

微分求积法求解悬臂 L 梁固有振动特性研究^{*}

李智超, 郝育新

(北京信息科技大学 机电工程学院, 北京 100192)

摘要: 悬臂 L 梁结构由于具有柔性大、可设计性强、空间利用充分, 振动过程中变形方式多样等独特优势而受到了广泛的关注与研究. 该文提出了一种基于微分求积法求解末端附加质量块的矩形等截面均质悬臂细长 L 梁的各阶固有频率和模态的方法. 在双坐标系下, 基于 Euler-Bernoulli 梁理论建立了悬臂 L 梁的动力学方程, 然后通过选取 Chebyshev 多项式的根作为节点坐标、选取 Lagrange 插值基函数、求解各阶权系数、处理边界条件等步骤, 最终利用求解矩阵广义特征值问题的方法求得结构各阶固有频率及模态. 在边界条件的处理上, 直接将边界条件施加于边界点上, 通过对比研究验证了该文固有频率理论解的正确性. 最后分析了末端质量、内外梁的长度比、宽度、厚度对各阶固有振动特性的影响. 该方法可以进一步应用推广到相关结构振动的研究中.

关键词: 微分求积法; 悬臂 L 梁; 固有振动特性

中图分类号: O31; O32 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.430382

Study on Natural Vibration Characteristics of L-Shaped Cantilever Beams With the Differential Quadrature Method

LI Zhichao, HAO Yuxin

(Mechanical Electrical Engineering School, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192, P.R.China)

Abstract: The L-shaped cantilever beam structure has many unique advantages such as large flexibility, strong designability, full utilization of space and various deformation modes during vibration, and is widely regarded and studied. A differential quadrature method was proposed to solve the natural frequencies and modes of rectangular-section homogeneous slender L-shaped cantilever beams with additional end masses. In the double coordinate systems, the dynamic equations for the L-shaped cantilever beam based on the Euler-Bernoulli beam theory were established. With selected roots of the Chebyshev polynomial as the node coordinates, the Lagrange interpolation basis function was employed, the weight coefficients of each order were solved, and the boundary conditions were considered, to obtain the natural frequencies and modes of all orders of the structure through resolution of the generalized matrix eigenvalue problem. The theoretical solution of the natural frequencies was verified in comparison with the previous theoretical results and the finite element results. Finally, the effects of the end mass, the length ratio, the width and the thickness of the inner and outer beams on the natural vibration characteristics of all orders were discussed. This method can be further applied to the study of re-

* 收稿日期: 2022-11-29; 修订日期: 2023-02-17

基金项目: 国家自然科学基金项目(11872127)

作者简介: 李智超(1998—), 男, 硕士生(E-mail: lzc19980510@163.com);
郝育新(1972—), 男, 教授(通讯作者, E-mail: bimhao@163.com).

引用格式: 李智超, 郝育新. 微分求积法求解悬臂 L 梁固有振动特性研究[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(5): 525-534.

lated structural vibrations.

Key words: differential quadrature method; L-shaped cantilever beam; natural vibration characteristic

0 引言

相比于常见的悬臂直梁结构,悬臂 L 梁结构由于其柔性更大、可设计性更强、空间利用更充分、振动过程中变形方式更多样等优点,被广泛投入到工程应用中,尤其是近年来作为压电俘能结构的主体而倍受关注与研究。在这些研究中,Chen 等^[1]以悬臂 L 梁为研究对象,研究了其 2:1 内共振及其幅频响应特性,继而研究了如何改善其作为能量泵时的带宽,并研究了 L 梁参数对带宽的影响。Erturk 等^[2]提出了一种新型 L 型梁-质量可调结构作为压电能量收集器应用于无人机起落架,通过使结构前两阶固有频率相对接近,从而实现在更宽的频带内收集更多的能量。Hame 等^[3]提出的 L 型梁振动能量收集系统可以在谐波激励条件下利用 1:2 内共振与饱和现象来提高能量转换性能,即使输入振动包含高水平的附加白噪声。Li 等^[4]研究了几何和材料特性对 L 型梁压电俘能器响应的影响,证明了考虑非线性效应时有助于提高在外激励振幅较大和强电场条件下俘能器性能的预测精度。Kim 等^[5]提出并研究了一种由悬臂梁和刚性臂组成的频率可变的 L 型能量采集器,该梁的特点是两根梁都水平放置,他们还深入研究了刚性梁的长度对系统固有频率的影响,并研究了该能量采集器的输出电压特性。

值得注意的是,在这些关于 L 型梁压电俘能应用的研究中,往往用到了悬臂 L 梁结构的内共振关系。因此,对 L 梁结构的固有振动特性进行深入研究,得到 L 梁各参数对其固有振动特性的影响规律,对其作为压电俘能结构的设计与应用具有重要的指导意义。

虽然运用有限元软件可以得到悬臂 L 梁结构的固有振动特性,但是不便于我们研究影响其固有振动特性的机理,因此有必要建立悬臂 L 梁的固有振动动力学模型,从理论上对其固有振动特性进行研究。自 Bert 等^[6]首次将微分求积法投入结构力学求解与分析中起,该方法便已成为除 Galerkin 法、Rayleigh-Ritz 法、拟谱法等传统空间离散方法外的又一高阶偏微分方程近似求解方法^[7-8]。其优势在于可以直接得到系统在物理空间中的解,而不是模态空间。Wang^[9]和 Tornabene 等^[10]将近年来微分求积法与微分求积单元法的最新进展做了详细的总结,列举了多种插值基函数的选取方式,讨论了多种边界条件的施加方法,并比较了各种方法的适用情况和优缺点。在实际应用方面,夏雨等^[11]采用微分求积法研究了 4 种边界条件情况下等截面梁与变截面梁的内力和位移,并获得了变截面轴向功能梯度 Euler-Bernoulli 梁若干低阶固有频率。葛仁余等^[12]利用微分求积法理论将变系数常微分控制方程转化为标准型的广义代数特征值问题,并提出了一种令节点呈等比数列分布的方法,以研究变截面轴向功能梯度 Timoshenko 梁的屈曲临界荷载。Khakpour 等^[13]利用三阶剪切变形理论,研究了热环境下弹性基体筒支功能梯度多孔梁的固有频率,并使用了微分求积法对控制方程进行离散。Peng 等^[14]研究了预压缩梁横向自由振动的固有振动特性,将微分求积法直接应用于修正后的横向自由振动控制方程,求得固有频率的数值解。近年来,有学者还将微分求积法的应用范围延伸至二维板、壳、盘型结构振动领域。Szekrényes^[15]采用微分求积法对分层复合板进行了数值模拟,解决了一些具有简单支撑和刚性固定边缘的包含材料缺陷的板问题。Liu 等^[16]采用修正偶应力理论(MCST),对层合旋转微系统进行了频率模拟和临界角速度模拟,并利用二维广义微分积分方法求解了各种边界条件下的非经典控制方程。Al-Furjan 等^[17]研究了具有蜂窝芯、两层含有 SMA 纤维的中间层和两层 MHC 外层的夹层盘的频率响应,根据 Hamilton 原理,运用广义微分求积法推导并求解了该结构的动力学方程。刘旭等^[18]基于 Kirchhoff 薄板理论与非局部弹性理论,对热环境中旋转功能梯度纳米环板的振动频率进行研究,通过微分求积法对径向和横向耦合运动变系数微分方程进行离散并求解。葛仁余等^[19]通过应用微分求积法,将双材料平面接头问题转化为含应力奇性指数的常微分方程组的特征值求解问题,通过奇性指数的计算以确保工作条件下连接件在连接点处的强度足够。

本文以末端附加质量块的矩形等截面均质悬臂细长 L 梁为研究对象,根据所建立的动力学方程以及边界条件,用微分求积法对其固有振动特性进行了研究。首先通过对比研究,验证了本文所用的微分求积法计算过程与结果的正确性,并研究了末端质量、内外梁的长度比、宽度、厚度对各阶固有频率的影响。特别地,本文创新地运用微分求积这一方法求解悬臂 L 梁的固有振动特性,相比于传统的直梁结构,额外考虑了其内

梁的扭转变形与拐点处特殊的连续性条件,从而确保了计算精度,推广了该方法在工程结构中的适用范围.此外,本文创新地将边界条件精确施加于边界点上,在进一步提高计算精度的同时简化了计算.

1 模型与动力学方程的建立

末端附加质量块的矩形等截面均质悬臂 L 梁模型如图 1 所示,L 梁在计算过程中被分为内、外两段,以内梁末端(固支端)为原点建立正交固定坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$, 并以内、外梁连接拐点处为原点建立正交运动坐标系 $O_2X_2Y_2Z_2$.

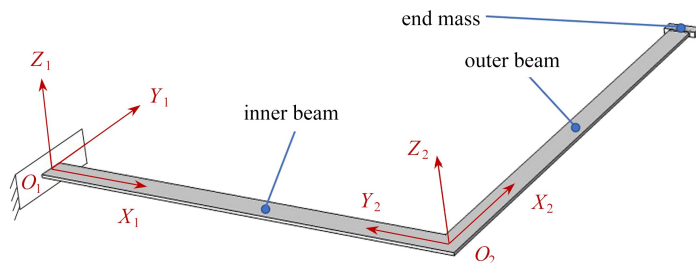


图 1 悬臂 L 梁示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the L-shaped cantilever beam

本文考虑内、外梁在振动过程中发生的 XOZ 面内的横向弯曲振动与内梁发生的扭转振动,由此引入内梁挠度 w_1 、外梁挠度 w_2 和内梁扭转角 θ .令内、外梁均为满足跨高比大于 10 的细长梁,故可将两段梁均视为 Euler-Bernoulli 梁,忽略其剪切变形及绕中性轴转动惯量的影响,此时动力学方程为内梁的 XOZ 面内横向弯曲振动方程(1a)、扭转振动方程(1b)与外梁的 XOZ 面内横向弯曲振动方程(2):

$$EI \frac{\partial^4 w_1}{\partial X_1^4} + \rho S \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0, \tag{1a}$$

$$GI_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial X_1^2} - \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0, \tag{1b}$$

$$EI \frac{\partial^4 w_2}{\partial X_2^4} + \rho S \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = 0, \tag{2}$$

其中 EI 为 L 梁的抗弯刚度, GI_p 为 L 梁的抗扭刚度, ρ 为梁的密度, S 为梁的横截面面积.

2 微分求积法求解

2.1 节点坐标的选取

分别将内、外梁的长度正规化为 $[0, 1]$ 后,取 Chebyshev 多项式的根作为节点坐标进行划分.在内、外梁各自的长度方向上分别划分 N_1 与 N_2 个节点,此时各节点坐标为

$$x_{1i} = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{N_1-1} \right] l_1, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \tag{3a}$$

$$x_{2i} = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \frac{(i-1)\pi}{N_2-1} \right] l_2, \quad i = 1, 2, \dots, N_2, \tag{3b}$$

其中 l_1, l_2 分别为内、外梁的长度.

2.2 插值基函数的选取

选用 Lagrange 插值基函数进行离散,由插值理论可得

$$f(X_1) = \sum_{j=1}^{N_1} p_{1j}(X_1) f(x_{1j}), \tag{4a}$$

$$f(X_2) = \sum_{j=1}^{N_2} p_{2j}(X_2) f(x_{2j}), \tag{4b}$$

其中 $p_{1j}(X), p_{2j}(X)$ 选用 Lagrange 插值基函数:

$$p_{1j}(X_1) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_1} \frac{X_1 - x_{1i}}{x_{1j} - x_{1i}}, \quad (5a)$$

$$p_{2j}(X_2) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N_2} \frac{X_2 - x_{2i}}{x_{2j} - x_{2i}}. \quad (5b)$$

2.3 权系数矩阵的计算

将式(4a)两侧对 X_1 求 m 阶导数,式(4b)两侧对 X_2 求 m 阶导数,分别代入 $X_1 = x_{1i}$ 和 $X_2 = x_{2i}$ 并化为矩阵形式可得

$$\begin{bmatrix} f^{(m)}(x_{11}) \\ f^{(m)}(x_{12}) \\ \vdots \\ f^{(m)}(x_{1,N_1-1}) \\ f^{(m)}(x_{1,N_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(m)} & A_{12}^{(m)} & \cdots & A_{1,N_1-1}^{(m)} & A_{1,N_1}^{(m)} \\ A_{21}^{(m)} & A_{22}^{(m)} & \cdots & A_{2,N_1-1}^{(m)} & A_{2,N_1}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{N_1-1,1}^{(m)} & A_{N_1-1,2}^{(m)} & \cdots & A_{N_1-1,N_1-1}^{(m)} & A_{N_1-1,N_1}^{(m)} \\ A_{N_1,1}^{(m)} & A_{N_1,2}^{(m)} & \cdots & A_{N_1,N_1-1}^{(m)} & A_{N_1,N_1}^{(m)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(x_{11}) \\ f(x_{12}) \\ \vdots \\ f(x_{1,N_1-1}) \\ f(x_{1,N_1}) \end{bmatrix}, \quad (6a)$$

$$\begin{bmatrix} f^{(m)}(x_{21}) \\ f^{(m)}(x_{22}) \\ \vdots \\ f^{(m)}(x_{2,N_2-1}) \\ f^{(m)}(x_{2,N_2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(m)} & B_{12}^{(m)} & \cdots & B_{1,N_2-1}^{(m)} & B_{1,N_2}^{(m)} \\ B_{21}^{(m)} & B_{22}^{(m)} & \cdots & B_{2,N_2-1}^{(m)} & B_{2,N_2}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ B_{N_2-1,1}^{(m)} & B_{N_2-1,2}^{(m)} & \cdots & B_{N_2-1,N_2-1}^{(m)} & B_{N_2-1,N_2}^{(m)} \\ B_{N_2,1}^{(m)} & B_{N_2,2}^{(m)} & \cdots & B_{N_2,N_2-1}^{(m)} & B_{N_2,N_2}^{(m)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(x_{21}) \\ f(x_{22}) \\ \vdots \\ f(x_{2,N_2-1}) \\ f(x_{2,N_2}) \end{bmatrix}, \quad (6b)$$

其中内、外梁权系数矩阵中的每个元素分别为

$$A_{ij}^{(m)} = \frac{d^m(p_{1j}(x_{1i}))}{dX_1^m}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_1, \quad (7a)$$

$$B_{ij}^{(m)} = \frac{d^m(p_{2j}(x_{2i}))}{dX_2^m}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N_2. \quad (7b)$$

将式(5)代入式(7),可得到一阶权系数表达式(8a)与高阶权系数表达式(8b):

$$\begin{cases} A_{ij}^{(1)} = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^{N_1} (x_{1i} - x_{1k})}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_1} (x_{1j} - x_{1k})}, & B_{ij}^{(1)} = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^{N_2} (x_{2i} - x_{2k})}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N_2} (x_{2j} - x_{2k})}, \\ A_{ii}^{(1)} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_1} \frac{1}{x_{1i} - x_{1k}}, & B_{ii}^{(1)} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_2} \frac{1}{x_{2i} - x_{2k}}, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N_{1,2}; i \neq j, \quad (8a)$$

$$\begin{cases} A_{ij}^{(m)} = m \left[A_{ii}^{(m-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(m-1)}}{x_{1i} - x_{1j}} \right], & B_{ij}^{(m)} = m \left[B_{ii}^{(m-1)} B_{ij}^{(1)} - \frac{B_{ij}^{(m-1)}}{x_{2i} - x_{2j}} \right], \\ A_{ii}^{(m)} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_1} A_{ik}^{(m)}, & B_{ii}^{(m)} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_2} B_{ik}^{(m)}, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N_{1,2}; i \neq j; m = 2, 3, \dots, N_{1,2} - 1. \quad (8b)$$

2.4 边界条件的处理

在传统的节点替代法(δ 法)的基础上,将施加于内部点的边界条件全部改为施加于边界点,并减少靠近边界点处相应数量内部点的四阶微分控制方程,得到改进后的边界条件:

固支端 $X_1 = 0$ 处

$$w_1(0, t) = 0, \quad w_1'(0, t) = 0, \quad \theta(0, t) = 0; \quad (9)$$

自由端 $X_2 = l_2$ 处

$$M_2(l_2, t) = 0, F_{s_2}(l_2, t) = m\ddot{w}_1(l_2, t), \quad (10)$$

其中 M_2 为外梁截面弯矩, F_{s_2} 为外梁截面剪力.

L 梁拐点处的连续性边界条件可表示为

$$\begin{cases} w_1(l_1, t) = w_2(0, t), \theta(l_1, t) = w_2'(0, t), \\ M_1(l_1, t) = 0, T_1(l_1, t) = M_2(0, t), F_{s_1}(l_1, t) = F_{s_2}(0, t), \end{cases} \quad (11)$$

其中 M_1 为内梁截面弯矩, T_1 为内梁截面扭矩, F_{s_1} 为内梁截面剪力.

将 $X_1 = x_{1i}$ 代入式(1a)、(1b), 得到内梁的内部节点控制方程:

$$EI \frac{\partial^4 w_1(x_{1i}, t)}{\partial X_1^4} + \rho S \frac{\partial^2 w_1(x_{1i}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad i = 3, 4, \dots, N_1 - 2, \quad (12a)$$

$$GI_p \frac{\partial^2 \theta(x_{1i}, t)}{\partial X_1^2} - \rho I_p \frac{\partial^2 \theta(x_{1i}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, N_1 - 1. \quad (12b)$$

将 $X_2 = x_{2i}$ 代入式(2), 得到外梁的内部节点控制方程:

$$EI \frac{\partial^4 w_2(x_{2i}, t)}{\partial X_2^4} + \rho S \frac{\partial^2 w_2(x_{2i}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad i = 3, 4, \dots, N_2 - 2. \quad (13)$$

由以上改进的节点替代法得到边界条件方程(9)、(10)、(11)共 10 个, 内部节点控制方程(12)、(13)共 $2N_1 + N_2 - 10$ 个.

2.5 固有振动特性的求解

设 $w_1(X_1, t), w_2(X_2, t), \theta(X_1, t)$ 的位移形式为

$$w_1(X_1, t) = \phi_1(X_1) e^{-i\omega t}, w_2(X_2, t) = \phi_2(X_2) e^{-i\omega t}, \theta(X_1, t) = \varphi(X_1) e^{-i\omega t}. \quad (14)$$

联立式(9)–(13), 并将式(14)中的位移形式代入得

$$\begin{cases} EI\phi_1^{(4)}(x_{1i}) - \rho S\phi_1(x_{1i})\omega^2 = 0, & i = 3, 4, \dots, N_1 - 2, \\ EI\phi_2^{(4)}(x_{2i}) - \rho S\phi_2(x_{2i})\omega^2 = 0, & i = 3, 4, \dots, N_2 - 2, \\ GI_p\varphi^{(2)}(x_{1i}) + \rho I_p\varphi(x_{1i})\omega^2 = 0, & i = 2, 3, \dots, N_1 - 1, \\ \phi_1(0) = 0, \phi_1^{(1)}(0) = 0, \varphi(0) = 0, \\ EI\phi_2^{(2)}(l_2) = 0, EI\phi_2^{(3)}(l_2) = -m\omega^2\phi_2(l_2), \\ \phi_1(l_1) = \phi_2(0), \varphi(l_1) = \phi_2^{(1)}(0), EI\phi_1^{(2)}(l_1) = 0, \\ GI_p\varphi^{(1)}(l_1) = EI\phi_2^{(2)}(0), EI\phi_1^{(3)}(l_1) = EI\phi_2^{(3)}(0). \end{cases} \quad (15)$$

利用微分求积法将高阶微分方程组(15)转化为代数方程组:

$$\begin{cases} EI \sum_{j=1}^{N_1} A_{ij}^{(4)} \phi_1(x_{1j}) - \rho S \phi_1(x_{1i}) \omega^2 = 0, & i = 3, 4, \dots, N_1 - 2, \\ EI \sum_{j=1}^{N_2} B_{ij}^{(4)} \phi_2(x_{2j}) - \rho S \phi_2(x_{2i}) \omega^2 = 0, & i = 3, 4, \dots, N_2 - 2, \\ GI_p \sum_{j=1}^{N_1} A_{ij}^{(2)} \varphi(x_{1j}) + \rho I_p \varphi(x_{1i}) \omega^2 = 0, & i = 2, 3, \dots, N_1 - 1, \\ \phi_1(0) = 0, \sum_{j=1}^{N_1} A_{1j}^{(1)} \phi_1(x_{1j}) = 0, \varphi(0) = 0, \\ EI \sum_{j=1}^{N_2} B_{N_2, j}^{(2)} \phi_2(x_{2j}) = 0, EI \sum_{j=1}^{N_2} B_{N_2, j}^{(3)} \phi_2(x_{2j}) = -m\omega^2 \phi_2(l), \\ \phi_1(l_1) = \phi_2(0), \varphi(l_1) = \sum_{j=1}^{N_2} B_{1j}^{(1)} \phi_2(x_{2j}), EI \sum_{j=1}^{N_1} A_{N_1, j}^{(2)} \phi_1(x_{1j}) = 0, \\ GI_p \sum_{j=1}^{N_1} A_{N_1, j}^{(1)} \varphi(x_{1j}) = EI \sum_{j=1}^{N_2} B_{1j}^{(2)} \phi_2(x_{2j}), EI \sum_{j=1}^{N_1} A_{N_1, j}^{(3)} \phi_1(x_{1j}) = EI \sum_{j=1}^{N_2} B_{1j}^{(3)} \phi_2(x_{2j}). \end{cases} \quad (16)$$

上式可化简为如下矩阵形式:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad (17)$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha} = [\phi_1(x_{11}), \phi_1(x_{12}), \dots, \phi_1(x_{1N_1}), \phi_2(x_{21}), \phi_2(x_{22}), \dots, \phi_2(x_{2N_2}), \varphi(x_{11}), \varphi(x_{12}), \dots, \varphi(x_{1N_1})]^T.$$

通过求解刚度矩阵 \mathbf{K} 相对于质量矩阵 \mathbf{M} 的广义特征值问题,可求得 $2N_1 + N_2$ 个特征值 ω_i^2 以及特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$,其中 ω_i 为 L 梁的第 i 阶固有频率, $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 L 梁的第 i 阶模态。

3 结果对比验证

为了验证计算结果的正确性,将本文结果与 Cao 等^[20]利用 Galerkin 法得到的该系统的各阶固有频率进行对比.对比所用的材料与几何参数值如表 1 所示,表 2 为微分求积法收敛性研究,本文理论计算结果与 Cao 等^[20]的理论计算结果以及 PATRAN、COMSOL 有限元结果的对比情况见表 3。

表 1 悬臂 L 梁的几何与材料参数表

Table 1 Geometric and material parameters of the L-shaped cantilever beam

parameter	value ^[20]	parameter	value ^[20]
length l_1 / m, l_2 / m	0.75, 0.75	elasticity modulus E / Pa	7×10^{10}
width b / m	0.04	polar moment of inertia I_p / m ⁴	1.535×10^{-9}
thickness h / m	0.005	end mass m / kg	0.5
density ρ / (kg/m ³)	2 700	Poisson's ratio ν	0.3

表 2 不同节点数下的结构前五阶固有频率表(单位: Hz)

Table 2 First five-order natural frequencies of the structure with different number of nodes (unit: Hz)

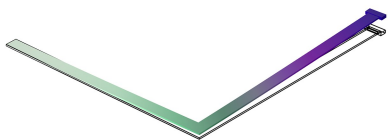
node	mode				
	1	2	3	4	5
$N_{1,2} = 9$	1.377 7	5.514 0	27.671 8	42.532 3	94.087 5
$N_{1,2} = 10$	1.377 7	5.513 6	27.661 4	42.342 1	93.287 7
$N_{1,2} = 11$	1.377 7	5.513 6	27.659 9	42.259 0	93.070 6
$N_{1,2} = 12$	1.377 7	5.513 6	27.660 2	42.261 4	93.072 7
$N_{1,2} = 13$	1.377 7	5.513 6	27.660 2	42.263 6	93.088 2
$N_{1,2} = 14$	1.377 7	5.513 6	27.660 2	42.263 5	93.089 0
$N_{1,2} = 15$	1.377 7	5.513 6	27.660 2	42.263 4	93.088 4

表 3 结构前五阶固有频率对比表(单位: Hz)

Table 3 Comparison of the structure's first five-order natural frequencies (unit: Hz)

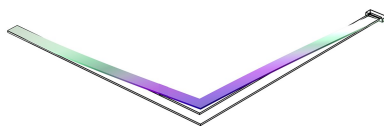
mode	1	2	3	4	5
present $N_{1,2} = 13$	1.377 7	5.513 6	27.660 2	42.263 6	93.088 2
ref. [20] (error δ / %)	1.377 2(0.04)	5.531 6(-0.33)	27.761 9(-0.37)	42.456 2(-0.45)	93.500 7(-0.44)
PATRAN (error δ / %)	1.370 1(0.55)	5.486 1(0.50)	27.582 0(0.28)	41.738 0(1.26)	92.665 0(0.46)
COMSOL (error δ / %)	1.405 3(-1.96)	5.554 0(-0.73)	27.779 0(-0.43)	41.556 0(1.70)	92.551 0(0.58)

如表 2 所示,当 $N_{1,2} = 13$ 时,结构前五阶固有频率已经收敛,故随后的计算中取节点数 $N_{1,2} = 13$.表 3 中对比结果显示,本文通过微分求积理论计算得到的各阶固有频率误差均不超过 2%,故本文提出的用微分求积法求解悬臂 L 梁固有频率的方法是可行的.有限元求解得到结构前五阶模态如图 2 所示。



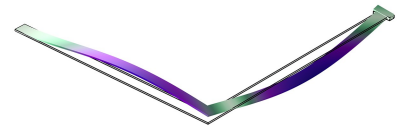
(a) 一阶, 1.405 3 Hz

(a) The 1st order, 1.405 3 Hz



(b) 二阶, 5.554 0 Hz

(b) The 2nd order, 5.554 0 Hz



(c) 三阶, 27.779 0 Hz

(c) The 3rd order, 27.779 0 Hz

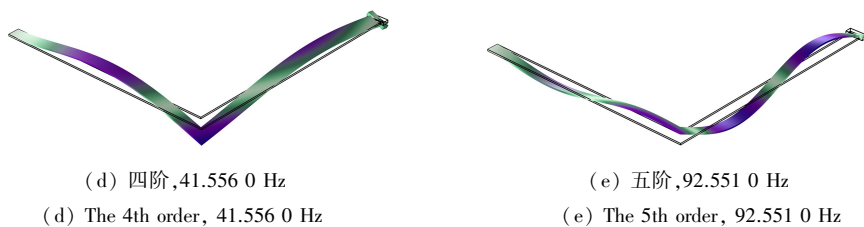


图 2 结构前五阶模态图

Fig. 2 Diagram of the first five modes of the structure

4 参数讨论与分析

首先通过改变外梁长度 l_2 调节内、外梁的长度比,其中当 l_2/l_1 为 0 时,悬臂 L 梁退化为悬臂直梁.如图 3 所示,随着长度比的增加,结构各阶固有频率均下降,且下降幅度逐渐减小.

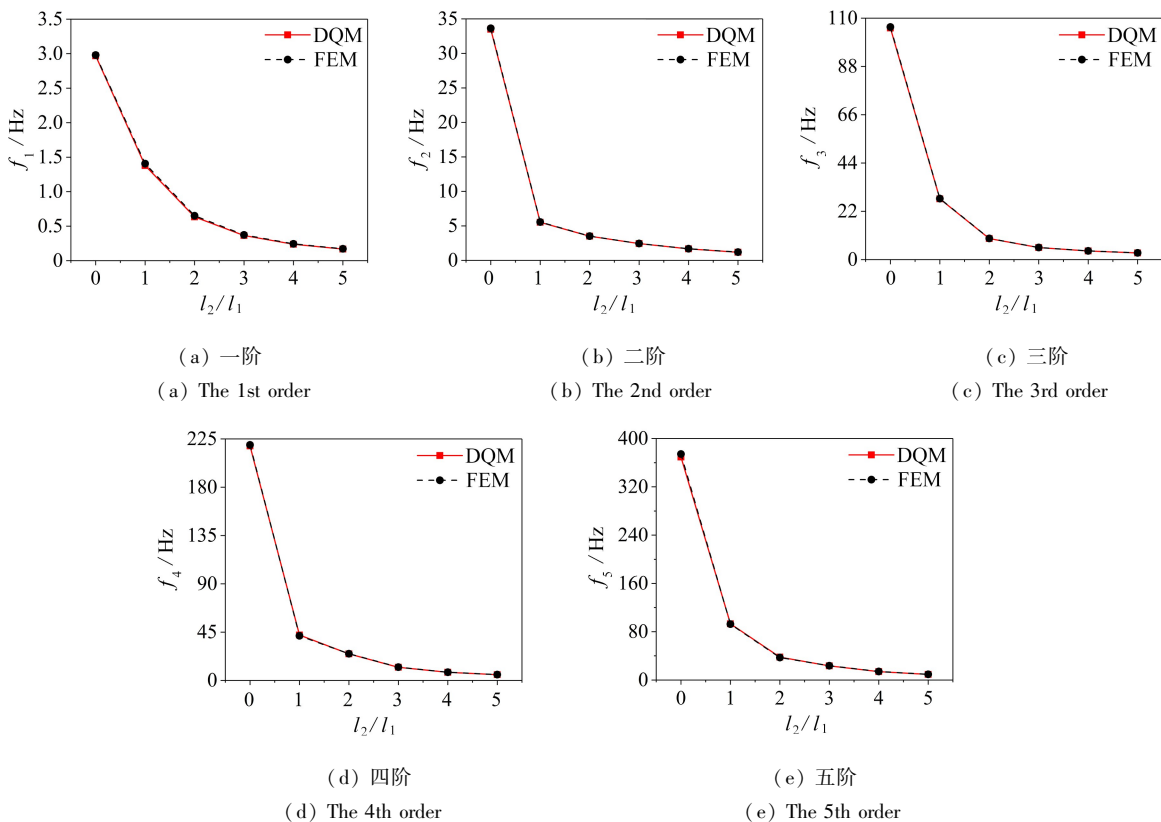


图 3 内、外梁长度比对结构各阶固有频率的影响

Fig. 3 The effect of the length ratio of the outer beam to the inner beam on natural frequencies of the structure

图 4 为梁的宽度 b 的增加对系统固有频率的影响.由图可见微分求积法求得各阶固有频率均呈现上升趋势,且上升幅度逐渐减小.

如图 5 所示,随着梁厚 h 的增加,结构各阶横向弯扭振动固有频率均显著上升,在本文研究范围内,这一变化趋势接近线性.

图 6 为梁的末端质量 m 的增加对系统固有频率的影响,由图可知各阶固有频率均呈现下降趋势,且下降幅度逐渐减小.

综上所述,通过增大梁长比 l_2/l_1 、末端质量 m ,或减小梁宽 b 、梁厚 h 等方式均可实现固有频率的降低.在本文研究范围内,利用微分求积法求解得到的前五阶固有频率与 COMSOL 有限元结果的对比误差均不超过 5%,故该算法具有高阶精度.值得注意的是,造成这一误差的主要原因在于:梁结构参数的某些改变导致该结构与 Euler-Bernoulli 梁理论适应性降低,因此为保证各阶固有频率的计算精度,末端质量 m 和梁宽 b 均

不宜取值过大,梁长 l_1, l_2 也不宜取值过小,应满足 $l_{1,2} \geq 10b$ 。

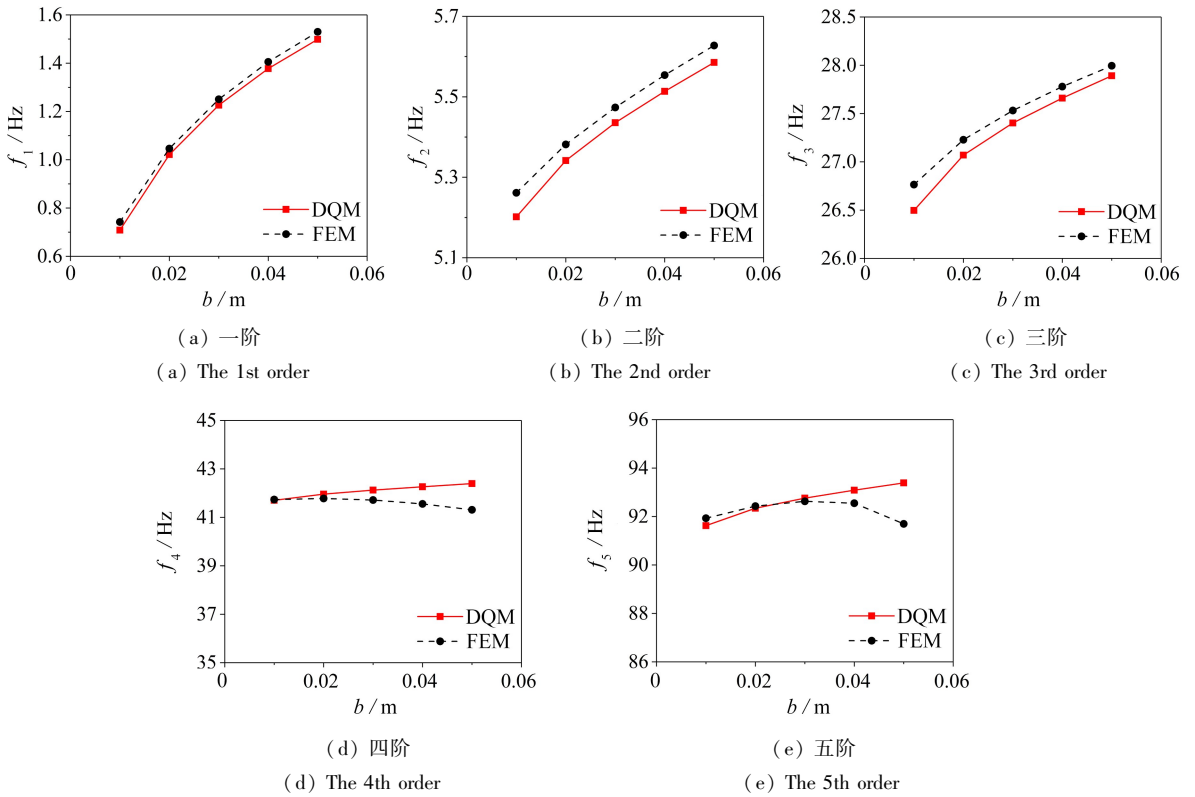


图4 梁宽度对结构各阶固有频率的影响

Fig. 4 The effect of the beam width on natural frequencies of the structure

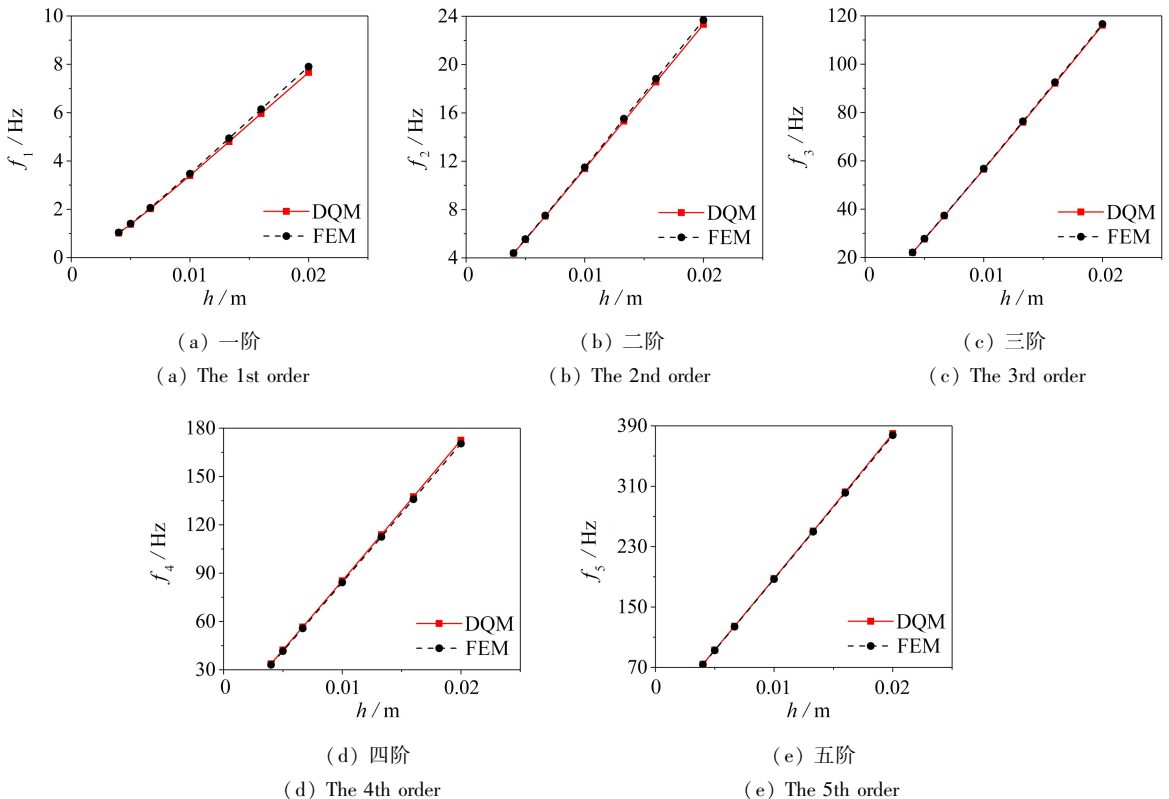


图5 梁厚度对结构各阶固有频率的影响

Fig. 5 The effect of the beam thickness on natural frequencies of the structure

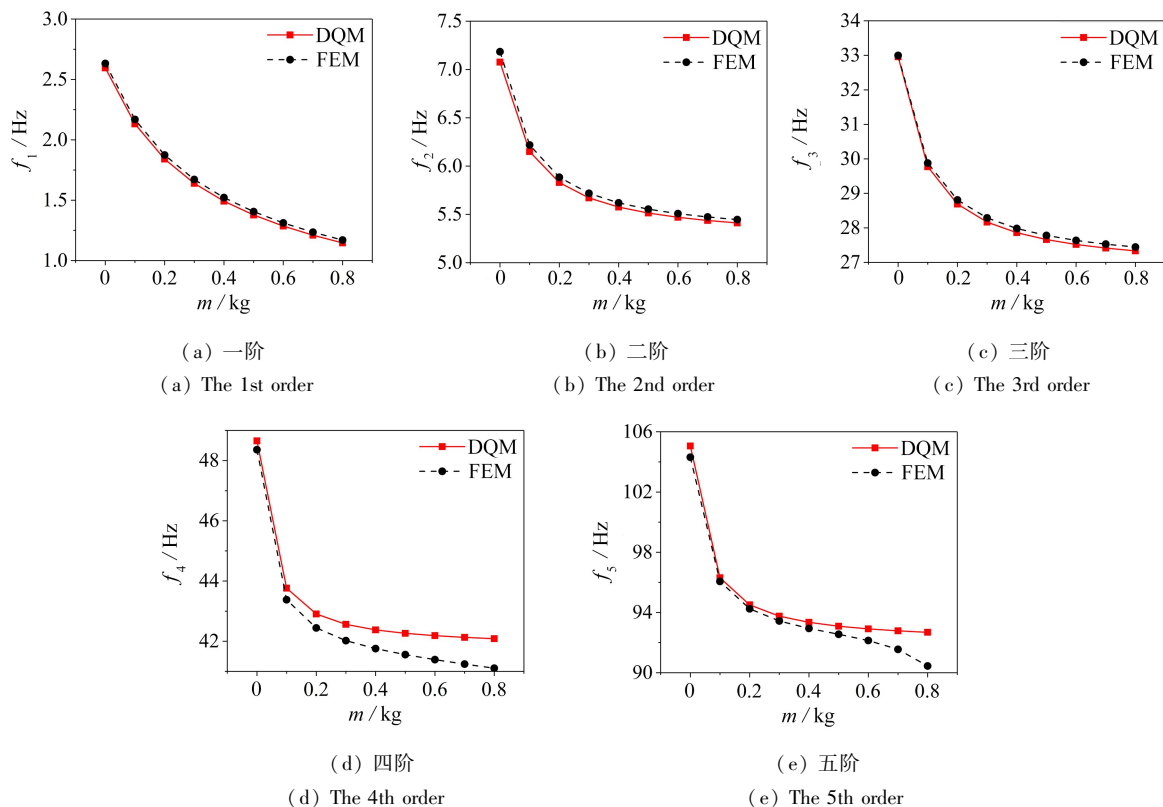


图 6 末端质量对结构各阶固有频率的影响

Fig. 6 The effect of the end mass on natural frequencies of the structure

5 结 论

本文利用微分求积法,对末端附加质量块的矩形等截面均质悬臂细长 L 梁的各阶固有频率与模态进行了计算.首先在内、外梁末端分别建立正交坐标系后,建立了结构的动力学方程.之后运用微分求积法,将内、外梁长度方向上的计算区间正规化为 $[0,1]$,选取 Chebyshev 多项式的根作为节点坐标划分计算区域,并选用 Lagrange 插值基函数进行插值,进一步求得各阶权系数.在列出直接法或改进后的节点替代法处理后的边界条件方程与连续性条件方程以及内、外梁的内部节点控制方程后,可将方程中给定节点处的函数与其各阶导数项用求解域内全部节点函数值的加权和进行表示,整理得到代数方程组并表示为矩阵形式,通过求解广义特征值问题得到结构各阶固有频率与模态.最后研究了末端质量、内外梁的长度比、宽度、厚度对结构各阶固有振动特性的影响.本方法可以进一步应用推广到相关结构振动的研究中.

参考文献 (References):

- [1] CHEN L Q, JIANG W A, PANYAM M, et al. A broadband internally resonant vibratory energy harvester[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2016, **138**(6): 061107.
- [2] ERTURK A, RENNO J M, INMAN D J. Modeling of piezoelectric energy harvesting from an L-shaped beam-mass structure with an application to UAVs[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2009, **20**(5): 529-544.
- [3] HARNE R L, SUN A, WANG K W. Leveraging nonlinear saturation-based phenomena in an L-shaped vibration energy harvesting system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, **363**: 517-531.
- [4] LI H, SUN H, SONG B, et al. Nonlinear dynamic response of an L-shaped beam-mass piezoelectric energy harvester[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, **499**: 116004.
- [5] KIM I H, JANG S J, JUNG H J. Design and experimental study of an L shape piezoelectric energy harvester [J]. *Shock and Vibration*, 2017, **2017**: 8523218.

- [6] BERT C W, JANG S K, STRIZ A G. Two new approximate methods for analyzing free vibration of structural components[J]. *AIAA Journal*, 1988, **26**(5): 612-618.
- [7] 王冬梅, 张伟, 刘寅立. 微分求积法在工程结构动力学中的应用研究[J]. 天津科技大学学报, 2018, **33**(1): 71-78.(WANG Dongmei, ZHANG Wei, LIU Yinli. Application of differential quadrature method in engineering structural dynamics[J]. *Journal of Tianjin University of Science & Technology*, 2018, **33**(1): 71-78.(in Chinese))
- [8] 吴鹦泽, 王冬梅. 微分求积法在悬臂梁结构非线性动力学中的应用研究[J]. 力学研究, 2018, **7**: 1-13.(WU Yingze, WANG Dongmei. Application of differential quadrature method to nonlinear dynamics of cantilever beam structures[J]. *International Journal of Mechanics Research*, 2018, **7**: 1-13.(in Chinese))
- [9] WANG X. *Differential Quadrature and Differential Quadrature Based Element Methods: Theory and Applications*[M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2015.
- [10] TORNABENE F, FANTUZZI N, UBERTINI F. Strong formulation finite element method based on differential quadrature: a survey[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2015, **67**(2): 020801.
- [11] 夏雨, 葛仁余, 王静平, 等. 变截面 Euler-Bernoulli 梁稳态谐振动的微分求积法研究[J]. 安徽工程大学学报, 2021, **36**(4): 56-63.(XIA Yu, GE Renyu, WANG Jingping, et al. Differential quadrature method for steady-state harmonic vibration of beams with variable cross-section[J]. *Journal of Anhui Polytechnic University*, 2021, **36**(4): 56-63.(in Chinese))
- [12] 葛仁余, 张佳宸, 刘凡, 等. 微分求积法在计算功能梯度 Timoshenko 梁临界荷载中的应用研究[J]. 应用力学学报, 2020, **37**(6): 2634-2641.(GE Renyu, ZHANG Jiachen, LIU Fan, et al. Calculation of critical load for functionally graded Timoshenko beam using differential quadrature method[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2020, **37**(6): 2634-2641.(in Chinese))
- [13] KHAKPOUR M, BAZARGAN-LARI Y, ZAHEDINEJAD P, et al. Vibrations evaluation of functionally graded porous beams in thermal surroundings by generalized differential quadrature method[J]. *Shock and Vibration*, 2022, **2022**(4): 8516971.
- [14] PENG L, WANG Y. Differential quadrature method for vibration analysis of prestressed beams[J]. *E3S Web of Conferences*, 2021, **237**: 03029.
- [15] SZEKRÉNYES A. Differential quadrature solution for composite flat plates with delamination using higher-order layerwise models[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2022, **248**: 111621.
- [16] LIU H, ZHAO Y, PISHBIN M, et al. A comprehensive mathematical simulation of the composite size-dependent rotary 3D microsystem via two-dimensional generalized differential quadrature method[J]. *Engineering With Computers*, 2022, **38**(5): 4181-4196.
- [17] AL-FURJAN M S H, HABIBI M, SHAN L, et al. On the vibrations of the imperfect sandwich higher-order disk with a lactic core using generalize differential quadrature method[J]. *Composite Structures*, 2021, **257**: 113150.
- [18] 刘旭, 姚林泉. 热环境中旋转功能梯度纳米环板的振动分析[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(11): 1224-1236.(LIU Xu, YAO Linquan. Vibration analysis of rotating functionally gradient nano annular plates in thermal environment[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(11): 1224-1236.(in Chinese))
- [19] 葛仁余, 张佳宸, 马国强, 等. 微分求积法分析平面接头应力奇异性[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(4): 382-391.(GE Renyu, ZHANG Jiachen, MA Guoqiang, et al. Analysis on stress singularity of plane joints with the differential quadrature method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(4): 382-391.(in Chinese))
- [20] CAO Y, CAO D, HE G, et al. Vibration analysis and distributed piezoelectric energy harvester design for the L-shaped beam[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2021, **87**: 104214.