

# 多翼裂缝压裂偏心井半解析模型及其渗流特征\*

姬安召

(陇东学院, 甘肃 庆阳 745100)

**摘要:** 考虑压裂多翼裂缝偏心井的实际情况,建立了多翼裂缝偏心井的数学模型.采用 Laplace 变换和压降叠加原理得到 Laplace 空间多翼裂缝压裂偏心井井底压力的半解析解.采用非均匀流量法,对井底压力的半解析解进行离散.结合 Stehfest 数值反演获得实空间井底压力的数值解和产量分布.借助 SAPHIR 试井分析软件建立了储层的数值试井模型并进行了数值离散计算.将计算结果与该文的半解析模型计算结果进行了对比,验证了该文模型的正确性.结果表明,多翼裂缝压裂偏心井井底压力变化可划分为 8 个主要流动阶段.最后讨论了裂缝的无因次导流能力、裂缝的不对称因子和井的偏心距对井底压力变化和产量分布特征的影响.

**关键词:** 水力压裂井; 偏心井; 不对称裂缝; Green 函数; 多翼裂缝

中图分类号: TE312 文献标志码: A DOI: 10.21656/1000-0887.430395

## A Semi-Analytical Model and Seepage Characteristics of Multi-Wing Fracture Off-Center Wells

Ji Anzhao

(Longdong University, Qingyang, Gansu 745100, P.R.China)

**Abstract:** In view of the actual situation of multi-wing fracture off-center wells, the mathematical model for the wells was established. Based on the Laplace transform and the pressure drop superposition principle, the semi-analytical solution of the bottom hole pressure in the multi-wing fracture off-center well in the Laplace space, was obtained. The semi-analytical solution was discretized with the non-uniform flow method. Combined with Stehfest numerical inversion, the numerical solution of the real space bottom hole pressure and the production distribution were obtained. The numerical well test model for the reservoir was established with the SAPHIR well test analysis software, and the numerical discrete calculation was carried out. The numerical results were compared with the calculation results of the semi-analytical model, which verifies the correctness of the semi-analytical model. The results show that, the bottom hole pressure variation of the multi-wing fracture off-center well can be divided into 8 main flow stages. Finally, the effects of the dimensionless conductivity, the fracture asymmetry factor and the off-center distance on the bottom hole pressure variation and production distribution characteristics, were discussed.

**Key words:** hydraulic fracturing well; off-center well; asymmetric fracture; Green function; multi-wing fracture

\* 收稿日期: 2022-12-20; 修订日期: 2023-03-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(42162015); 甘肃省科技计划项目(23YFGM001; 22JR11RM169)

作者简介: 姬安召(1983—), 男, 副教授(E-mail: jianzhao\_831024@163.com).

引用格式: 姬安召. 多翼裂缝压裂偏心井半解析模型及其渗流特征[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(10): 1200-1212.

## 0 引 言

致密储层流体的渗流机理复杂,属于非常规储层.这些致密储层,若有天然裂缝提供渗流通道,则可形成一定产能;若无天然裂缝,一般开采都需要进行人工压裂.储层压裂后形成裂缝网络,这些裂缝网络为流体的流动提供主要的渗流通道<sup>[1-6]</sup>.地层条件的复杂性导致水力压裂裂缝与井筒不对称,甚至有些井也不一定位于储层的中心位置,因此研究复杂裂缝偏心井的渗流规律对单井的生产动态预测有着重要意义.

许多学者对水力压裂垂直裂缝井的不稳定渗流理论进行了研究.Cinco-Ley 等<sup>[7]</sup>首先提出了水力压裂裂缝的数学模型与裂缝面源解的耦合方法,然后 Huang 等<sup>[8]</sup>和 Wang 等<sup>[9-10]</sup>借助数值模拟方法获取了生产时间与井底压力之间的关系,并提出了垂直裂缝井的数值模拟模型,上述模型假设裂缝与井筒对称,这与实际压裂井的情况差异较大.在实际压裂过程中,由于地应力场复杂,可能形成不对称裂缝.在水力压裂不对称垂直裂缝井的渗流规律研究方面,很多学者也做了相关的研究.首先 Crawford 和 Landrum<sup>[11]</sup>介绍了裂缝的不对称性.Bennett 等<sup>[12]</sup>借助数值模拟技术讨论了井在储层中心位置时不对称垂直裂缝单井产量递减的影响因素.Berumen 等<sup>[13]</sup>和 Narasimhan 等<sup>[14]</sup>采用数值模拟技术分析了定产量生产时不对称垂直裂缝中心井的井底压力变化规律.数值模拟技术求解的缺点是效率低,裂缝附近网格划分要求精度高.因此,一些学者引入了解析与半解析相结合的方法来获得井底压力.Rodriguez 等<sup>[15]</sup>和 Tiab 等<sup>[16]</sup>首先建立了水力压裂不对称垂直裂缝中心井的数学模型,但上述数学模型仅给出了水力压裂裂缝的压力解.为耦合实际储层的面源解与水力压裂裂缝模型,Wang 等<sup>[17-19]</sup>借助 Green 函数方法,分析了单条不对称垂直裂缝中心井的井底压力与产量的变化关系.Zhao 等<sup>[20]</sup>提出了 Green 函数与有限元、边界元等方法相结合,分析了不对称裂缝压裂井的井底压力与产量的变化关系.虽然这些学者对不对称裂缝压裂井的井底压力以及产量的变化动态特征进行了大量研究,但上述这些模型假设井位于储层中心,是理想化模型.Rosa 等<sup>[21]</sup>提出了径向复合油藏对称垂直裂缝偏心井的分析模型.Deng 等<sup>[22]</sup>提出了非均质油藏双翼对称垂直裂缝偏心井的半解析模型,并分析了井底压力变化特征.文献[23]研究了双重介质复合油藏偏心井的渗流规律,文献[24]研究了双重介质低渗透油藏偏心压裂直井单条裂缝的渗流规律,上述这些模型假设裂缝与井筒对称.

为了研究多翼不对称裂缝偏心井的渗流规律,本文首先建立储层和水力压裂裂缝控制方程,并对控制方程进行求解;然后考虑非均匀流量,将裂缝离散为多个单元,通过压降叠加得到井底压力与时间的关系;最后分析了无因次导流能力、裂缝的不对称因子、无因次偏心距对井底压力变化和产量分布规律的影响.

## 1 物理模型与基本假设

储层由裂缝系统和基质系统组成.井不在储层的中心位置,水力压裂的裂缝关于井筒两侧的长度不等,储层、井位以及裂缝的几何模型如图 1 所示.

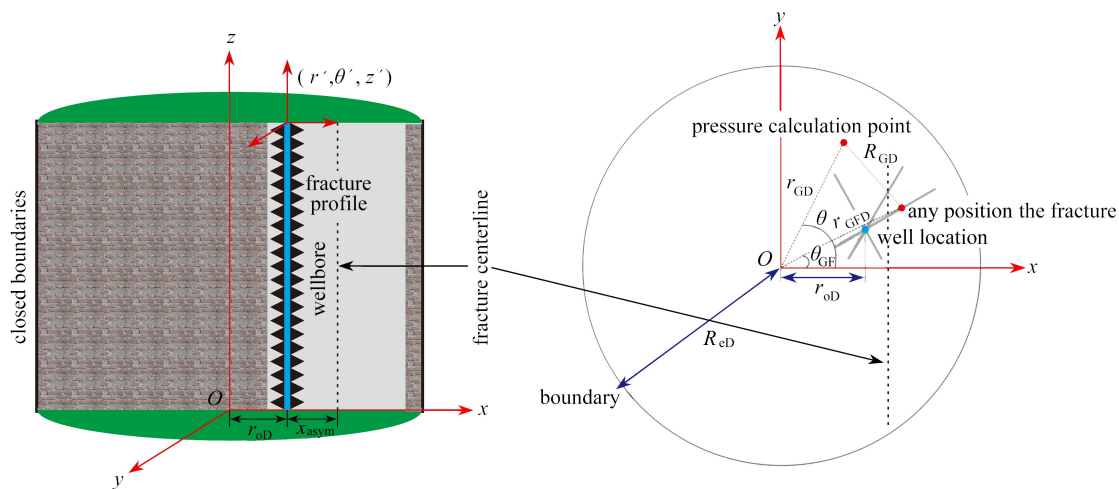


图 1 不对称裂缝压裂偏心直井的物理模型

Fig. 1 The physical model for the off-center vertical well with asymmetric fracture

模型建立与求解过程中的基本假设条件为:井以定产量  $q_{sc}$  生产;井到储层中心的距离为  $r_o$ , 即偏心距。裂缝与  $x$  轴的夹角为  $\theta_f$ , 井到裂缝中心的距离为  $x_{asym}$ , 流体在裂缝与储层的渗流均服从等温 Darcy 定律, 储层外边界封闭。符号说明和上下标含义见附录。

## 2 多翼裂缝偏心井的数学模型及其解

### 2.1 偏心井的线源解

点源函数法是求解复杂水力压裂单井压力分布的主要方法, 当井位于储层中心时, 可以通过点源函数的叠加原理, 得到中心井井底压力的线源解, 然后对线源解沿着裂缝方向进行积分, 可以得到无限导流垂直裂缝井压力的面源解, 这里只考虑了流体的径向流动。若井不在储层中心, 流体的流动不仅仅只是径向流动。因此, 在建立水力压裂偏心井数学模型前, 研究偏心井的线性源函数是一个非常重要的过程。假设偏心井的线源位于以储层为中心的全局坐标系  $(r', \theta', z')$  中。根据文献[25-26]的研究结果, 在 Laplace 空间柱坐标系中偏心井二维渗流无因次控制方程<sup>[27-28]</sup>可由式(1)表示:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial \bar{P}_{FD}}{\partial r_D} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial \bar{P}_{FD}}{\partial \theta} \right) - s \bar{P}_{FD} = \frac{2\pi L_{ref}^2}{L_F r_D} \delta(\theta - \theta') \delta(r - r'), \quad (1)$$

其中,  $\delta$  为 Dirac 函数, 无因次参数定义见附录。

控制方程(1)的解<sup>[29]</sup>可表示为

$$\bar{P}_{FD} = P + E, \quad (2)$$

其中,  $P$  是井位于储层中心的线源解, 在文献[30]中已给出, 该解容易获得; 选择  $E$  时,  $P + E$  应该满足控制方程的外边界条件, 并且在偏心井的位置处,  $E$  的贡献应该趋近于 0。根据文献[29]的研究结果, 中心井线源解表示如下:

$$P = \frac{\mu \bar{q}}{2\pi k_f h_D L_{ref}} [K_0(R_{GD} \sqrt{f(s)}) + D_0 I_0(R_{GD} \sqrt{f(s)})], \quad (3)$$

其中,  $R_{GD} = \sqrt{r_{GD}^2 + r_{GFD}^2 - 2r_{GD}r_{GFD}\cos(\theta - \theta_{GF})}$ ,  $R_{GD}$  表示在全局坐标系(以储层为中心的坐标系)中压降计算点到线源之间的距离。

根据 Bessel 函数加法定理<sup>[31]</sup>, 加法定理也可以根据 Bessel 的生成函数进行推导, Bessel 函数加法定理可表示为

$$I_0(aR_{GD}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n I_n(ar_{GD}) I_n(ar_{GFD}) \cos(n(\theta - \theta_{GF})), \quad (4)$$

$$K_0(aR_{GD}) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(ar_{GD}) K_n(ar_{GFD}) \cos(n(\theta - \theta_{GF})), & r_{GD} < r_{GFD}, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(ar_{GFD}) K_n(ar_{GD}) \cos(n(\theta - \theta_{GF})), & r_{GD} \geq r_{GFD}. \end{cases} \quad (5)$$

若压降的计算点在边界上时, 其距离比裂缝上的点距离储层中心的距离大, 因此展开式(3)时采用式(5)的第二部分表达式将其展开, 反之, 采用式(5)的第一部分表达式展开。将式(3)展开可表示为

$$P = \frac{1}{2s} \left[ I_0(ar_{GD}) K_0(ar_{GFD}) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(ar_{GD}) K_n(ar_{GFD}) \cos(n(\theta - \theta_{GF})) + \right. \\ \left. DI_0(ar_{GD}) I_0(ar_{GFD}) + 2D \sum_{n=1}^{\infty} I_n(ar_{GD}) I_n(ar_{GFD}) \cos(n(\theta - \theta_{GF})) \right] r_{GD} < r_{GFD}, \quad (6)$$

其中,  $a = \sqrt{s}$ 。根据式(3)和式(6), 当井不在储层中心时, 将式(6)中系数  $D$  变为变系数, 通过边界条件选择  $D$  使其满足外边界的控制条件, 并且当压力计算点趋近于点源时, 与系数  $D$  相关部分的值对产量的贡献值要趋近于 0, 这样既满足了井底定产条件, 又满足了外边界条件。因此其线源解可写成

$$\bar{P}_{FD} = \frac{1}{2s} \left[ I_0(ar_{GD}) K_0(ar_{GFD}) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(ar_{GD}) K_n(ar_{GFD}) \cos(n(\theta - \theta_{GF})) + \right.$$

$$D_0 I_0(ar_{GD}) I_0(ar_{GFD}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_n(ar_{GD}) I_n(ar_{GFD}) \cos(n(\theta - \theta_{GF})) \Big] r_{GD} < r_{GFD} \cdot \quad (7)$$

对于圆形封闭边界:

$$\left. \frac{\partial \bar{P}_{FD}}{\partial r_D} \right|_{r_D=R_{eD}} = 0. \quad (8)$$

对于圆形定压边界:

$$\bar{P}_{FD} \Big|_{r_D=R_{eD}} = 0. \quad (9)$$

将式(7)代入式(8)和式(9),解得圆形封闭边界和定压边界对应的系数  $D_n$ :

$$D_n = \begin{cases} -\frac{K'_n(aR_{eD})}{I'_n(aR_{eD})}, \\ -\frac{K_n(aR_{eD})}{I_n(aR_{eD})}, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (10)$$

考虑 Bessel 函数-导数关系,式(10)可表示为

$$D_n = \begin{cases} \frac{K_{n-1}(aR_{eD}) + K_{n+1}(aR_{eD})}{I_{n-1}(aR_{eD}) + I_{n+1}(aR_{eD})}, \\ -\frac{K_n(aR_{eD})}{I_n(aR_{eD})}, \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (11)$$

## 2.2 多翼裂缝偏心井面源函数

将式(11)代入式(7),考虑每条裂缝的流量为非均匀流量,将每条裂缝的流量变换到 Laplace 空间,并沿第  $i$  条裂缝方向对点源进行积分,得到第  $i$  条裂缝非均匀流量的面源解:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{FD(i)} = & \frac{1}{2} \int_{L_{FD(i)}} \bar{q}_{D(i)} \left[ I_0(ar_{GFD(i)}) K_0(ar_{GD(i)}) + \right. \\ & 2 \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(ar_{GFD(i)}) K_n(ar_{GD(i)}) \cos(n(\theta - \theta_{GF(i)})) + D_0 I_0(ar_{GD(i)}) I_0(ar_{GFD(i)}) + \\ & \left. 2 \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_n(ar_{GD(i)}) I_n(ar_{GFD(i)}) \cos(n(\theta - \theta_{GF(i)})) \right] dL_{FD(i)}, \quad r_{GFD(i)} < r_{GD(i)}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}_{FD(i)} = & \frac{1}{2} \int_{L_{FD(i)}} \bar{q}_{D(i)} \left[ I_0(ar_{GD(i)}) K_0(ar_{GFD(i)}) + \right. \\ & 2 \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(ar_{GD(i)}) K_n(ar_{GFD(i)}) \cos(n(\theta - \theta_{GF(i)})) + D_0 I_0(ar_{GD(i)}) I_0(ar_{GFD(i)}) + \\ & \left. 2 \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_n(ar_{GD(i)}) I_n(ar_{GFD(i)}) \cos(n(\theta - \theta_{GF(i)})) \right] dL_{FD(i)}, \quad r_{GFD(i)} > r_{GD(i)}. \end{aligned} \quad (13)$$

然而,直接积分等式(12)或(13)是非常困难的.根据图 1 的几何模型,可以得到压力计算点与压裂直井线源之间的位置关系,如图 1 所示.当井的位置与裂缝的几何形态确定后,计算点的压力只与裂缝上的压降生产点的位置有关.

根据图 1 井与裂缝的位置关系,借助正弦定理关系,则无因次半径、无因次偏心距以及裂缝与水平方向的夹角存在以下数学关系,可由式(14)表示:

$$r_{GFD(i)} = r_{oD} \frac{\sin \theta_{F(i)}}{\sin(\theta_{F(i)} - \theta_{GF(i)})}, \quad \theta_{F(i)} \neq 0, \pi. \quad (14)$$

式(12)积分方程中含有 Bessel 函数,其解析表达式非常复杂,根据文献[32]中处理裂缝的方法,对裂缝单元进行离散(图 2).每个离散裂缝单元可以看作一个计算对象,其流量为定值.结合质量守恒方程,可对压力方程和流量方程进行联立求解.将每条水力压裂裂缝划分为  $2N$  个单元,井眼左侧裂缝和井眼右侧裂缝的网格数均为  $N$ ,则在局部坐标系中裂缝网格端点的无因次半径可表示为

$$r_{\text{LFD}(i,j)} = \begin{cases} L_{\text{FD}(i),\text{left}} \frac{N-j+1}{N}, & 1 \leq j \leq N+1, \\ L_{\text{LFD}(i),\text{right}} \frac{j-N-1}{N}, & N+1 \leq j \leq 2N+1. \end{cases} \quad (15)$$

离散裂缝网格中点在局部坐标系中的半径可表示为

$$r_{\text{LMFD}(i,j)} = \frac{r_{\text{LFD}(i,j)} + r_{\text{LFD}(i,j+1)}}{2}, \quad 1 \leq j \leq 2N. \quad (16)$$

离散裂缝网格端点的坐标在全局坐标系中的半径与角度可表示为

$$\begin{cases} r_{\text{GFD}(i,j)} = \sqrt{r_{\text{oD}}^2 + r_{\text{LFD}(i,j)}^2 - 2r_{\text{oD}}r_{\text{LFD}(i,j)} \cos(\pi - \theta_{\text{F}(i)})}, \\ \theta_{\text{GF}(i,j)} = \tan^{-1} \frac{r_{\text{LFD}(i,j)} \sin \theta_{\text{F}(i)}}{r_{\text{oD}} + r_{\text{LFD}(i,j)} \cos \theta_{\text{F}(i)}}. \end{cases} \quad (17)$$

离散裂缝网格中点的坐标在全局坐标系中的半径和角度可表示为

$$\begin{cases} r_{\text{GMFD}(i,j)} = \sqrt{r_{\text{oD}}^2 + r_{\text{LMFD}(i,j)}^2 - 2r_{\text{oD}}r_{\text{LMFD}(i,j)} \cos(\pi - \theta_{\text{F}(i)})}, \\ \theta_{\text{GMF}(i,j)} = \tan^{-1} \frac{r_{\text{LMFD}(i,j)} \sin \theta_{\text{F}(i)}}{r_{\text{oD}} + r_{\text{LMFD}(i,j)} \cos \theta_{\text{F}(i)}}. \end{cases} \quad (18)$$

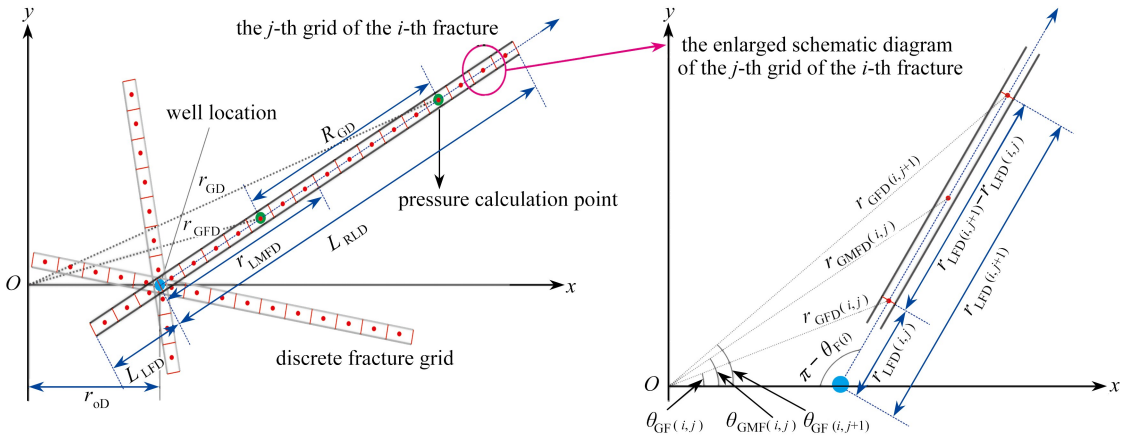


图2 裂缝单元离散方案

Fig. 2 The fracture element discretization scheme

根据图2裂缝单元的离散方案,结合式(12),若条件满足式(13),做同样的处理,则第*i*条裂缝第*j*个裂缝单元的无因次压力表示为

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\text{FD}(i,j)} = & \frac{1}{2} \int_{r_{\text{LFD}(i,j)}}^{r_{\text{LFD}(i,j+1)}} \bar{q}_{\text{D}(i,j)} \left[ I_0(ar_{\text{LMFD}(i,j)}) K_0(ar_{\text{LFD}}) + \right. \\ & 2 \sum_{n=1}^{+\infty} I_n(ar_{\text{LMFD}(i,j)}) K_n(ar_{\text{LFD}}) \cos(n(\theta_{\text{GMF}(i,j)} - \theta(r_{\text{LFD}}))) D_0 I_0(ar_{\text{LMFD}(i,j)}) I_0(ar_{\text{LFD}}) + \\ & \left. 2 \sum_{n=1}^{\infty} D_n I_n(ar_{\text{LMFD}(i,j)}) I_n(ar_{\text{LFD}}) \cos(n(\theta_{\text{GMF}(i,j)} - \theta(r_{\text{LFD}}))) \right] dr_{\text{LFD}}, \quad r_{\text{LMFD}(i,j)} < r_{\text{LFD}}. \quad (19) \end{aligned}$$

式(19)表示了当  $r_{\text{LMFD}(i,j)} < r_{\text{LFD}}$  时,第*i*条裂缝第*j*个裂缝单元压力的计算.对于  $r_{\text{LMFD}(i,j)} > r_{\text{LFD}}$  的情况,参照式(13)处理即可.在局部坐标系中裂缝单元中点  $r_{\text{LMFD}(i,j)}$  的值可由式(16)确定.式(19)中的积分的上下限分别由局部坐标系中裂缝单元的起点半径  $r_{\text{LFD}(i,j)}$  和终点半径  $r_{\text{LFD}(i,j+1)}$  表示,裂缝单元起点半径与终点半径可由式(15)确定.式(19)中的系数  $D_n$  含有全局坐标系中的参数无因次外边界半径,因此在积分式(19)时,既有局部坐标系的参数,也有全局坐标系的参数,为了参数的统一,可以通过式(17)和式(18)将局部坐标系中的参数转到全局坐标系中.但局部坐标系中的积分变量  $r_{\text{LFD}}$  转换到全局坐标系中积分变量  $r_{\text{GFD}}$  时,既可以用积分点在全局坐标系中的半径表示,又可以用角度表示.本文先将局部坐标系中的积分变量  $r_{\text{LFD}}$  转换到

全局坐标系中的积分变量  $r_{\text{GFD}}$ , 然后再根据极坐标系中半径与角度的微分关系, 再转换为对角积分. 通过上述分析, 将式 (19) 中的局部标系中的积分变量  $r_{\text{LFD}}$  转换到全局坐标系的积分变量  $r_{\text{GFD}}$  可由式 (20) 表示:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\text{FD}(i,j)} = & \frac{1}{2} \int_{r_{\text{GFD}(i,j)}}^{r_{\text{GFD}(i,j+1)}} \bar{q}_{\text{D}(i,j)} \left[ \text{I}_0(ar_{\text{GMFD}(i,j)}) \text{K}_0(ar_{\text{GFD}}) + \right. \\ & 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \text{I}_n(ar_{\text{GMFD}(i,j)}) \text{K}_n(ar_{\text{GFD}}) \cos(n(\theta_{\text{GMF}(i,j)} - \theta_{\text{GF}}(r_{\text{GFD}}))) + D_0 \text{I}_0(ar_{\text{GMFD}(i,j)}) \text{I}_0(ar_{\text{GFD}}) + \\ & \left. 2 \sum_{n=1}^{\infty} D_n \text{I}_n(ar_{\text{GMFD}(i,j)}) \text{I}_n(ar_{\text{GFD}}) \cos(n(\theta_{\text{GMF}(i,j)} - \theta_{\text{GF}}(r_{\text{GFD}}))) \right] dr_{\text{GFD}}, \quad r_{\text{GMFD}(i,j)} < r_{\text{GFD}}. \quad (20) \end{aligned}$$

式 (20) 表示出了全局坐标系中对半径积分的形式. 若裂缝与  $x$  轴的夹角为  $0^\circ$  或  $180^\circ$ , 则采用式 (20) 直接对全局坐标系中的半径积分即可, 否则, 将全局坐标系中对半径的积分形式转化为对角度的积分. 这里需要考虑极坐标系中弧长与角度的微分关系, 整理式 (20) 可得

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\text{FD}(i,j)} = & \frac{1}{2} \int_{\theta_{\text{GF}(i,j)}}^{\theta_{\text{GF}(i,j+1)}} C(\theta_{\text{GF}}) \bar{q}_{\text{D}(i,j)} \left[ \text{I}_0(ar_{\text{GMFD}(i,j)}) \text{K}_0(ar_{\text{GFD}}) + \right. \\ & 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \text{I}_n(ar_{\text{GMFD}(i,j)}) \text{K}_n(ar_{\text{GFD}}) \cos(n(\theta_{\text{GMF}(i,j)} - \theta_{\text{GF}})) + D_0 \text{I}_0(ar_{\text{GMFD}(i,j)}) \text{I}_0(ar_{\text{GFD}}) + \\ & \left. 2 \sum_{n=1}^{\infty} D_n \text{I}_n(ar_{\text{GMFD}(i,j)}) \text{I}_n(ar_{\text{GFD}}) \cos(n(\theta_{\text{GMF}(i,j)} - \theta_{\text{GF}})) \right] d\theta_{\text{GF}}, \quad r_{\text{GMFD}(i,j)} < r_{\text{GFD}}, \quad (21) \end{aligned}$$

其中,  $C(\theta_{\text{GD}}) = \frac{r_{\text{od}} \sin \theta_{\text{F}}}{(\sin(\theta_{\text{F}} - \theta_{\text{GF}}))^2}$ . 将第  $i$  条裂缝的所有裂缝单元的压降进行叠加, 可得第  $i$  条无限导流不对称裂缝偏心直井的井底压降, 可表示为

$$\bar{P}_{\text{FD}(i)} = \sum_{j=1}^{2N} \bar{P}_{\text{FD}(i,j)}. \quad (22)$$

### 2.3 裂缝模型与储层的耦合

裂缝的流体流动仅被视为线性流动. 水力裂缝的两翼长度不等. 裂缝两端无流体流动. 根据文献 [33-34] 的研究结果, 储层与第  $i$  条裂缝流动的耦合关系可表示为

$$\begin{aligned} \bar{P}_{\text{FD}(i)}(r_{\text{GFD}(i)}, s) = & \bar{P}_{\text{FD}(i), \text{avg}} + \frac{\pi}{C_{\text{FD}(i)}} \int_{-x_{\text{FD}(i)}}^{x_{\text{FD}(i)}} G_{(i)}(r', r_{\text{LFD}(i)}) \bar{q}_{\text{D}(i)}(r', s) dr' - \frac{2\pi}{s C_{\text{FD}(i)}} G_{(i)}(x_{\text{asymD}(i)}, r_{\text{LFD}(i)}), \quad (23) \end{aligned}$$

其中,  $\bar{P}_{\text{FD}(i), \text{avg}} = \frac{1}{2} \int_{-x_{\text{FD}(i)}}^{x_{\text{FD}(i)}} \bar{P}_{\text{FD}(i)}(r', s) dr'$ . 式 (23) 的左端项表示流体在裂缝中的流动部分, 右端表示无限导流储层流体流动部分. 将式 (23) 中裂缝的部分进行离散, 离散后可由线性方程组表示为

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{2N} \frac{1}{2} \int_{\theta_{\text{GF}(i,j)}}^{\theta_{\text{GF}(i,j+1)}} C(\theta_{\text{GF}}) \bar{q}_{\text{D}(i,j)} \left[ \text{I}_0(ar_{\text{GMFD}(i,j)}) \text{K}_0(ar_{\text{GFD}}) + \right. \\ & 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \text{I}_n(ar_{\text{GMFD}(i,j)}) \text{K}_n(ar_{\text{GFD}}) \cos(n(\theta_{\text{GMF}(i,j)} - \theta_{\text{GF}})) + D_0 \text{I}_0(ar_{\text{GMFD}(i,j)}) \text{I}_0(ar_{\text{GFD}}) + \\ & \left. 2 \sum_{n=1}^{\infty} D_n \text{I}_n(ar_{\text{GMFD}(i,j)}) \text{I}_n(ar_{\text{GFD}}) \cos(n(\theta_{\text{GMF}(i,j)} - \theta_{\text{GF}})) \right] d\theta_{\text{GF}} = \\ & \bar{P}_{\text{FD}, \text{avg}} + \sum_{i=1}^M \frac{\pi}{C_{\text{FD}(i)}} \sum_{j=1}^{2N} \bar{q}_{\text{D}(i,j)} \int_{r_{\text{LFD}(i,j)}}^{r_{\text{LFD}(i,j+1)}} G_{(i)}(r', r_{\text{LMFD}(i,j)}) dr' - \\ & \frac{2\pi}{s C_{\text{FD}(i)}} G_{(i)}(x_{\text{asymD}(i)}, r_{\text{LMFD}(i,j)}), \quad r_{\text{GMFD}(i,j)} < r_{\text{GFD}}, \quad (24) \end{aligned}$$

其中  $1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq 2N, \bar{P}_{\text{FD}, \text{avg}} = \sum_{i=1}^M \bar{P}_{\text{FD}(i), \text{avg}} / M$ .

根据流量的质量守恒定理<sup>[27]</sup>可得

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{2N} \tilde{q}_{D(i,j)} (r_{\text{LMFD}(i,j+1)} - r_{\text{LMFD}(i,j)}) = \frac{1}{s}. \quad (25)$$

裂缝单元单位长度的面流量  $\tilde{q}_{D(i,j)}$  与裂缝的平均压力  $\bar{P}_{\text{FD,avg}}$  可通过线性方程组(24)和(25)的联立求解得到.但井底压力不能直接计算出来.根据方程组(24)和(25)求解的裂缝单位长度面流量  $\tilde{q}_{D(i,j)}$  与裂缝的平均压力  $\bar{P}_{\text{FD,avg}}$  代入式(23)并且取  $r_{\text{LFD}(i)} = x_{\text{asymd}(i)}$ , 即可以得到有限导流不对称裂缝压裂偏心直井无量纲井底压力.

考虑表皮系数和井储系数,井底压力<sup>[35]</sup>的计算表达式可表示为

$$\bar{p}_{\text{wD}} = \frac{s\bar{P}_{\text{FD}} + S}{s + C_D s^2 (s\bar{P}_{\text{FD}} + S)}. \quad (26)$$

### 3 模型的验证与井底压力特征

#### 3.1 模型的验证

在进行井底压力与产量分析前,需要验证模型的准确性.本文借助油藏动态分析 KAPPA WORKSTATION 的数值试井分析软件 SAPHIR 模块,建立了柱坐标中单纯介质储层封闭边界不对称裂缝压裂偏心井的数值模型.数值试井计算时暂不考虑井储及表皮效应的影响,如图3所示.数值模型的基本参数如下:储层厚度为 10 m,储层渗透率为 18.42 mD ( $1 \text{ mD} = 9.87 \times 10^{-4} \mu\text{m}^2$ ),储层外边界半径为 2 000 m,偏心距为 1 200 m,储层的孔隙度为 10%,储层综合压缩系数为  $0.000 \text{ 1 MPa}^{-1}$ ,储层温度为  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ ,原油的体积系数为 1.02,井的产量为  $100 \text{ m}^3/\text{d}$ ,两条裂缝的导流能力均为  $9 \text{ 210 mD}\cdot\text{m}$ ,即每条裂缝的无因次导流能力为  $C_{\text{FD}} = 5$ ,第一条裂缝与水平方向的夹角为  $0^\circ$ ,裂缝的两翼等长,均为 100 m,第二条裂缝与水平方向的夹角为  $90^\circ$ ,裂缝的两翼长度不等,北向裂缝长度为 50 m,南向裂缝长度为 150 m.在解析计算时无因次井储系数为  $C_D = 0.000 \text{ 1}$ ,表皮系数为  $S = 0.01$ .裂缝与井的几何数值模型如图3的左图所示,裂缝几何形态如图3的右图所示.

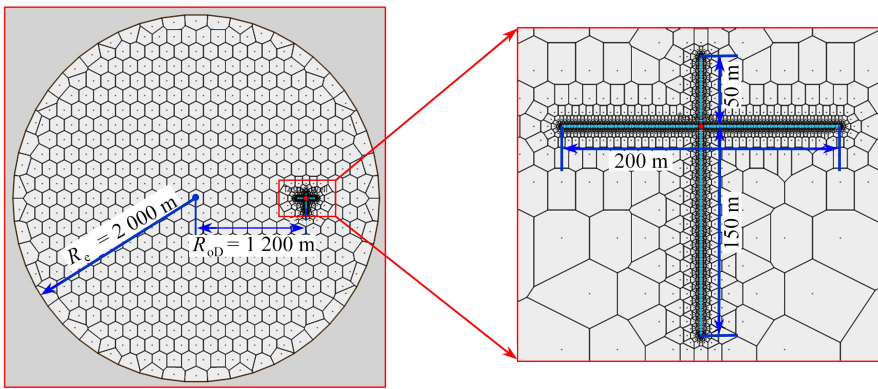


图3 压裂偏心井的数值物理模型

Fig. 3 The numerical physical model of the fractured off-center well

根据上述参数,本文借助油藏动态分析 KAPPA WORKSTATION 的数值试井分析软件 SAPHIR 模块,计算了无因次井底压力与无因次时间,同时也根据式(19)计算了半解析解的理论曲线,如图4所示.由图4可以看出,数值试井计算的结果与理论半解析解反演的结果一致.然后对井底压力变化特征进行了分析,主要划分为8个流动阶段,各阶段的井底压力导数曲线特征如图4所示.第一阶段为井储效应阶段,井底压力与压力导数曲线重合,且呈斜率为1的直线;第二阶段为表皮效应响应阶段,井底压力导数呈“驼峰”型;第三阶段为储层与裂缝的双线性流阶段,井底压力导数曲线呈斜率为1/4的直线;第四阶段为储层的线性流阶段,井底压力导数曲线呈斜率为1/2的直线;第五阶段为流体绕裂缝的椭圆流阶段,井底压力导数曲线呈斜率为0.36的直线,然后逐渐过渡到平面径向流;第六阶段为径向流阶段,井底压力导数曲线呈值为0.5的水平线;第七阶段为距离裂缝较近的封闭边界对井底压力响应阶段,井底压力导数曲线上翘;第八阶段为圆形

封闭外边界对井底压力的响应阶段,井底压力导数曲线呈斜率为 1 的直线,且与井底压力曲线重合。

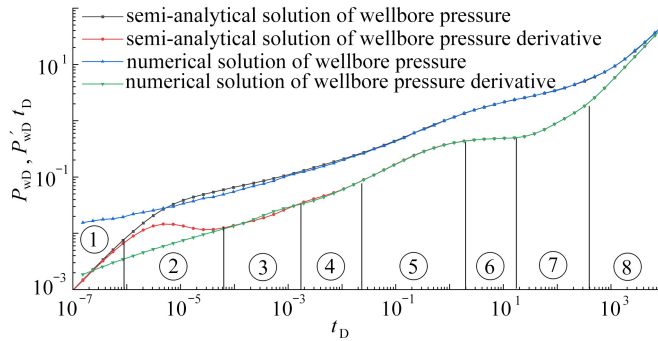


图 4 井底压力对比曲线

Fig. 4 Wellbore pressure comparison curves

### 3.2 结果分析

图 5 反映了不同裂缝导流能力下的无量纲井底压力、压力导数与无量纲时间之间的关系。其中无量纲井储系数  $C_D$  为  $10^{-4}$ ,表皮系数  $S$  为 0.01,两条裂缝的平均半长均为 100 m,第一条裂缝与水平方向的夹角为  $0^\circ$ ,裂缝的不对称因子  $x_{\text{asymD}}$  为 0.第二条裂缝与水平方向的夹角为  $90^\circ$ ,裂缝的不对称因子  $x_{\text{asymD}}$  为 0.5.外边界半径  $R_e$  为 2 000 m,偏心距  $r_o$  为 1 200 m.在线性和双线性状态下,无因次裂缝导流系数对井底压力以及压力导数曲线有明显影响。无因次裂缝导流能力越大,则渗流阻力越小。因此,无因次裂缝导流能力越大,则早期阶段无因次井底压力越小。

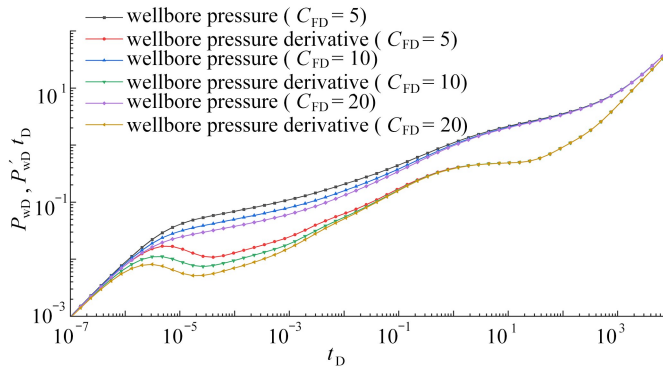


图 5 无因次裂缝导流能力对无因次井底压力、压力导数曲线的影响

Fig. 5 Effects of the dimensionless fracture conductivity on dimensionless bottom hole pressure and pressure derivative curves

图 6 反映了无因次裂缝的导流能力对无因次产量分布曲线的影响。其中水平方向裂缝(①和③号)的缝长均为 100 m,垂直方向裂缝(②和④号),②号裂缝的长度为 50 m,④号裂缝的长度为 100 m,其他计算参数与图 5 相同。从图 6 可以看出,裂缝的无因次导流能力对不对称裂缝偏心井的产量分布的影响较大。图 6 给出了裂缝无因次导流能力取值为 10 的 4 条裂缝和取值为 30 的 4 条裂缝无因次产量与无因次时间的关系。从图 6 可以看出:在不同裂缝导流能力情况下,③号裂缝对产量的贡献最大,因为③号裂缝距离储层中心的位置较近,流体的供给范围大;而②号裂缝对产量的贡献最小,因为②号裂缝长度只有其他裂缝长度的一半,在考虑均质基质的情况下,与裂缝连通的供给区域小,因此产量低。①号与④号裂缝对产量的贡献差距不大,但④号裂缝的无因次产量略低于①号裂缝,①号裂缝储层流体可补给的范围要大于④号裂缝。随着生产时间的增加,当到达一定时间后,各条裂缝的无因次产量保持稳定,无因次产量贡献基本保持不变。因此,在整个流动中,裂缝无因次导流能力越大,裂缝越长,则对产量的贡献越高。

图 7 反映了不同偏心距对无因次井底压力与压力导数曲线的影响。其中计算中的偏心距取值见图 7,其他计算参数与图 5 相同。当压力传播到边界时,偏心距对无因次井底压力与压力导数曲线具有明显的影响。井距储层中心的距离越大,则井以及裂缝距离储层边界的距离就越近,因此边界响应出现的时间就越早。偏



心距越大,相当于流体绕井及裂缝的径向流的区域变小,则径向流动持续时间变短.在径向流区域减小时,若要维持定产量生产,则需要更大的压降,因此边界响应段无因次井底压力与压力导数的值变大.

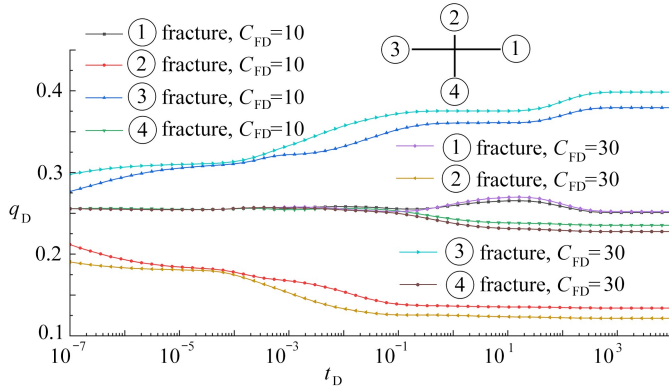


图6 裂缝无因次导流能力对无因次产量分布的影响

Fig. 6 Rate distribution curves influenced by the dimensionless conductivity of the fracture

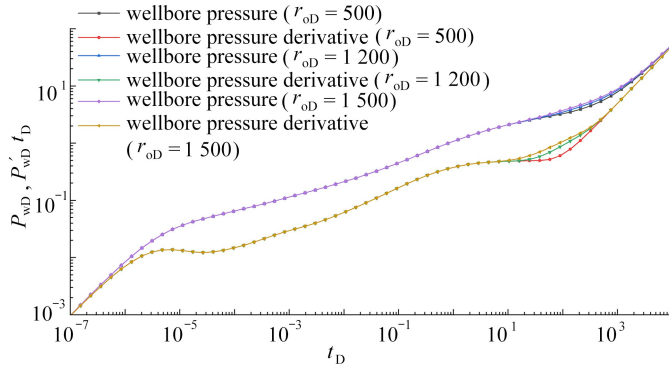


图7 不同偏心距对无因次井底压力与压力导数曲线的影响

Fig. 7 Pressure transient curves influenced by the distance between the wellbore and the reservoir center

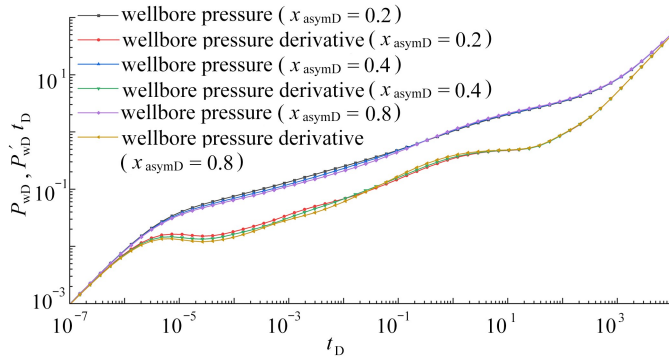


图8 不对称因子对无因次压力与压力导数曲线的影响

Fig. 8 Pressure transient curves influenced by the asymmetry factor

图8反映了不对称因子对无因次井底压力与压力导数曲线的影响.不对称因子取值见图8,其他计算参数与图5相同.裂缝的不对称因子越大,则表明裂缝的不对称性越明显.裂缝的不对称因子越大,则早期的压降越小,因为随着裂缝不对称性的增加,则裂缝两翼的长度差越大.在同等产量情况下,裂缝长翼一侧对产量的贡献起主导作用.随着裂缝长翼一侧长度的增加,其渗流阻力不断减小,因此在储层和裂缝双线性流阶段所消耗的压差减小.随着生产过程进行,在储层线性流阶段这种趋势在不断减弱,到平面径向流阶段之后,无因次井底压力与压力导数曲线重合.

## 4 结 论

1) 本文考虑不对称多翼裂缝压裂偏心井的渗流问题,建立了相应的物理模型与数学模型.根据点源理论和 Laplace 变换,得到了每条裂缝的压力分布.根据裂缝与储层中压力的耦合关系,得到了 Laplace 空间不对称多翼裂缝压裂偏心井的半解析解.

2) 根据非均匀流量的处理方法,将每条压裂裂缝离散为  $2N$  段.结合流量的质量守恒方程,对每个离散裂缝单元的流量及裂缝的平均压力进行联立求解,再结合 Stehfest 数值反演方法,得到了时间空间下压力的解析解.应用 KAPPA WORKSTATION 的数值试井分析软件 SAPHIR 模块的数值解验证了解析解的正确性.

3) 根据井底压力及压力导数曲线的响应特征,可将多翼裂缝压裂偏心井的渗流过程划分为 8 个阶段:井储效应响应阶段、表皮效应响应阶段、储层与裂缝的双线性流响应阶段、储层的线性流响应阶段、流体绕裂缝的椭圆流响应阶段、径向流响应阶段、距离裂缝较近的封闭边界对井底压力响应阶段以及圆形封闭外边界对井底压力的响应阶段.

4) 分析了无因次裂缝导流系数、偏心距以及裂缝不对称因子对井底压力和产量分布曲线的影响,结果表明,在线性和双线性阶段,无因次导流系数越大,井底压力与压力导数曲线越低;无因次导流系数越大,裂缝越长,对产量的贡献越大,当到达平面径向流阶段之后,裂缝的无因次导流系数与裂缝的长度对产量的相对分布基本没有影响;在平面径向流之前,偏心距对井底压力与压力导数曲线没有影响,当压力波传到距边界较近一侧封闭边界时,井底压力与压力导数曲线上翘,偏心距越大,曲线出现上翘的时间越早;裂缝的不对称因子只影响裂缝与储层的线性流与双线性流阶段,裂缝的不对称因子越大,则线性流与双线性流阶段的压降越小.

## 附 录

符号说明如下:

$B$  表示储层流体的体积系数,无量纲;  $C_D$  表示无因次井储系数,无量纲;  $C_{FD}$  表示裂缝的无因次导流系数,无量纲;  $C_{im}$  表示基质的综合压缩系数,  $\text{Pa}^{-1}$ ;  $C_{if}$  表示裂缝的综合压缩系数,  $\text{Pa}^{-1}$ ;  $G$  表示 Green 函数;  $h$  表示储层厚度,  $\text{m}$ ;  $I_n$  表示第一类  $n$  阶修正 Bessel 函数;  $I'_n$  表示第一类  $n$  阶修正 Bessel 函数的导数;  $k$  表示渗透率,  $\text{m}^2$ ;  $K_n$  表示第二类  $n$  阶修正 Bessel 函数;  $K'_n$  表示第二类  $n$  阶修正 Bessel 函数的导数;  $L_f$  表示裂缝的长度,  $\text{m}$ ;  $N$  表示每条裂缝的网格数;  $M$  表示裂缝的总个数;  $P_i$  表示储层原始地层压力,  $\text{Pa}$ ;  $P$  表示储层流体的压力,  $\text{Pa}$ ;  $q$  表示产量,  $\text{m}^3/\text{d}$ ;  $r$  表示柱坐标系中  $r$  方向的位置,  $\text{m}$ ;  $r_o$  表示偏心距,  $\text{m}$ ;  $R_e$  表示储层的外边界半径,  $\text{m}$ ;  $S$  表示表皮系数,无因次;  $s$  表示 Laplace 变量,无量纲;  $t$  表示生产时间,  $\text{d}$ ;  $w_f$  表示裂缝宽度,  $\text{m}$ ;  $x_{\text{asym}}$  表示井相对于裂缝中心距离,  $\text{m}$ ;  $\theta_f$  表示局部坐标系中裂缝与  $x$  轴方向的夹角,  $\text{rad}$ ;  $\phi_f$  表示裂缝孔隙度,无量纲;  $\phi_m$  表示基质孔隙度,无量纲;  $\mu$  表示储层流体黏度,  $\text{mPa}\cdot\text{s}$ .

下标含义如下:

$i$  表示第  $i$  条裂缝;  $j$  表示第  $j$  个网格;  $F$  表示裂缝;  $D$  表示无因次;  $L$  表示局部坐标系;  $G$  表示全局坐标系;  $M$  表示网格中点;  $wD$  表示井底无量纲压力;  $eD$  表示外边界无量纲半径;  $n$  表示 Bessel 函数阶数;  $oD$  表示无因次偏心距离;  $\text{avg}$  表示平均压降;  $\text{asymD}$  表示无因次不对称因子;  $\text{ref}$  表示参考长度;  $\text{right}$  表示右侧;  $\text{left}$  表示左侧;  $\text{sc}$  表示标准状况.

上标定义如下:

上标“-”表示 Laplace 空间;上标“~”表示单位长度流量.

无量纲参数的定义如下:

无因次拟压力为

$$\bar{P}_{FD} = \frac{2\pi k_f h}{q_{sc} \mu B} (P_i - P_F).$$

无因次距离为

$$x_D = \frac{x}{L_{\text{ref}}}, y_D = \frac{y}{L_{\text{ref}}}.$$

无因次井的位置为

$$x_{wD} = \frac{x_w}{L_{\text{ref}}}, y_{wD} = \frac{y_w}{L_{\text{ref}}}.$$

无因次时间为

$$t_D = \frac{k}{(\phi_f C_{if} + \phi_m C_{im}) \mu L_{ref}^2} t.$$

无因次裂缝长度为

$$L_{FD} = \frac{L_F}{L_{ref}}.$$

无因次外边界半径为

$$R_{eD} = \frac{R_c}{L_{ref}}.$$

无因次不对称因子为

$$x_{asymD} = \frac{x_{asym}}{L_{ref}}.$$

无因次偏心距为

$$r_{oD} = \frac{r_o}{L_{ref}}.$$

无因次裂缝的导流能力为

$$C_{FD} = \frac{k_F w_F}{k L_{ref}}.$$

无因次裂缝的面流量为

$$\tilde{q}_D = \frac{\tilde{q} L_{ref}}{q_{sc}}.$$

参考文献 (References):

- [1] 郭旭升, 蔡勋育, 刘金连, 等. 中国石化“十三五”天然气勘探进展与前景展望[J]. 天然气工业, 2021, **41**(8): 12-22. (GUO Xusheng, CAI Xunyu, LIU Jinlian, et al. Natural gas exploration progress of SINOPEC during the 13th Five-Year Plan and prospect forecast during the 14th Five-Year Plan[J]. *Natural Gas Industry*, 2021, **41**(8): 12-22. (in Chinese))
- [2] 何江川, 余浩杰, 何光怀, 等. 鄂尔多斯盆地长庆气区天然气开发前景[J]. 天然气工业, 2021, **41**(8): 23-33. (HE Jiangchuan, YU Haojie, HE Guanghuai, et al. Natural gas development prospect in Changqing gas province of the Ordos Basin[J]. *Natural Gas Industry*, 2021, **41**(8): 23-33. (in Chinese))
- [3] 马新华. 非常规天然气“极限动用”开发理论与实践[J]. 石油勘探与开发, 2021, **48**(2): 326-336. (MA Xinhua. “Extreme utilization” development theory of unconventional natural gas[J]. *Petroleum Exploration and Development*, 2021, **48**(2): 326-336. (in Chinese))
- [4] 王继平, 张城玮, 李建阳, 等. 苏里格气田致密砂岩气藏开发认识与稳产建议[J]. 天然气工业, 2021, **41**(2): 100-110. (WANG Jiping, ZHANG Chengwei, LI Jianyang, et al. Tight sandstone gas reservoirs in the Sulige Gas Field: development understandings and stable-production proposals [J]. *Natural Gas Industry*, 2021, **41**(2): 100-110. (in Chinese))
- [5] 贾爱林, 何东博, 位云生, 等. 未来十五年中国天然气发展趋势预测[J]. 天然气地球科学, 2021, **32**(1): 17-27. (JIA Ailin, HE Dongbo, WEI Yunsheng, et al. Predictions on natural gas development trend in China for the next fifteen years[J]. *Natural Gas Geoscience*, 2021, **32**(1): 17-27. (in Chinese))
- [6] 欧阳伟平, 孙贺东, 张冕. 考虑应力敏感的致密气多级压裂水平井试井分析[J]. 石油学报, 2018, **39**(5): 570-577. (OUYANG Weiping, SUN Hedong, ZHANG Mian. Well test analysis for multistage fractured horizontal wells in tight gas reservoir considering stress sensitivity[J]. *Acta Petrolei Sinica*, 2018, **39**(5): 570-577. (in Chinese))
- [7] CINCO-LEY H, MENG H Z. Pressure transient analysis of wells with finite conductivity vertical fractures in double porosity reservoirs[C]//*SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Houston, Texas, 1988.
- [8] HUANG T, GUO X, CHEN F. Modeling transient pressure behavior of a fractured well for shale gas reservoirs based on the properties of nanopores[J]. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 2015, **23**(1):

- 387-398.
- [9] WANG L, WANG X, DING X, et al. Rate decline curves analysis of a vertical fractured well with fracture face damage[J]. *Journal of Energy Resources Technology*, 2012, **134**(3): 1-9.
- [10] WANG L, WANG X. Type curves analysis for asymmetrically fractured wells[J]. *Journal of Energy Resources Technology*, 2014, **136**(2): 1-8.
- [11] CRAWFORD P B, LANDRUM B L. Effect of unsymmetrical vertical fractures on production capacity[J]. *American Invitational Mathematics Examination*, 1955, **204**(1): 251-254.
- [12] BENNETT C O, ROSATO N D, REYNOLDS A C, et al. Influence of fracture heterogeneity and wing length on the response of vertically fractured wells[J]. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1983, **23**(2): 219-230.
- [13] BERUMEN S, TIAB D, RODRIGUEZ F. Constant rate solutions for a fractured well with an asymmetric fracture[J]. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2000, **25**(1): 49-58.
- [14] NARASIMHAN T N, PALEN W A. A purely numerical approach for analyzing fluid flow to a well intercepting a vertical fracture[C]//*SPE California Regional Meeting*. Ventura, California, 1979.
- [15] RODRIGUEZ F, CINCO-LEY H, SAMANIEGO-V F. Evaluation of fracture asymmetry of finite-conductivity fracturedwells[J]. *SPE Production Engineering*, 1992, **7**(2): 233-239.
- [16] TIAB D, LU J, NGUYEN H, et al. Evaluation of fracture asymmetry of finite-conductivity fracturedwells[J]. *Journal of Energy Resources Technology*, 2010, **132**(1): 012901.
- [17] WANG L, WANG X, LI J, et al. Simulation of pressure transient behavior for asymmetrically finite-conductivity fractured wells in coal reservoirs[J]. *Transport in Porous Media*, 2013, **97**(3): 353-372.
- [18] WANG L, XUE L. A Laplace-transform boundary element model for pumping tests in irregularly shaped double-porosity aquifers[J]. *Journal of Hydrology*, 2018, **567**(1): 712-720.
- [19] WANG L, DAI C, LI X, et al. Pressure transient analysis for asymmetrically fractured wells in dual-permeability organic compound reservoir of hydrogen and carbon[J]. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2019, **44**(11): 5254-5261.
- [20] ZHAO Y, SHAN B, ZHANG L. Pressure dynamics of asymmetrically fractured wells in an arbitrarily shaped reservoir[J]. *Journal of Hydrodynamics*, 2019, **31**(4): 767-777.
- [21] ROSA A J, MAGALHAES A A C, HORNE R N. Pressure transient behavior in reservoirs with an internal circular discontinuity[J]. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1996, **1**(1): 83-92.
- [22] DENG Q, NIE R, JIA Y, et al. Pressure transient behavior of a fractured well in multi-region composite reservoirs[J]. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2017, **158**(1): 535-553.
- [23] 姜瑞忠, 郜益华, 孙召勃, 等. 双重介质复合油藏偏心井试井分析[J]. *新疆石油地质*, 2016, **37**(3): 327-331. (JIANG Ruizhong, GAO Yihua, SUN Zhaobo, et al. Off-center well test analysis for composite dual-porosity reservoirs[J]. *Xinjiang Petroleum Geology*, 2016, **37**(3): 327-331. (in Chinese))
- [24] 姜瑞忠, 高岳, 孙召勃, 等. 双重介质低渗油藏偏心压裂直井井底压力特征[J]. *断块油气田*, 2020, **27**(6): 778-783. (JIANG Ruizhong, GAO Yue, SUN Zhaobo, et al. Bottom pressure characteristics for eccentric fracture vertical well in dual-medium low-permeability reservoir[J]. *Fault-Block Oil and Gas Field*, 2020, **27**(6): 778-783. (in Chinese))
- [25] OZKAN E, RAGHAVAN R. New solutions for well-test-analysis problems, part III: additional algorithms [C]//*SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. New Orleans, Louisiana, 1994.
- [26] OZKAN E, RAGHAVAN R. New solutions for well-test-analysis problems, part I: analytical considerations [J]. *SPE Formation Evaluation*, 1991, **6**(3): 359-368.
- [27] XU Y, LI X, LIU Q. Pressure performance of multi-stage fractured horizontal well with stimulated reservoir volume and irregular fractures distribution in shale gas reservoirs[J]. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 2020, **77**: 103209.
- [28] GUO J, WANG H, ZHANG L. Transient pressure and production dynamics of multi-stage fractured horizontal wells in shale gas reservoirs with stimulated reservoir volume[J]. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 2016, **35**(4): 425-443.
- [29] CARSLAW H S, JAEGER J C. *Conduction of Heat in Solids*[M]. 2nd ed. London: Oxford University Press,

- 1959.
- [30] PEACEMAN D W. Interpretation of wellblock pressures in numerical reservoir simulation part 3: off-center and multiple wells within a wellblock[J]. *SPE Reservoir Engineering*, 1990, **5**(2): 227-232.
- [31] ZHAO Y, ZHANG L, FENG G, et al. Performance analysis of fractured wells with stimulated reservoir volume in coal seam reservoirs[J]. *Oil and Gas Science and Technology*, 2016, **71**(1): 1-8.
- [32] CHEN Z, LIAO X, ZHAO X, et al. A semi-analytical mathematical model for transient pressure behavior of multiple fractured vertical well in coal reservoirs incorporating with diffusion, adsorption, and stress-sensitivity[J]. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 2016, **29**(1): 570-582.
- [33] 姬安召, 王玉凤, 张光生. 不对称裂缝单井渗流模型的 Green 函数构造方法[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(4): 424-434.(JI Anzhao, WANG Yufeng, ZHANG Guangsheng. A Green's function construction method of the single well seepage model for asymmetric fractures[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(4): 424-434.(in Chinese))
- [34] 刘启国, 徐有杰, 刘义成, 等. 夹角断层多段压裂水平井试井求解新方法[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(5): 558-567.(LIU Qiguo, XU Youjie, LIU Yicheng, et al. A new well test analysis method for multi-stage fractured horizontal wells with angle faults[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(5): 558-567.(in Chinese))
- [35] VAN EVERDINGENA F, HURST W. The application of the Laplace transformation to flow problems in reservoirs[J]. *Journal of Petroleum Technology*, 1949, **1**(12): 305-324.