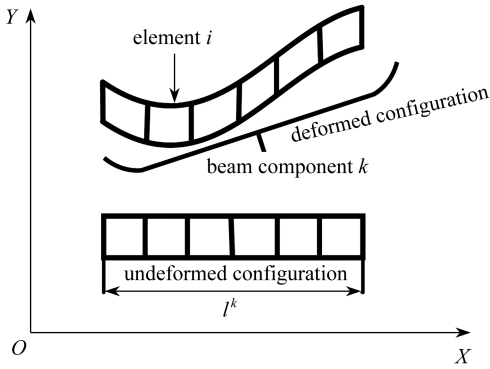


图1 梁部件  $k$  的初始构型和当前构型

Fig. 1 Undeformed and deformed configurations of beam component  $k$

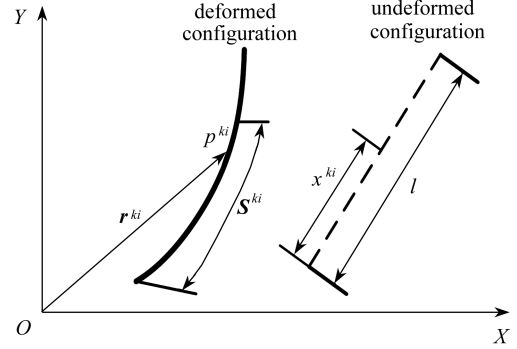


图2 梁单元  $i$  的初始构型和当前构型

Fig. 2 Undeformed and deformed configurations of beam element  $i$

式(1)对时间求导可以得到单元动能公式,如下:

$$T^{ki} = \frac{1}{2} \int_0^V \rho^{ki} (\dot{\mathbf{r}}^{ki})^T \dot{\mathbf{r}}^{ki} dV^{ki} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}^{ki})^T \int_0^V \rho^{ki} (\mathbf{S}^{ki})^T \mathbf{S}^{ki} dV^{ki} \dot{\mathbf{e}}^{ki} \equiv \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{e}}^{ki})^T \mathbf{M}^{ki} \dot{\mathbf{e}}^{ki}, \quad (4)$$

式中,  $(\dot{\quad})$  表示对时间求导,  $\rho^{ki}$ ,  $V^{ki}$  为梁单元  $i$  的密度和体积;  $\mathbf{M}^{ki} = \int_0^V \rho^{ki} (\mathbf{S}^{ki})^T \mathbf{S}^{ki} dV^{ki}$  为梁单元  $i$  的质量矩阵, 是一个常数矩阵且离心力和 Coriolis 力都为零.

在确立了质量矩阵以后,要考虑广义力的表达式.其中包括外部施加的力和系统柔性部件变形引起的弹性力.由虚功原理可知,作用在梁单元  $i$  上任意一点的外力  $\mathbf{F}^{ki}$  对单元做的虚功为

$$\delta W^{ki} = (\mathbf{F}^{ki})^T \delta \mathbf{r}^{ki} = (\mathbf{F}^{ki})^T \mathbf{S}^{ki}(x^{ki}) \delta \mathbf{e}^{ki}, \quad (5)$$

$$\mathbf{Q}_r^{ki} = (\mathbf{S}^{ki})^T(x^{ki}) \mathbf{F}^{ki}, \quad (6)$$

式中,  $\delta \mathbf{r}^{ki}$  为广义外力所对应的虚位移;  $\delta \mathbf{e}^{ki}$  为节点虚位移;  $\mathbf{Q}_r^{ki}$  为单元节点坐标的广义外力矩阵.对于做大变形、大旋转的柔性梁,应考虑梁单元自重(重力视为分布力)对其变形的影响,虚功可以通过对单元体积求积分得到,进而求得单元广义重力矩阵:

$$\mathbf{Q}_g^{ki} = \int_0^V (\mathbf{S}^{ki})^T(x^{ki}) g dV^{ki}. \quad (7)$$

广义弹性力通过虚功原理得到虚功表达式,可以用来定义梁单元  $i$  的刚度矩阵;应变能也可以用来定义刚度矩阵.本文考虑通过应变能来获取刚度矩阵表达式,在连续介质力学公式中,单元总应变能  $U^{ki}$  用纵向应

变能  $U_1^{ki}$  和横向应变能  $U_t^{ki}$  的线性组合来描述<sup>[16]</sup>:

$$U^{ki} = U_1^{ki} + U_t^{ki} = \frac{1}{2} \int_0^l (E^{ki} A^{ki} (\varepsilon_1^{ki})^2 + E^{ki} I^{ki} (\kappa^{ki})^2) dx^{ki}, \quad (8)$$

式中,  $E^{ki}$  为弹性模量,  $A^{ki}$  为梁单元截面面积,  $I^{ki}$  为截面惯性矩; 根据单元总应变能  $U^{ki}$  的表达式, 可以得出刚度矩阵也应该由两部分组成: 纵向变形相关的刚度矩阵和横向变形相关的刚度矩阵. 先介绍纵向变形相关的刚度矩阵及推导过程, 根据几何非线性理论, 纵向应变为

$$\varepsilon_1^{ki} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{r}^{ki}}{\partial x^{ki}} \right)^T \left( \frac{\partial \mathbf{r}^{ki}}{\partial x^{ki}} \right) - 1 \right]. \quad (9)$$

为了得到纵向应变更加一般的表达式, 将节点坐标向量写成两个向量的和:

$$\mathbf{e}^{ki} = \mathbf{e}_r^{ki} + \mathbf{e}_t^{ki}, \quad (10)$$

其中  $\mathbf{e}_r^{ki}$  代表刚体的位移,  $\mathbf{e}_t^{ki}$  是  $\mathbf{e}^{ki}$  减去  $\mathbf{e}_r^{ki}$  的差值,

$$\mathbf{e}_r^{ki} = [x, y, c, s, x + lc, y + ls, c, s]^T, \quad (11)$$

$x$  和  $y$  是任意刚体位移,  $c$  和  $s$  分别表示  $\cos \theta$  和  $\sin \theta$ ,  $\theta$  表示任意刚体在全局坐标系下旋转的角度; 由等式

$$(\mathbf{e}_r^{ki})^T \left( \frac{\partial \mathbf{S}^{ki}(x^{ki})}{\partial x^{ki}} \right)^T \left( \frac{\partial \mathbf{S}^{ki}(x^{ki})}{\partial x^{ki}} \right) \mathbf{e}_r^{ki} = 1, \text{ 代入到式 (9) 中, 可得到更加一般的纵向应变, 下文中}$$

$\left( \frac{\partial \mathbf{S}^{ki}(x^{ki})}{\partial x^{ki}} \right)^T \left( \frac{\partial \mathbf{S}^{ki}(x^{ki})}{\partial x^{ki}} \right)$  用  $\mathbf{S}_1^{ki}$  来表示.

$$\varepsilon_1^{ki} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}^{ki} - \mathbf{e}_r^{ki})^T \mathbf{S}_1^{ki} (\mathbf{e}^{ki} + \mathbf{e}_r^{ki}), \quad (12)$$

根据式(12)和(8)中梁单元  $i$  的纵向应变能, 与纵向变形有关的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_1^{ki} = E^{ki} A^{ki} \int_0^l \frac{1}{2} (\mathbf{e}^{ki} - \mathbf{e}_r^{ki})^T \mathbf{S}_1^{ki} (\mathbf{e}^{ki} + \mathbf{e}_r^{ki}) \mathbf{S}_1^{ki} dx^{ki}. \quad (13)$$

由于  $\mathbf{e}_r^{ki}$  总是以式(11)的形式存在, 所以  $\mathbf{e}_t^{ki}$  在式(12)、(13)中是任意的, 甚至可以方便地设置为  $\mathbf{e}_t^{ki} = [0, 0, 1, 0, l, 0, 1, 0]^T$ .

横向变形有关的刚度矩阵推导如下: 通常情况下纵向变形总是比横向变形要小得多, 于是可以将纵向变形看作是一个很小的量, 在这种情况下纵向变形的变形梯度  $\sqrt{(\mathbf{r}^{ki})'^T (\mathbf{r}^{ki})'}$  约等于常数 1, 则无限小的弧长  $ds^{ki} = \sqrt{(\mathbf{r}^{ki})'^T (\mathbf{r}^{ki})'} dx^{ki}$  可以写成  $ds^{ki} \approx dx^{ki}$ , 其中  $(\mathbf{r}^{ki})' = \frac{\partial \mathbf{r}^{ki}}{\partial x^{ki}}$ . 因此曲率  $\kappa^{ki} = \left| \frac{d^2 \mathbf{r}^{ki}}{d(s^{ki})^2} \right| \approx \left| \frac{d^2 \mathbf{r}^{ki}}{d(x^{ki})^2} \right|$ , 结合式(1)可以得到

$$(\kappa^{ki})^2 = (\mathbf{e}^{ki})^T \left( \frac{\partial^2 \mathbf{S}^{ki}(x^{ki})}{\partial (x^{ki})^2} \right)^T \left( \frac{\partial^2 \mathbf{S}^{ki}(x^{ki})}{\partial (x^{ki})^2} \right) \mathbf{e}^{ki}. \quad (14)$$

将式(14)代入到  $U_t^{ki}$  的表达式中, 得到横向变形有关的刚度矩阵:

$$\mathbf{K}_t^{ki} = \int_0^l E^{ki} I^{ki} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{S}^{ki}(x^{ki})}{\partial (x^{ki})^2} \right)^T \left( \frac{\partial^2 \mathbf{S}^{ki}(x^{ki})}{\partial (x^{ki})^2} \right) dx^{ki}, \quad (15)$$

它是一个恒定不变的常数矩阵. 于是式(8)中与横向变形有关的应变能可以写成如下形式:

$$U_t^{ki} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}^{ki})^T \mathbf{K}_t^{ki} \mathbf{e}^{ki}. \quad (16)$$

已知梁单元  $i$  的动能公式、质量矩阵和刚度矩阵, 根据 Lagrange 方程以及虚功原理可以推导出梁单元  $i$  的动力学方程如下:

$$\begin{cases} \mathbf{M}^{ki} \ddot{\mathbf{e}}^{ki} + (\mathbf{K}_1^{ki} + \mathbf{K}_t^{ki}) \mathbf{e}^{ki} + (\mathbf{C}_{e^{ki}}^{ki})^T \boldsymbol{\lambda}^{ki} = \mathbf{Q}_f^{ki} \in R^{8 \times 1}, \\ \mathbf{C}_{e^{ki}}^{ki} = \mathbf{0} \in R^{m_{ki} \times 1}, \end{cases} \quad (17)$$

其中  $\mathbf{C}_{e^{ki}}^{ki}$  是单元约束方程  $\mathbf{C}^{ki}$  关于单元绝对节点坐标  $\mathbf{e}^{ki}$  的 Jacobi 矩阵,  $\boldsymbol{\lambda}^{ki}$  是 Lagrange 乘子向量.

## 1.2 柔性梁部件的动力学方程

平面梁系统中梁部件  $k$  的质量矩阵  $\mathbf{M}^k$ 、广义外力阵  $\mathbf{Q}_f^k$  以及纵向变形相关的刚度矩阵  $\mathbf{K}_1^k$  和横向变形相关的刚度矩阵  $\mathbf{K}_1^k$ ，由 ANCF 梁单元拼接如下：

$$\begin{cases} \mathbf{M}^k = \sum_{i=0}^N (\mathbf{B}^{ki})^T \mathbf{M}^{ki} \mathbf{B}^{ki}, \\ \mathbf{Q}_f^k = \sum_{i=0}^N (\mathbf{B}^{ki})^T \mathbf{Q}_f^{ki} \mathbf{B}^{ki}, \\ \mathbf{K}_1^k = \sum_{i=0}^N (\mathbf{B}^{ki})^T \mathbf{K}_1^{ki} \mathbf{B}^{ki}, \\ \mathbf{K}_1^k = \sum_{i=0}^N (\mathbf{B}^{ki})^T \mathbf{K}_1^{ki} \mathbf{B}^{ki}, \end{cases} \quad (18)$$

其中  $N$  为单元数， $\mathbf{B}^{ki}$  是与单元相关的 Boole 矩阵。梁部件  $k$  的动力学方程可以通过组装单元的动力学方程 (17) 得到

$$\begin{cases} \mathbf{M}^k \ddot{\mathbf{e}}^k + (\mathbf{K}_1^k + \mathbf{K}_1^k) \mathbf{e}^k + (\mathbf{C}_{e^k}^k)^T \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{Q}_f^k \in R^{4 \times (N+1)}, \\ \mathbf{C}^k = \mathbf{0} \in R^{m_k \times 1}, \end{cases} \quad (19)$$

其中  $m_k$  是约束方程的个数。

在求梁单元纵向变形的刚度矩阵时总是和单元节点坐标相关，因此每次更新耗时巨大，本文将式 (13) 中  $\mathbf{K}_1^{ki}$  的单元绝对节点坐标提到积分外， $\mathbf{K}_1^{ki}$  改写成

$$\mathbf{K}_1^{ki} = [(\mathbf{e}^{ki} - \mathbf{e}_r^{ki})^T \otimes \mathbf{n}] \frac{1}{2} E^{ki} A^{ki} \mathbf{S}_L [(\mathbf{e}^{ki} + \mathbf{e}_r^{ki}) \otimes \mathbf{n}], \quad (20)$$

其中  $\otimes$  代表的是矩阵进行 Kronecker 积运算， $\mathbf{n} \in R^{8 \times 8}$  为单位阵， $\mathbf{S}_L = \int_0^l \mathbf{S}_1^{ki} \otimes \mathbf{S}_1^{ki} dx^{ki}$ 。那么与纵向变形相关的刚度矩阵  $\mathbf{K}_1^k$  则为

$$\mathbf{K}_1^k = [(\mathbf{e}^k - \mathbf{e}_r^k)^T \otimes \mathbf{N}^k] \mathbf{K}_{\text{lin}}^k [(\mathbf{e}^k + \mathbf{e}_r^k) \otimes \mathbf{N}^k], \quad (21)$$

其中  $\mathbf{e}^k$  为梁部件  $k$  上所有绝对节点坐标， $\mathbf{e}_r^k$  为第  $k$  个梁部件的刚体位移， $\mathbf{N}^k$  为单位阵，它的行、列数与  $\mathbf{e}^k$  和  $\mathbf{e}_r^k$  相同，

$$\mathbf{K}_{\text{lin}}^k = \sum_{i=0}^N \left\{ \frac{1}{2} E^{ki} A^{ki} \int_0^l ((\mathbf{B}^{ki})^T \mathbf{S}_1^{ki} \mathbf{B}^{ki}) \otimes ((\mathbf{B}^{ki})^T \mathbf{S}_1^{ki} \mathbf{B}^{ki}) dx^{ki} \right\}, \quad (22)$$

$\mathbf{K}_{\text{lin}}^k$  是固定的，所以每次更新  $\mathbf{K}_1^k$  特别方便，只需将每个时间步长下的绝对节点坐标代入相乘即可。

## 1.3 ANCF 平面梁系统模态分析方法

为了提高求解效率，需要将动力学模型进行降阶处理。根据文献 [15]，通过 CMS 对 ANCF 平面梁系统矩阵进行降阶处理，其基本思想是将复杂非线性系统投影到模态空间上，并截取低阶模态构成的系统，忽略高阶模态的影响，从而实现降阶。因为  $\mathbf{K}_1^k$  是恒定的，可以假设非线性的纵向弹性力  $\mathbf{K}_1^k \mathbf{e}^k$  是一种伪外力，将其移动到式 (19) 的右端得到新的动力学方程：

$$\mathbf{M}^k \ddot{\mathbf{e}}^k + \mathbf{K}_1^k \mathbf{e}^k + (\mathbf{C}_{e^k}^k)^T \boldsymbol{\lambda}^k = \mathbf{Q}_f^k - \mathbf{K}_1^k \mathbf{e}^k \equiv \mathbf{Q}^k \in R^{4 \times (n_c+1)}, \quad (23)$$

并将系统的绝对节点坐标和动力学方程划分为两个部分——边界区域相关的部分和内部区域相关的部分。动力学方程可以改写成如下形式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\text{bb}}^k & \mathbf{M}_{\text{ba}}^k \\ \mathbf{M}_{\text{ab}}^k & \mathbf{M}_{\text{aa}}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{e}}_{\text{b}}^k \\ \ddot{\mathbf{e}}_{\text{a}}^k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{tbb}}^k & \mathbf{K}_{\text{tba}}^k \\ \mathbf{K}_{\text{tab}}^k & \mathbf{K}_{\text{taa}}^k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{\text{b}}^k \\ \mathbf{e}_{\text{a}}^k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{C}_{e_{\text{b}}^k}^k)^T \\ (\mathbf{C}_{e_{\text{a}}^k}^k)^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{b}}^k \\ \mathbf{Q}_{\text{a}}^k \end{Bmatrix}, \quad (24)$$

其中， $\mathbf{M}_{\text{bb}}^k$  和  $\mathbf{K}_{\text{tbb}}^k$  代表与边界区域相关的质量矩阵和横向变形刚度矩阵； $\mathbf{M}_{\text{aa}}^k$  和  $\mathbf{K}_{\text{taa}}^k$  代表与内部区域相关的质量矩阵和横向刚度矩阵； $\mathbf{M}_{\text{ba}}^k, \mathbf{M}_{\text{ab}}^k, \mathbf{K}_{\text{tba}}^k$  和  $\mathbf{K}_{\text{tab}}^k$  代表内部区域坐标和边界区域坐标相互耦合的质量矩阵和刚度矩阵； $\mathbf{Q}^k = \mathbf{Q}_f^k - \mathbf{K}_1^k \mathbf{e}^k$  被划分成了边界区域相关的  $\mathbf{Q}_{\text{b}}^k$  和内部区域相关的  $\mathbf{Q}_{\text{a}}^k$ ； $\mathbf{C}_{e_{\text{b}}^k}^k, \mathbf{C}_{e_{\text{a}}^k}^k$  表示约束方程  $\mathbf{C}^k$  有关边界区域坐标和内部区域坐标的 Jacobi 矩阵。



因为式(24)等号左侧是线性的,所以可以应用 Craig-Bampton 方法,将非线性系统投影到模态空间上,内部区域坐标  $\mathbf{e}_a^k \in R^{n_a \times 1}$  用一组模态坐标  $\boldsymbol{\xi}^k \in R^{n_a \times 1}$  来表示,  $\mathbf{T}^k$  为模态变换矩阵,通过  $\mathbf{p}^k = \{(\mathbf{e}_b^k)^T, (\boldsymbol{\xi}^k)^T\}^T$  来表示  $\mathbf{e}^k = \{(\mathbf{e}_b^k)^T, (\mathbf{e}_a^k)^T\}^T$ , 具体如下:

$$\mathbf{e}^k = \mathbf{T}^k \mathbf{p}^k, \quad (25)$$

$$\mathbf{T}^k \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I}_b & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Phi}_c^k & \boldsymbol{\Phi}_n^k \end{bmatrix}, \quad (26)$$

其中  $\mathbf{I}_b \in R^{n_b \times n_b}$  是单位阵,  $n_b$  是边界区域相关坐标的自由度,  $\boldsymbol{\Phi}_c^k \in R^{n_a \times n_b}$  是约束模态矩阵, 见式(27),  $n_a$  是内部区域相关坐标的自由度,  $\boldsymbol{\Phi}_n^k \in R^{n_a \times n_a}$  是固有模态矩阵, 通过求解本征方程(28)得到:

$$\boldsymbol{\Phi}_c^k \equiv -(\mathbf{K}_{taa}^k)^{-1} \mathbf{K}_{tab}^k \in R^{n_a \times n_b}, \quad (27)$$

$$(\mathbf{K}_{taa}^k - (\boldsymbol{\Omega}_m^k)^2 \mathbf{M}_{aa}^k) \boldsymbol{\Phi}_{nm}^k = \mathbf{0}, \quad (28)$$

其中  $\boldsymbol{\Omega}_m^k$  和  $\boldsymbol{\Phi}_{nm}^k \in R^{n_c \times 1}$  分别为梁部件  $k$  内部区域的第  $m$  个固有频率和它对应的模态向量,  $n_c$  是模态向量的维度。

## 2 模态自适应选择方法

### 2.1 全模态稀疏表示内部区域坐标

由于只有少量的模态在模型的动态行为中有很高的参与因素,因此可以将全模态坐标看作是稀疏或近似稀疏.模态坐标定义为稀疏系数,全模态向量定义为稀疏基,将稀疏模态坐标扩展到整个平面梁系统.结合 Lagrange 乘子向量  $\boldsymbol{\lambda}^k$ , 可以得到等式

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_b^k \\ \mathbf{e}_a^k \\ \boldsymbol{\lambda}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_b^k \\ \boldsymbol{\xi}^k \\ \boldsymbol{\lambda}^k \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{c}, \quad (29)$$

其中边界区域坐标  $\mathbf{e}_b^k$  和 Lagrange 乘子向量  $\boldsymbol{\lambda}^k$  的数量远远少于模态坐标  $\boldsymbol{\xi}^k$ 。

### 2.2 设计采样矩阵

为了减少动力学方程的数量,提升数值计算效率,需要对运动方程进行采样.由于模态向量作为稀疏基来表示内部区域坐标,所以采样矩阵  $\mathbf{A}^k$  作用于内部区域相关的方程

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{I}(\boldsymbol{\Omega}^k, :), \quad (30)$$

其中  $\boldsymbol{\Omega}^k$  代表的是需要保留的动力学方程在系统方程中的索引.本文采用 Latin 超立方体抽样创建  $\boldsymbol{\Omega}^k$ . 采样后的方程(24)以及简化式表示如下:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{bb}^k & \mathbf{M}_{ba}^k \\ \mathbf{M}_{ab}^k(\boldsymbol{\Omega}^k, :) & \mathbf{M}_{aa}^k(\boldsymbol{\Omega}^k, :) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{e}}_b^k \\ \ddot{\mathbf{e}}_a^k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tbb}^k & \mathbf{K}_{tba}^k \\ \mathbf{K}_{tab}^k(\boldsymbol{\Omega}^k, :) & \mathbf{K}_{taa}^k(\boldsymbol{\Omega}^k, :) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_b^k \\ \mathbf{e}_a^k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{e_b^k}^{kT} \\ (\mathbf{C}_{e_a^k}^k)^T(\boldsymbol{\Omega}^k, :) \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_b^k \\ \mathbf{Q}_a^k(\boldsymbol{\Omega}^k, :) \end{Bmatrix}, \quad (31)$$

$$(\mathbf{M}^k)_{\Omega^k} \ddot{\mathbf{e}}^k + (\mathbf{K}_1^k)_{\Omega^k} \mathbf{e}^k + ((\mathbf{C}_{e^k}^k)^T)_{\Omega^k} \boldsymbol{\lambda}^k = (\mathbf{Q}^k)_{\Omega^k}, \quad (32)$$

其中  $(\cdot)_{\Omega^k}$  代表的是梁部件  $k$  采样以后的矩阵或向量。

### 2.3 平面梁系统动态响应分析的 $l_1$ 范数优化问题

本小节提出了基于 ANCF 的模态自适应选择方法,以 ANCF 平面梁系统采样后的动力学方程为约束条件,构造的模态坐标  $l_1$  范数优化问题,求解每个时间  $t$  步长下的优化问题,可以得到稀疏的模态坐标,选择模态坐标非零元素对应的模态向量,即完成了模态的自适应选择。

本小节先介绍优化问题的建立,通过求解动力学方程(19)可以获得梁系统每个时间步长下的动态响应,根据方程(32)和(19),柔性多体系统的动态响应的非线性映射算子定义如下:

$$\boldsymbol{\Phi}^k(\mathbf{e}^k, \dot{\mathbf{e}}^k, \ddot{\mathbf{e}}^k, \hat{\boldsymbol{\lambda}}^k, t) = \begin{pmatrix} \eta((\mathbf{M}^k)_{\Omega^k} \ddot{\mathbf{e}}^k - \mathbf{f}(\mathbf{e}^k)) + ((\mathbf{C}_{e^k}^k)^T(\mathbf{e}^k))_{\Omega^k} \hat{\boldsymbol{\lambda}}^k \\ \mathbf{C}^k(\mathbf{e}^k) \end{pmatrix}, \quad (33)$$

其中  $\eta$  为缩放因子,  $\hat{\lambda}^k = \eta \lambda^k$ ,  $f(e^k) = (Q^k)_{\Omega^k} - (K^k)_{\Omega^k} e^k$ . 采用一阶向后差分公式 (backward differentiation formula, BDF) 作为时间积分法,

$$\begin{cases} \dot{e}_t^k = \frac{e_t^k - e_{t-1}^k}{h}, \\ \dot{e}_t^k = \frac{e_t^k - e_{t-1}^k - h\dot{e}_{t-1}^k}{h^2}. \end{cases} \quad (34)$$

将 BDF 公式和式(29)代入到式(33)中,平面梁系统的非线性映射算子可以改写成如下形式:

$$\Phi^k(p_t^k, \hat{\lambda}_t^k) = \begin{pmatrix} \eta \left( \frac{1}{h^2} (M^k)_{\Omega^k} T^k (p_t^k - p_{t-1}^k - h\dot{p}_{t-1}^k) - (f(p_t^k))_{\Omega^k} \right) + ((C_{p_t^k}^k)^T (p_t^k))_{\Omega^k} \hat{\lambda}_t^k \\ C^k(p_t^k) \end{pmatrix}. \quad (35)$$

于是构造出 ANCF 平面梁系统动态响应  $t$  时间步长下的  $l_1$  范数优化问题:

$$\|\xi_t^k\|_1 \leq s^k \quad \text{subject to} \quad \Phi^k(e_{bt}^k, \xi_t^k, \hat{\lambda}_t^k) = \mathbf{0}, \quad (36)$$

其中,  $\|\cdot\|_1$  代表 1-范数,  $s^k$  表示柔性部件  $k$  的模态坐标  $\xi_t^k$  的稀疏性.

## 2.4 优化问题的求解

根据文献[17]提出的求解非线性欠定方程组的稀疏解的 GGN 算法,它可以得到一个非常精确的解,本文采用此算法.此外,由于不同的工况,在模态坐标中会产生不同的幅度.因为将模态坐标的某些元素设置为零的阈值难以确定,所以设置一个非线性映射算子  $P_\lambda$  对每个柔性部件保留  $s^k$  个绝对值最大的且非零的模态坐标.

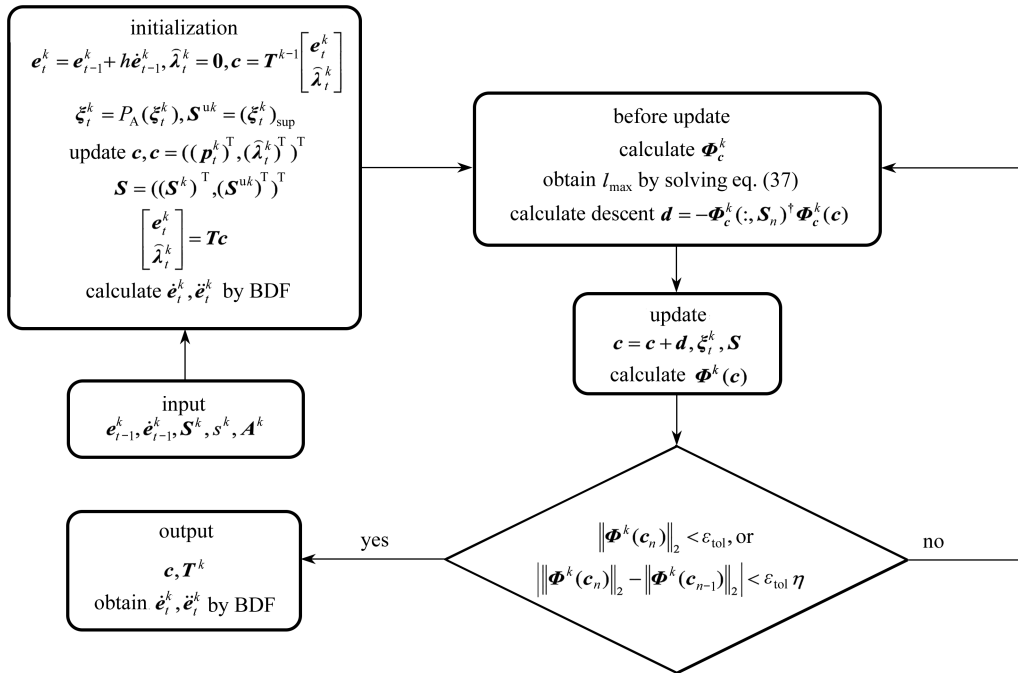


图3 GGN 算法流程图

Fig. 3 The flowchart for the GGN algorithm

为了保证 GGN 算法的收敛性和提高算法的效率,文献[17]提出了一种求非支持集最大下降的方法.通过求解最大问题,可以确定最大下降方向的指标.

$$l_{\max} = \arg \max f(l) = \frac{|\Phi^k(c) (I - LL^\dagger) \Phi_c^k(:, l)|}{\|(I - LL^\dagger) \Phi_c^k(:, l)\|_2}, \quad (37)$$

其中  $\|\cdot\|_2$  代表 2-范数,  $\Phi_c^k$  是  $\Phi^k(c)$  的 Jacobi 矩阵,  $L = \Phi_c^k(:, S)$  由  $\Phi_c^k$  的列组成;支持集  $S$  由已知的支持集  $S^k$  和未知的支持集  $S^{uk}$  组成,  $S^k$  由边界区域坐标  $e_b^k$  和 Lagrange 乘子向量  $\hat{\lambda}^k$  在  $c$  中的位置索引组成;  $S^{uk}$  是

模态坐标  $\xi^k$  非零元素在  $\mathbf{c}$  中的位置索引,  $\Phi_c^k(:, l)$  代表的是  $\Phi_c^k$  的第  $l$  列,  $\mathbf{I}$  是单位阵, 运算符  $(\cdot)^\dagger$  表示求伪逆阵. GGN 算法的执行步骤如图 3 所示.

图 3 中, GGN 算法有 4 个步骤:

步骤 1 输入动态响应上一个时间步长的结果  $\mathbf{e}_{i-1}^k, \dot{\mathbf{e}}_{i-1}^k$ , 已知的支持集  $\mathbf{S}^k$ , 以及柔性部件  $k$  的稀疏系数  $s^k$  和采样矩阵  $\mathbf{A}^k$ .

步骤 2 用向前差分公式初始化  $\mathbf{e}_i^k$ , 初始的  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i^k$  设置为零向量. 利用模态变换矩阵以及  $\mathbf{e}_i^k$  和  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i^k$  组成的向量求得  $\mathbf{c}$ . 用非线性映射算子  $P_\lambda(\xi_i^k)$  处理模态坐标  $\xi_i^k$ , 将其代入到  $\mathbf{c}$  中, 更新  $\mathbf{c}$ . 找到模态坐标  $\xi_i^k$  非零元素在  $\mathbf{c}$  中的索引, 初始化未知的支持集  $\mathbf{S}^{\text{unk}}$ . 再次通过模态变换矩阵和  $\mathbf{c}$ , 得到绝对节点坐标  $\mathbf{e}_i^k$ , 最后利用 BDF 求出  $\dot{\mathbf{e}}_i^k$  和  $\mathbf{e}_i^k$ .

步骤 3 计算  $\Phi^k(\mathbf{c})$  和定义在式(35)的 Jacobi 矩阵  $\Phi_c^k$ , 通过求解式(37)获得在非支持集中的最大下降指数  $l_{\max}$ . 如果  $f(l_{\max})$  小于给定的公差, 则将该指数添加到支持集  $\mathbf{S}$  中. 最后迭代值  $\mathbf{d}$  通过计算求得.

步骤 4 更新  $\mathbf{c}, \xi_i^k$  以及  $\mathbf{S}$ . 计算非线性映射算子  $\Phi^k(\mathbf{c})$ . 如果  $\Phi^k(\mathbf{c})$  超过了给定的误差, 则返回步骤 3, 否则结束迭代. 最后得到  $\mathbf{e}_i^k, \dot{\mathbf{e}}_i^k, \ddot{\mathbf{e}}_i^k$  和  $\hat{\boldsymbol{\lambda}}_i^k$ , 作为  $t$  步长下的动态响应结果.

### 3 数值结果

本文的算例都是在处理器配置为 Intel(R) Core(TM) i7-7500U CPU@2.70 GHz 和存储器配置为 12 GB 的计算机上使用 MATLAB © R2016a 执行的.

#### 3.1 自由落体的单摆运动

本文通过两个例子来验证基于 ANCF 的模态自适应选择方法的有效性. 将自由落体的单摆运动作为第一个例子. 如图 4, 梁通过旋转接头与地面连接, 在初始状态下保持水平, 初速度为零.

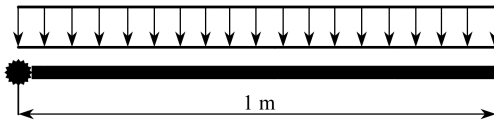


图 4 自由落体单摆

Fig. 4 The free falling pendulum

梁的几何参数和材料参数见表 1.

表 1 单摆的几何与材料参数

Table 1 Geometry parameters and material parameters of the pendulum

parameter	value
length $l/m$	1
square sectional area $A/m^2$	$4 \times 10^{-4}$
Young's modulus $E/Pa$	$7 \times 10^5$
density $\rho/(kg/m^3)$	$7.2 \times 10^3$
moment of inertia $I/m^4$	$1.333 \times 10^{-8}$

用 160 个 ANCF 不含剪切的二维梁单元, 总自由度为 644 来表示自由落体的单摆运动, 总模拟时间和时间步长分别设置为 1.1 s 和 0.001 s. 单摆的稀疏度设置为 100, 采样数设置为 308. 公差  $\varepsilon$  设为  $1 \times 10^{-11}$ . 图 5 给出了仿真过程中若干时刻单摆梁中线的构型, 用提出的方法和传统的 ANCF 进行比较, 单摆自由端的横向位移如图 6 所示. 显然, 由提出的方法得到的仿真结果与传统的 ANCF 高度一致.

此外, 图 7 展示了提出的方法在不同时间步长下对单摆模态坐标的自适应选择, 实线为模态坐标的值, 黑圈表示被挑选出的 100 个具有重大贡献的模态, 即选择 100 个绝对值最大的模态坐标. 但是在不同的时间步长下选择方式是不同的, 换句话说, 该方法实现了在每个时间步长下动态选择模态.

本文提出的模态自适应选择方法计算时间比传统 ANCF 要短, 前者总的计算时间为 531.855 s, 后者为 787.071 s, 效率至少提高了 30%, 若减少采样数, 效率可以提升更多, 详情见表 2.



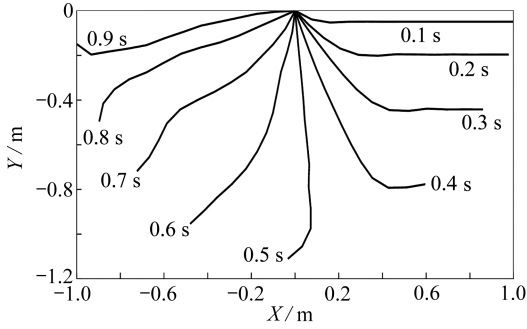


图5 不同时刻柔性单摆构型

Fig. 5 Configurations of the free falling pendulum at different moments

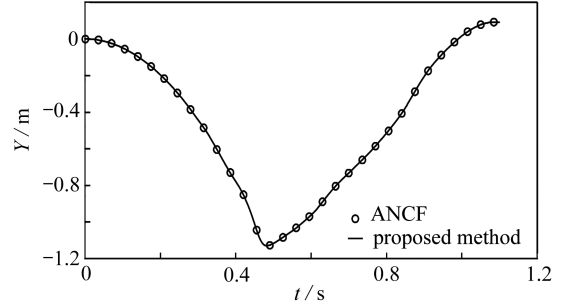
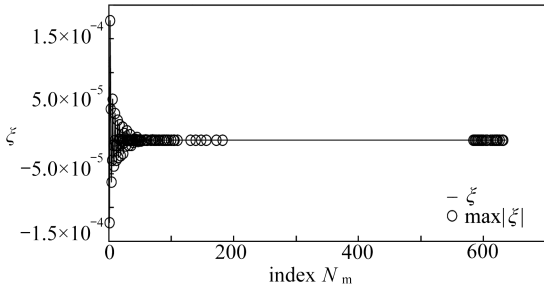


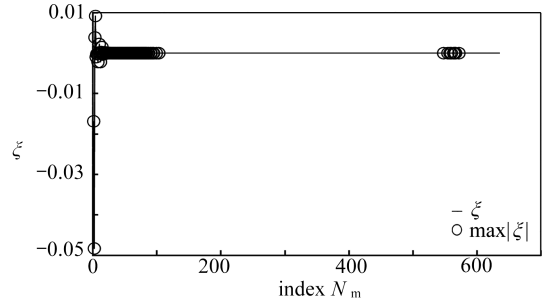
图6 单摆自由端的垂直位置

Fig. 6 Vertical positions of the free end of the pendulum



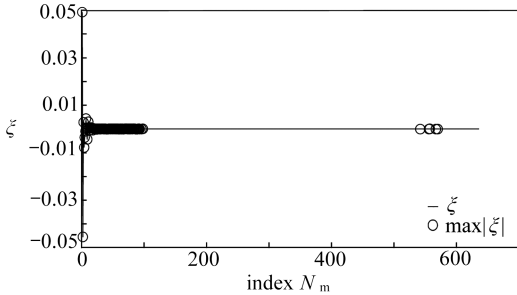
(a)  $t = 0.005$  s 时模式坐标和选出的模式

(a) Selected modes and modal coordinates at  $t = 0.005$  s



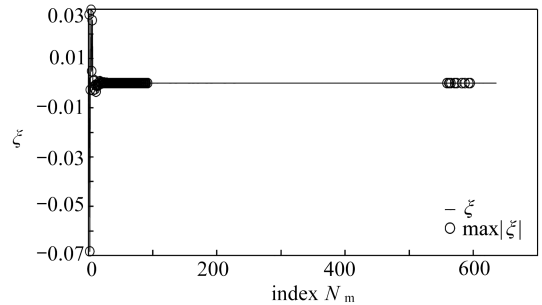
(b)  $t = 0.1$  s 时模式坐标和选出的模式

(b) Selected modes and modal coordinates at  $t = 0.1$  s



(c)  $t = 0.5$  s 时模式坐标和选出的模式

(c) Selected modes and modal coordinates at  $t = 0.5$  s



(d)  $t = 1$  s 时模式坐标和选出的模式

(d) Selected modes and modal coordinates at  $t = 1$  s

图7 提出的方法在不同时间步长下对模式的自适应选择(单摆)

Fig. 7 Adaptive selection of modal coordinates with the proposed method for different time steps(pendulum)

表2 单摆传统 ANCF 和所提出方法的计算效率(单位: s)

Table 2 Computation efficiency of the ANCF and the proposed method for pendulums (unit: s)

model	matrix operation	updated Jacobian matrix, stiffness matrix and residue etc	total time
ANCF	176.411	598.334	787.071
proposed	118.341	412.514	531.855

### 3.2 平面 3-RRR 并联机器人

平面 3-RRR 并联机器人示意图如图 8 所示,图中移动平台的局部坐标系固定在平台的中心点上,全局坐标系在图中右侧.驱动杆与机架(底座)相连,从动杆与移动平台相连<sup>[18]</sup>.

机构的几何参数和材料参数见表 3.为了扩大连杆弹性变形的影响,设置了小于铝的弹性模量.在仿真中,3-RRR 并联机器人的移动平台所预设的运动轨迹为一个半径为 0.1 m 的圆:

$$\begin{cases} x = 0.1\cos(\omega t) \text{ m}, \\ y = 0.1\sin(\omega t) \text{ m}, \\ z = 0 \text{ rad}, \end{cases} \quad (38)$$

$\omega$  是一个角速度, 值为  $2\pi \text{ rad/s}$ 。在模拟开始时, 平台的初始位置为  $x = 0.1 \text{ m}$ ,  $y = 0 \text{ m}$ ,  $z = 0 \text{ rad}$ , 初始速度为  $\dot{x} = 0 \text{ m/s}$ ,  $\dot{y} = 0.1\pi \text{ m/s}$ ,  $\dot{z} = 0 \text{ rad/s}$ 。

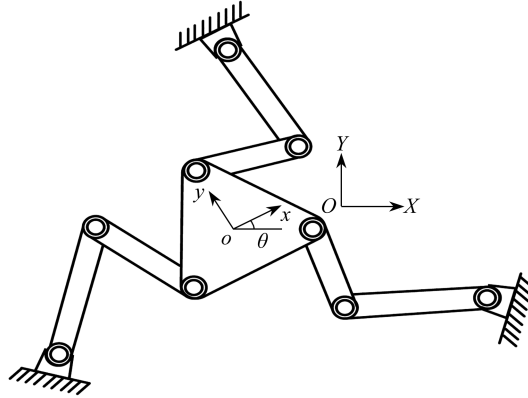


图 8 全局坐标系下的 3-RRR 并联机器人示意图

Fig. 8 Geometry and global coordinates of the 3-RRR mechanism

表 3 机构的几何与材料参数

Table 3 Geometry parameters and material parameters of the mechanism

material parameter	driving link	passive link	member	length $l / \text{m}$
thickness $T / \text{m}$	0.01	0.005	driving link	0.245
width $W / \text{m}$	0.03	0.01	passive link	0.242
Young's modulus $E / \text{Pa}$	$2.01 \times 10^{11}$	$7 \times 10^8$	moving stage	0.112
density $\rho / (\text{kg/m}^3)$	$2.7 \times 10^3$	$2.7 \times 10^3$	fixed stage	0.400

用自然坐标描述机构驱动杆的运动, 驱动杆和移动平台视为刚性部件, 移动平台用  $x, y$  方向上的位移和  $x$  轴正方向上的转角  $\theta$  表示其运动, 用 100 个 ANCF 不含剪切的二维梁单元, 即自由度为 404 来表示机构中一个从动杆件(柔性部件)的运动, 机构总的自由度为 1 227, 总模拟时间和步长分别设置为 2 s 和 0.001 s。每一个从动杆件的稀疏度设置为 80, 采样数设置为 200。公差  $\varepsilon$  设为  $1 \times 10^{-11}$ 。

通过对 3-RRR 并联机器人的运动学计算, 得到了开始动态分析所需的初始位置和速度。图 9 显示了不同时间的机构构型。可以看出, 驱动杆件一直保持未变形, 而柔性的从动杆件在平台移动时有明显的变形。

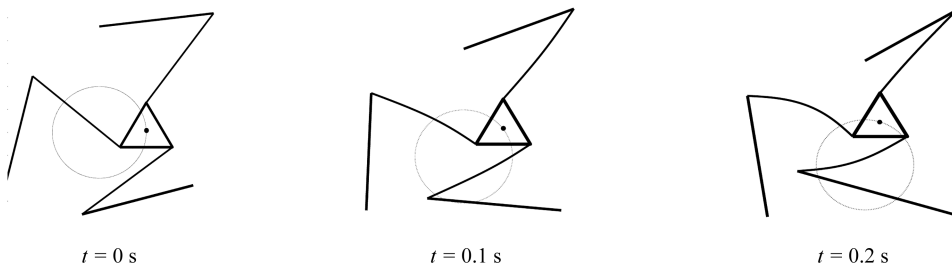


图 9 在不同时刻的机构构型

Fig. 9 Configurations of the mechanism at different moments

用所提出的方法和传统的 ANCF 进行比较<sup>[19]</sup>。通过对 3-RRR 并联机器人的运动学计算, 得到了起始时刻动力学分析所需的初始位置和速度。图 10 为机构移动平台在  $x, y$  方向上的位移和转角  $\theta$ 。显然, 仿真结果是高度一致的。

用提出的方法求解机构左端从动杆件具有重大贡献的模式, 实现了模式的自适应选择, 如图 11 所示。在图中, 自适应地选择了 80 个绝对值最大的模式坐标。

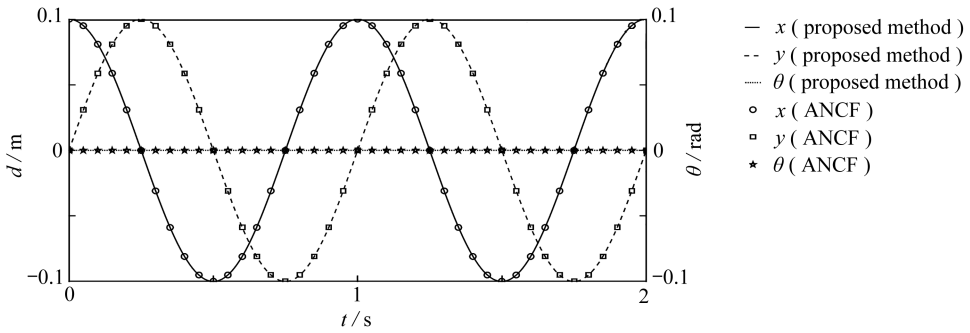
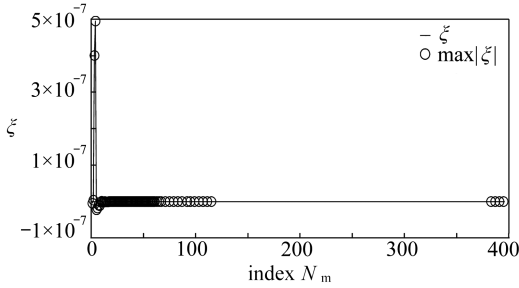


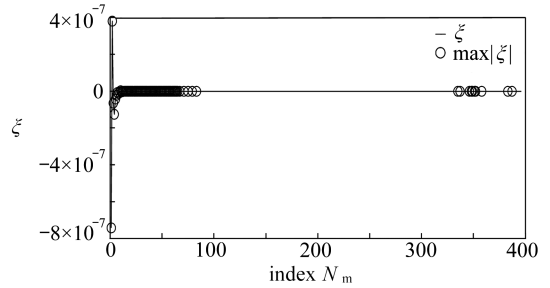
图 10 移动平台在  $x, y$  方向上的位移以及转角  $\theta$

Fig. 10 Rotation angle  $\theta$  and displacements in directions  $x$  and  $y$  of the platform



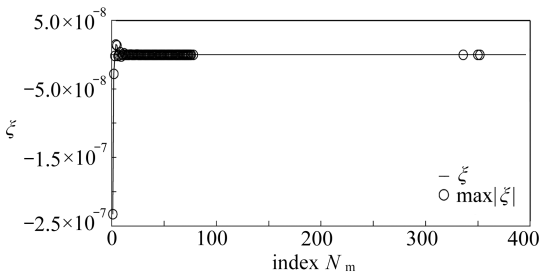
(a)  $t = 0.005$  s 时模式坐标和选出的模式

(a) Selected modes and modal coordinates at  $t = 0.005$  s



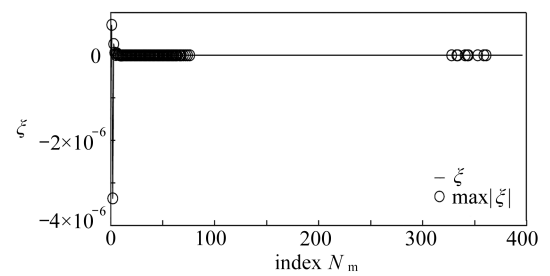
(b)  $t = 0.1$  s 时模式坐标和选出的模式

(b) Selected modes and modal coordinates at  $t = 0.1$  s



(c)  $t = 0.5$  s 时模式坐标和选出的模式

(c) Selected modes and modal coordinates at  $t = 0.5$  s



(d)  $t = 1$  s 时模式坐标和选出的模式

(d) Selected modes and modal coordinates at  $t = 1$  s

图 11 提出的方法在不同时间步长下对模式的自适应选择

Fig. 11 Adaptive selection of modal coordinates with the proposed method for different time steps

本文所提出的模式自适应选择方法的计算时间比传统 ANCF 要短,总的计算时间分别为 421.281 s 和 1 390.966 s,所用时间是传统 ANCF 的 30.03%,计算效率提升显著,详情见表 4.

表 4 传统 ANCF 和所提出方法的计算效率(单位: s)

Table 4 Computation efficiency of the ANCF and the proposed method (unit: s)

model	matrix operation	updated Jacobian matrix, stiffness matrix and residue etc	total time
ANCF	566.283 6	766.148	1 390.966
proposed	184.131	223.639	421.281

## 4 结 论

本文针对柔性大变形系统提出了基于 ANCF 的模式自适应选择方法.利用两个实例证明了该方法的有效性,与传统的 ANCF 的数值分析结果高度吻合并且计算效率至少提升了 30%,在误差允许的范围内,减少采样数,计算效率更高.另外本文还改进了刚度矩阵的计算方式,提高了每次迭代更新的效率.虽然通过两个实例证实了该方法的有效性,尤其是在描述由离心力引起的大变形模型时,但在分析轴向变形很大的模型上有些许不足.本文为了应用 Craig-Bampton 方法,将非线性系统映射到模态空间上.使用式(23)对动力学方程

等号左端进行线性化处理,这在一定程度上降低了纵向变形与横向弯曲的耦合性,使得方法存在一定的局限性.后续将针对这一问题展开深入研究,改进方法的适用性,通过弹性力高耦合的实例做进一步的验证.

## 参考文献(References):

- [1] GUYAN R J. Reduction of stiffness and mass matrices[J]. *AIAA Journal*, 1965, **3**(2): 380.
- [2] HURTY W C. Dynamic analysis of structural systems using component modes[J]. *AIAA Journal*, 1965, **3**(4): 255-282.
- [3] WILLIAM F. *Numerical Linear Algebra With Applications*[M]. Academic Press, 2013.
- [4] KERSCHENG, GOLINVAL J C, VAKAKIS A, et al. The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems: an overview[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2005, **41**(1): 147-169.
- [5] RAMA R R, SKATULLA S. Towards real-time modelling of passive and active behaviour of the human heart using PODI-based model reduction[J]. *Computers and Structures*, 2020, **232**: 105897.
- [6] CRAIG JR R R. Coupling of substructures for dynamic analyses: an overview[C]//*41st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*. Atlanta, GA, 2000.
- [7] AARTS R G K M, JONKER J B. Dynamic simulation of planar flexible link manipulators using adaptive modal integration[J]. *Multibody System Dynamics*, 2002, **7**(1): 31-50.
- [8] BRÜLS O, DUYSINX P, GOLINVAL J C. The global modal parameterization for non-linear model-order reduction in flexible multibody dynamics[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007, **69**(5): 948-977.
- [9] TANG Y X, HU H Y, TIAN Q. Model order reduction based on successively local linearizations for flexible multibody dynamics[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2019, **118**(3): 159-180.
- [10] BRACCESI C, CIANETTI F. Development of selection methodologies and procedures of the modal set for the generation of flexible body models for multi-body simulation[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers (Part K): Journal of Multi-Body Dynamics*, 2004, **218**(1): 19-30.
- [11] LIANG G, HUANG Y, LI H, et al. Nonlinear compressed sensing-based adaptive modal shapes selection approach for efficient dynamic response analysis of flexible multibody system[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, **105**(4): 3393-3407.
- [12] SHABANA A A, SCHWERTASSEK R. Equivalence of the floating frame of reference approach and finite element formulations[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1998, **33**(3): 417-432.
- [13] KANE T R. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1987, **10**(2): 139-139.
- [14] SHABANA A A. An absolute nodal coordinate formulation for the large rotation and deformation analysis of flexible bodies: MBS96-1-UIC[R]. Chicago: University of Illinois at Chicago, 1996.
- [15] KOBAYASHI N, WAGO T, SUGAWARA Y. Reduction of system matrices of planar beam in ANCF by component mode synthesis method[J]. *Multibody System Dynamics*, 2011, **26**(3): 265-281.
- [16] BERZERI M, SHABANA A A. Development of simple models for the elastic forces in the absolute nodal coordinate formulation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, **235**(4): 539-565.
- [17] GULLIKSSON M, OLEYNIK A. Greedy Gauss-Newton algorithms for finding sparse solutions to nonlinear underdetermined systems of equations[J]. *Optimization*, 2017, **66**(7): 1201-1217.
- [18] 王启生, 蒋建平, 李庆军, 等. 空间机器人组装超大型结构的动力学分析[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(8): 835-845.(WANG Qisheng, JIANG Jianping, LI Qingjun, et al. Dynamic analyses of the assembling process of ultra-large structures with space robots[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(8): 835-845.(in Chinese))
- [19] 卓英鹏, 王刚, 齐朝晖, 等. 节点参数含应变的空间几何非线性样条梁单元[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(9): 987-1003.(ZHUO Yingpeng, WANG Gang, QI Zhaohui, et al. A spatial geometric nonlinearity spline beam element with nodal parameters containing strains[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(9): 987-1003.(in Chinese))