http://www.applmathmech.cn

非 Lipschitz 条件下高维 McKean-Vlasov 随机微分方程解的存在唯一性*

马　丽[1,2]，　孙芳芳[1]

(1. 海南师范大学 数学与统计学院，海口 571158；
2. 海南师范大学 数据科学与智慧教育教育部重点实验室，海口 571158)

摘要： 研究了一类漂移系数不连续的高维 McKean-Vlasov 随机微分方程及相应的粒子系统解的存在唯一性.在漂移系数关于空间变量逐段 Lipschitz 连续的条件下，首先利用 Zvonkin 变换将方程转换为漂移系数为 Lipschitz 连续的 McKean-Vlasov 随机微分方程，变换后的方程存在唯一解.然后由变换函数的性质可得逆函数的存在性和 Lipschitz 连续性.最后由 Itô 公式及逆函数的性质可得原来的 McKean-Vlasov 随机微分方程及相应的粒子系统解的存在唯一性.

关　键　词： 高维 McKean-Vlasov 随机微分方程；　粒子系统；　逐段 Lipschitz 连续；　Zvonkin 变换；　解的存在唯一性

中图分类号： O211.63　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.440010

Existence and Uniqueness of the Solutions to High-Dimensional McKean-Vlasov SDEs Under Non-Lipschitz Conditions

MA Li[1,2],　SUN Fangfang[1]

(1. *School of Mathematics and Statistics*, *Hainan Normal University*, *Haikou* 571158, *P.R.China*;
2. *Key Laboratory of Data Science and Smart Education*, *Ministry of Education*, *Hainan Normal University*, *Haikou* 571158, *P.R.China*)

Abstract: The existence and uniqueness of the solutions to high-dimensional McKean-Vlasov stochastic differential equations with discontinuous drift coefficients and corresponding particle systems, were investigated. With the drift coefficient being piecewise Lipschitz continuous about the space variable, through Zvonkin's transformation, the original equation was converted into a new McKean-Vlasov stochastic differential equation with Lipschitz continuous coefficients. Therefore, the new equation has a unique solution. Moreover, the existence and Lipschitz continuity of the inverse function were proven according to the transformation function characteristics. Finally, based on the Itô's formula and the inverse function characteristics, the existence and uniqueness of the solutions to the McKean-Vlasov stochastic differential equation and the corresponding particle

* **收稿日期：** 2023-01-10；**修订日期：** 2023-03-11
基金项目： 国家自然科学基金(地区科学基金)项目(11861029);海南省高层次人才项目(120RC589)
作者简介： 马丽(1979—),女,副教授,博士(E-mail：malihnsd@163.com)；
孙芳芳(1998—),女,硕士生(通讯作者. E-mail：sunff1207@163.com).
引用格式： 马丽，孙芳芳. 非 Lipschitz 条件下高维 McKean-Vlasov 随机微分方程解的存在唯一性[J]. 应用数学和力学，2023，**44**(10)：1272-1290.

system were obtained.

Key words：high-dimensional McKean-Vlasov stochastic differential equation；particle system；piecewise Lipschitz continuity；Zvonkin's transformation；the existence and uniqueness of the solution

0 引　言

设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是完备的概率空间，$(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 是其上一个满足通常条件的 σ- 代数流. $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 是 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 上概率测度组成的集合，$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ 上的拓扑为弱收敛的拓扑. 考虑 $\mathbb{R}^d$ 上 McKean-Vlasov 随机微分方程(也称为分布依赖的随机微分方程)：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{X}_t,\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}_t})\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X}_t,\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}_t})\,\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,\ \boldsymbol{X}_0 = \boldsymbol{\xi} \in L_0^p(\mathbb{R}^d), \tag{1}$$

其中，T 为正常数，$\boldsymbol{b}:[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^d$ 和 $\boldsymbol{\sigma}:[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^{d\times d}$ 都是 Borel 可测函数，$\boldsymbol{W}(t)$ 是带流的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, P)$ 上一个 d 维标准 Brown 运动，$\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}_t}$ 为 $\boldsymbol{X}_t$ 在时刻 t 处的边缘分布. 对 $p\geqslant 2$，$L_0^p(\mathbb{R}^d)$ 是 $\mathbb{R}^d$- 值 $\mathcal{F}_0$- 可测的 p 阶矩有限的随机变量做成的空间.

当系数不依赖于分布和时间且漂移系数 b 不连续时，文献[1]考虑了一维随机微分方程，在漂移系数 b 逐段 Lipschitz 连续，扩散系数 σ Lipschitz 连续的条件下，得到了解的存在唯一性及 Euler-Maruyama(EM)数值解. 文献[2]考虑了高维随机微分方程，当漂移系数 $\boldsymbol{b}$ 满足逐段 Lipschitz 连续，扩散系数 $\boldsymbol{\sigma}$ 满足 Lipschitz 连续时，利用 Zvonkin 变换消除了漂移系数的不连续性，通过逆变换得到了解的存在唯一性，并对转换后的方程的 EM 数值解用逆变换，从而得到原来方程的 EM 数值解及其强收敛的速度. 文献[3-5]研究了几类随机微分方程解的渐近性和稳定性等问题.

当 $\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 和 $\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 不依赖于 t 且关于 $(\boldsymbol{x},\mu)$ 是 Lipschitz 连续的，文献[6]得到了方程(1)的强解的存在唯一性，还给出了当系数不是 Lipschitz 连续时解不唯一的例子. 非 Lipschitz 条件下，McKean-Vlasov 随机微分方程解的存在唯一性的研究成果也很丰富. 当漂移系数 $b(x,\mu)$ 关于 x 逐段 Lipschitz 连续、关于 μ 是 Lipschitz 连续，扩散系数 $\sigma(x)$ 为 Lipschitz 连续时，文献[7]得到了一维 McKean-Vlasov 随机微分方程及其对应的粒子系统解的存在唯一性及 EM 数值解. 当 $\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 和 $\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 可积、关于 μ 为 Lipschitz 连续且 $\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 非退化时，文献[8]利用 Zvonkin 变换，通过偏微分方程解的正则性得到了强解和弱解的存在性，再由逐轨道唯一性得到了强解和弱解唯一性. 当 $\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 奇异、关于 μ 在弱拓扑及全变差距离下可能不连续、被一个分布的线性项与一个关于 $(t,\boldsymbol{x})$ 局部可积的项的乘积控制，$\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 有界非退化且关于 (t,μ) 为 Lipschitz 连续时，文献[9]得到了弱解的存在唯一性. 当 $\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 关于 $(\boldsymbol{x},\mu)$ 是 Lipschitz 连续，$\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 连续且关于 $\boldsymbol{x}$ 满足单调条件，$\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{0},\mu)$ 关于 μ 满足增长条件时，文献[10]得到了强解的存在唯一性、指数压缩性和 Harnack 不等式. 当 $\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 可测有界且关于 $(\boldsymbol{x},\mu)$ 为 Hölder 连续，$\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 非退化且关于 $(\boldsymbol{x},\mu)$ 为 Lipschitz 连续时，文献[11]得到了强解的存在唯一性. 当 $\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 由一个局部可积项和一个关于 $\boldsymbol{x}$ 是超线性增长的、关于 μ 在带权重的变差距离下是 Lipchitz 连续的项构成时，$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x})$ 及其逆矩阵一致有界、关于 $\boldsymbol{x}$ 是 Lipschitz 连续时，文献[12]得到了强解的存在唯一性. 当 $\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 是一致非退化的，$\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 满足某些可积性条件且关于 μ 在全变差距离下连续时，文献[13]得到了弱解的存在性. 当系数连续且无界(不一定非退化)时，文献[14]在可积的 Lyapunov 条件下，得到了定义在多维空间一个区域上的分布依赖的随机微分方程弱解的存在性. 从以上文献可知，对高维的 McKean-Vlasov 随机微分方程，当系数依赖于 $(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 且 $\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 不连续时，我们需要 $\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 是非退化的，从而得到强解的存在唯一性.

本文考虑系数依赖于时间且漂移系数不连续的高维 McKean-Vlasov 随机微分方程(1)，得到了 $\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 仅仅是逐段 Lipschitz 连续，$\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 不一定是非退化时，McKean-Vlasov 随机微分方程(1)及其对应的交互作用的粒子系统强解的存在唯一性，从而拓展了文献[1-2,7]的结果. 特别地，与文献[7]相比，本文考虑的是高维的情形，且 $\boldsymbol{\sigma}$ 可以依赖于时间和分布. 一维情形下，$b(t,x,\mu)$ 的不连续集，比较简单，变换函数的逆函数有也显式表达，从而易得逆函数的 Lipschitz 连续性. 高维情形下，变换函数的逆函数不再有显式表

达,不连续的区域也更复杂,变换函数及其逆函数的性质不像一维情形那么容易得到.本文借助多元函数的反函数存在定理,得到了该逆函数的存在性及相应的性质,从而得到了变换函数是微分同胚的.

本文主要内容安排如下:第 1 节,给出了基本的概念、变换函数的定义及性质.第 2 节,分别证明了漂移系数可分解和不可分解的情况下,McKean-Vlasov 随机微分方程及其对应的交互作用的粒子系统解的存在唯一性.第 3 节为本文的结论.

1 预备知识

1.1 定义和假设

设 $\mathbb{R}^d$ 表示 $d(d\geqslant 1)$ 维欧氏空间,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示内积,$|\cdot|=\langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}$.对 $p\geqslant 2$,设 $\mathcal{S}^p([0,T])$ 是 $[0,T]$ 上 p 阶矩有限的 $\mathbb{R}^d$- 值 $\mathcal{F}$- 适应过程 $\boldsymbol{X}_t$ 做成的集合,即过程 $(\boldsymbol{X}_t)_{t\in[0,T]}$ 满足 $\mathcal{E}[\sup_{t\in[0,T]}|\boldsymbol{X}_t|^p]<\infty$.设 $\theta>0$,$\mathcal{P}_\theta(\mathbb{R}^d)=\left\{\mu\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)\;\middle|\;\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{x}|^\theta\mu(\mathrm{d}\boldsymbol{x})<\infty\right\}$.对任意的 $\mu,\nu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,定义如下标准的 Wasserstein 距离:

$$\mathcal{W}_2(\mu,\nu)=\left(\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2\pi(\mathrm{d}\boldsymbol{x},\mathrm{d}\boldsymbol{y})\right)^{1/2},$$

其中,$\Pi(\mu,\nu)=\{\boldsymbol{\pi}:\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\mid\boldsymbol{\pi}(\mu,\nu)(A,\mathbb{R}^d)=\mu(A),\ \boldsymbol{\pi}(\mu,\nu)(\mathbb{R}^d,A)=\nu(A),\ \forall A\in\mathcal{B}(R^d)\}$ 表示测度 μ 和 ν 的耦合测度 $\boldsymbol{\pi}$ 做成的集合.设 Θ 是一个正可达的 C^3 超曲面,即存在 $\varepsilon>0$,使得 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=\arg\min_{y\in\Theta}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 在管状邻域 $\Theta^\varepsilon=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\mid\inf_{y\in\Theta}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|<\varepsilon\}$ 上是 C^3 单值函数族,且 Θ 的每个单位外法向量 $\boldsymbol{n}$ 都有有界的二阶和三阶导数.如果上述 ε 存在,则称集合 $\{\varepsilon\mid\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 在 Θ^ε 上为 C^3 单值函数族$\}$ 的上确界为 Θ 的可达距离,记作 $\mathrm{Reach}(\Theta)$,易知 $\boldsymbol{p}:\Theta^\varepsilon\to\Theta$ 且当 $\boldsymbol{x}\in\Theta$ 时 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$.$\mathrm{supp}(\mu)$ 表示 μ 的支撑.

定义 1(文献[2]中 definition 3.1、definition 3.2 和 definition 3.4) 设 $A\subseteq\mathbb{R}^d$.

1) 对连续的曲线 $\boldsymbol{\gamma}:[0,1]\to\mathbb{R}^d$,定义

$$\ell(\boldsymbol{\gamma})=\sup_{n,0\leqslant t_1<\cdots<t_n\leqslant 1}\sum_{k=1}^n|\boldsymbol{\gamma}(t_k)-\boldsymbol{\gamma}(t_{k-1})|,$$

称 $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\inf\{\ell(\boldsymbol{\gamma})\mid\boldsymbol{\gamma}:[0,1]\to A$ 是满足 $\boldsymbol{\gamma}(0)=\boldsymbol{x},\boldsymbol{\gamma}(1)=\boldsymbol{y}$ 的连续曲线$\}$ 为 A 上的内蕴度量.如果不存在从 $\boldsymbol{x}$ 到 $\boldsymbol{y}$ 的连续曲线,那么 $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\infty$.

2) 如果 $\boldsymbol{g}:A\to\mathbb{R}^m$ 是关于 A 上内蕴度量 $\boldsymbol{\rho}$ 的 Lipschitz 函数,即存在常数 $L>0$ 使得对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A$,有

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})|\leqslant L\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

则称 $\boldsymbol{g}$ 是内蕴 Lipschitz 函数.

3) 设函数 $\boldsymbol{g}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$,如果存在具有有限多个连通部分的超曲面 Θ 使得 $\boldsymbol{g}$ 在 $\mathbb{R}^d\backslash\Theta$ 上的限制是内蕴 Lipschitz 函数,则称函数 $\boldsymbol{g}$ 是逐段 Lipschitz 函数,称 Θ 是 $\boldsymbol{g}$ 的例外集.

假设 H1 ① $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{b}$ 有界.

② $\boldsymbol{\sigma}(0,\boldsymbol{0},\mu)\neq\boldsymbol{0}$,且对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\in\mathbb{R}^d,\mu,\mu'\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,存在一个常数 $L_1>0$ 使得

$$\|\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\mu)-\boldsymbol{\sigma}(s,\boldsymbol{x}',\mu')\|_{\mathrm{HS}}\leqslant L_1(|t-s|+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|+\mathcal{W}_2(\mu,\mu')),$$

其中,$\|\cdot\|_{\mathrm{HS}}$ 为 Hilbert-Schmidt 范数.

③ 漂移系数 $\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu):[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^d$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 为逐段 Lipschitz 连续的,且 $\boldsymbol{b}(t,\cdot,\mu)$ 的例外集 Θ 是正可达的 C^3 超曲面.

④ 非平行条件:存在一个常数 $c_0>0$,使得对任意的 $\boldsymbol{\eta}\in\Theta$ 有 $\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{\eta},\mu)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\eta})\|_{\mathrm{HS}}\geqslant c_0$.

⑤ 对任意的 $t\in[0,T],\boldsymbol{\eta}\in\Theta,\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,有

$$\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{\eta},\mu)=\lim_{h\to 0+}\frac{\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{\eta}-h\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\eta}),\mu)-\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{\eta}+h\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\eta}),\mu)}{2\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{\eta},\mu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{\eta},\mu)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\eta})}\tag{2}$$

关于 $\boldsymbol{\eta}$ 属于 C^3,其关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的一、二、三阶导数均是有界的且一阶导数关于 t 为 Lipschitz 连续的、二阶导数关于 (t,μ) 为 Lipschitz 连续的.

1.2　变换函数 G 的性质

设 $L^2(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbb{R}^d)$ 是完备的概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上所有二阶矩有限的 $\mathbb{R}^d$- 值随机变量做成的空间,其上的标准内积和范数分别为 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{L^2}$ 和 $\|\cdot\|_{L^2}$.设 $\boldsymbol{f}:\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^d$,$\boldsymbol{X}\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbb{R}^d)$,定义 $\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{f}(\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}})$,称 $\tilde{\boldsymbol{f}}$ 为函数 $\boldsymbol{f}$ 的提升函数.如果 $L^2(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbb{R}^d)$ 中存在分布为 μ_0 的随机变量 $\boldsymbol{X}_0$,使得提升函数 $\tilde{\boldsymbol{f}}$ 在 $\boldsymbol{X}_0$ 处 Fréchet 可微,则称函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\mu_0\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 处 L- 可微.如果函数 $\boldsymbol{f}$ 在任意的 $\mu_0\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 处 L- 可微, 则称 $\boldsymbol{f}$ 是 L- 可微函数.由 Riesz 表示定理可知, 存在 (P-a.s.) 唯一的 $\boldsymbol{\Phi}\in L^2(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbb{R}^d)$, 使得当 $\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|_{L^2}\to 0$ 时,有

$$\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{X})=\tilde{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{X}_0)+\langle\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\rangle_{L^2}+o(\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|_{L^2}).$$

由文献[15]中 proposition 5.25 知,存在 Borel 可测函数 $\boldsymbol{\chi}:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$,使得 $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}_0)$, 因此

$$\boldsymbol{f}(\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}})=\boldsymbol{f}(\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}_0})+\mathcal{E}\langle\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X}_0),\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\rangle+o(\|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_0\|_{L_2}).$$

定义 $\boldsymbol{f}$ 在 μ_0 处的 L- 导数为 $\partial_\mu\boldsymbol{f}(\mu_0)(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{y})$,$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$.对固定的 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$,如果映射 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\ni\mu\mapsto\partial_\mu\boldsymbol{f}(\mu)(\boldsymbol{y})$ 存在一个 L- 可微的版本, 并且该版本的 L- 导数连续, 那么对于任意的 $(\mu,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$, 定义 $\partial_\mu\boldsymbol{f}(\cdot)(\boldsymbol{y}):\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^d$ 的 L- 导数为

$$\partial_\mu^2\boldsymbol{f}(\mu)(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')=\partial_\mu(\partial_\mu\boldsymbol{f})(\cdot)(\boldsymbol{y})(\mu,\boldsymbol{y}').$$

定义 2　设函数 $\boldsymbol{f}:\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^d$.

1) 如果 $\boldsymbol{f}$ 是 L- 可微的且其 L- 导数连续,对任意的 μ,映射 $\mathbb{R}^d\ni\boldsymbol{y}\mapsto\partial_\mu\boldsymbol{f}(\mu)(\boldsymbol{y})$ 存在一个连续的版本,且当 $\boldsymbol{y}\in\mathrm{supp}(\mu)$ 时,导数

$$\partial_\mu\boldsymbol{f}(\mu)(\boldsymbol{y}),\ \partial_y\{\partial_\mu\boldsymbol{f}(\mu)(\cdot)\}(\boldsymbol{y})$$

有界且关于变量 $(\mu,\boldsymbol{y})$ 联合连续,则称 $\boldsymbol{f}\in\mathcal{C}_b^{(1,1)}$.

2) 如果 $\boldsymbol{f}\in\mathcal{C}_b^{(1,1)}$, 二阶导数 $\partial_\mu^2\boldsymbol{f}(\mu)(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')$ 有界, 且对于所有的 $(\mu,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')$ 二阶导数联合连续, 则称 $\boldsymbol{f}\in\mathcal{C}_b^{(2,1)}$.

假设 H2　假设 H1①、H1②成立,且

① 对任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\backslash\Theta$,$\mu,\nu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,存在常数 $L_2,L_3>0$ 使得

$$\sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\backslash\Theta}\frac{|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)|}{1+|\boldsymbol{x}|}\leqslant L_2,\ |\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)-\boldsymbol{b}(s,\boldsymbol{x},\nu)|\leqslant L_3(|t-s|+\mathcal{W}_2(\mu,\nu)).$$

此外,对任意的 $\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,映射 $\mathbb{R}^d\ni\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 在 $\mathbb{R}^d\backslash\Theta$ 上逐段 Lipschitz 连续且 Lipschitz 常数不依赖于分布 μ.

② (i) $\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{y},\cdot):\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^d$ 属于 $\mathcal{C}_b^{(1,1)}$,映射 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^d\ni(\mu,\boldsymbol{y})\mapsto\partial_y\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{y},\mu)(\boldsymbol{y})$ 是 Lipschitz 连续函数,即对任意的 $t\in[0,T]$,任意的 $\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'\in\mathbb{R}^d$,任意的 $\mu,\nu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,存在常数 $L_4>0$ 使得

$$|\partial_y\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{y},\mu)(\boldsymbol{y})-\partial_y\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{y},\nu)(\boldsymbol{y}')|\leqslant L_4(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'|+\mathcal{W}_2(\nu,\mu)).$$

(ii) 对任意的 $t\in[0,T]$,$\boldsymbol{\eta}\in\Theta$,任意的 $\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,有 $\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{\eta},\mu)(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$.

(iii) 对任意的 $t\in[0,T]$,映射 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^d\ni(\mu,\boldsymbol{y})\mapsto\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{y},\mu)(\boldsymbol{y})\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\mu)$ 是 Lipschitz 连续的.此外,映射 $[0,T]\ni t\mapsto\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{y},\mu)(\boldsymbol{y})$ 是 Lipschitz 连续的.

(iv) 对任意的 $t,s\in[0,T]$,$\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}'\in\Theta$,$\mu,\nu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,存在常数 $L_5>0$ 使得

$$|\partial_t\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{\eta},\mu)-\partial_s\boldsymbol{\alpha}(s,\boldsymbol{\eta}',\nu)|\leqslant L_5(|t-s|+|\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}'|+\mathcal{W}_2(\mu,\nu)),$$

即 $\partial_t\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{\eta},\mu)$ 关于 $(t,\boldsymbol{\eta},\mu)$ 是 Lipschitz 连续函数.此外, $\partial_t\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{\eta},\mu)$ 是有界的.

设 $0<\varepsilon_0<\mathrm{Reach}(\Theta)$,$c>0$,对任意的 $(t,\boldsymbol{x},\mu)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, 定义变换函数

$$\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)=\begin{cases}\boldsymbol{x}+\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu), & \boldsymbol{x}\in\Theta^{\varepsilon_0},\\ \boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\backslash\Theta^{\varepsilon_0},\end{cases}\tag{3}$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|\boldsymbol{\phi}\left(\frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|}{c}\right),$$

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{u})=\begin{cases}(1+\boldsymbol{u})^4(1-\boldsymbol{u})^4, & |\boldsymbol{u}|\leqslant 1,\\ \boldsymbol{0}, & |\boldsymbol{u}|>1.\end{cases}$$

设 id_A 为集合 A 上的恒等映射.因为 Θ 是 C^3 超平面,由文献[2]中 remark 3.16 知,存在 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 使得若 $\boldsymbol{\eta}\in\Theta$, $y_1\in\mathbb{R}$ 且 $|y_1|\leqslant\varepsilon$,则 $id_{\tau_{\boldsymbol{\eta}}}+y_1\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\eta})$ 可逆,其中 $\tau_{\boldsymbol{\eta}}$ 是 Θ 中 $\boldsymbol{\eta}$ 的切空间.

设 $0<c<\varepsilon$,则当 $\boldsymbol{x}\notin\Theta^c$ 时,$\boldsymbol{G}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 是可微的.当 $\boldsymbol{x}\in\Theta^c$ 时,我们先引入一些记号,然后给出 $\boldsymbol{G}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 微分的表达式.设 $\boldsymbol{n}$ 为 Θ 的标准正交向量,取 Θ 满足如下条件的开子集 B:存在开集 $U\subset\mathbb{R}^d$ 使得 $U\cap\Theta=B$,且对每一个 $\boldsymbol{x}\in U$,有 $\boldsymbol{x}=y_1\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))+\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$.设 R 是$\mathbb{R}^{d-1}$上的开矩形,Θ 可以通过一一映射 $\boldsymbol{\psi}:R\to\mathbb{R}^d$ 局部参数化,且存在一点 $(y_2,\cdots,y_d)\in R$ 使得 $\boldsymbol{\psi}(y_2,\cdots,y_d)=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$.不妨设 $B=\boldsymbol{\psi}(R)$,定义映射 $\boldsymbol{\mathcal{J}}:(-\varepsilon,\varepsilon)\times R\to U$,

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}(y_1,\cdots,y_d)=y_1\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\psi}(y_2,\cdots,y_d))+\boldsymbol{\psi}(y_2,\cdots,y_d).$$

设 $|\boldsymbol{n}'|\leqslant K$, $\aleph=\varepsilon_0/(\varepsilon\max(K,1))$, $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量,

$$c_0=\min\left\{1,\varepsilon,\left(1+\frac{d}{3}\sup_{\boldsymbol{\eta}\in\Theta}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant d}|\boldsymbol{\alpha}_i(t,\boldsymbol{\eta},\mu)|+\frac{d}{4}\frac{\aleph}{\aleph-1}\max_{1\leqslant i,j\leqslant d}\left|\frac{\partial\boldsymbol{\alpha}_i(t,\boldsymbol{\eta},\mu)}{\partial\boldsymbol{x}_j}\right|\right)\right)^{-1}\right\}.$$

设 $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\eta}}$ 为 $id_{\tau_{\boldsymbol{\eta}}}+y_1\boldsymbol{n}'(\boldsymbol{\eta})$ 的逆.当 $0<c<c_0$ 时,定义 $\bar{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}|\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\phi}(|\boldsymbol{y}|/c)$,与文献[2]中 theorem 3.14 类似,有

$$\begin{aligned}\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)=&\bar{\boldsymbol{\phi}}(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)\mathcal{I}_{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\mathcal{J}}^{-1}(\boldsymbol{x}))(id_{\mathbb{R}^d}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})))+\\&\bar{\boldsymbol{\phi}}'(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))+id_{\mathbb{R}^d},\end{aligned}\tag{4}$$

当 $c\to0$ 时,$\bar{\boldsymbol{\phi}}$, $\bar{\boldsymbol{\phi}}'$ 一致有界并趋于0,故可选充分小的 c 使得 $\max\{|\bar{\boldsymbol{\phi}}|,|\bar{\boldsymbol{\phi}}'|\}<(\varepsilon_0-c)/2$.此时,$\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)\to id_{\mathbb{R}^d}$,从而 $2>|\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)|>1/2$.因此,$\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 可逆,即 $\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu),\mu)=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu),\mu)=\boldsymbol{x}$.此外,对任意的 $(t,\boldsymbol{x},\mu)$, $\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 一致有界.

引理 1 若假设 H1、H2 成立, $0<c<c_0$, 则存在 $L>0$ 使得对任意的 $t\in[0,T]$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$, $\mu,\nu\in\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 有

$$|\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)-\partial_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{y},\nu)|\leqslant L(|t-s|+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+\mathscr{W}_2(\mu,\nu)).$$

证明 当 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\backslash\Theta^c$ 时,$\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)\equiv\boldsymbol{x}$, 从而 $\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 关于 $(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 是 Lipschitz 连续的.下面讨论 $\boldsymbol{x}\in\Theta^c$ 的情形.

当 $\boldsymbol{x}\in\Theta$ 时, $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$, $\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$.当 $\boldsymbol{x}\in\Theta^c\backslash\Theta$ 时, 由文献[2]中 lemma 3.26 和 lemma 3.27 可知, $\tilde{\boldsymbol{\phi}}:\Theta^c\backslash\Theta\to\mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{\alpha}\circ\boldsymbol{p}:\Theta^c\backslash\Theta\to\mathbb{R}^d$ 都有连续的三阶导函数,且一阶、二阶、三阶导函数都有界,因此,由式(3)可知, $\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 是 Lipschitz 连续的.

当 $\boldsymbol{x}\in\Theta^c$ 时, $|\bar{\boldsymbol{\phi}}'(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)|\leqslant c/3$, $|\bar{\boldsymbol{\phi}}(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)|\leqslant c^2/12$.由文献[2]中 lemma 3.17 知 $\|\mathcal{I}_{\boldsymbol{\eta}}\|\leqslant1/(1-|\boldsymbol{y}_1|\|\boldsymbol{n}'\|)$.当 $|\boldsymbol{y}_1|<\varepsilon$ 时, $|\boldsymbol{y}_1|\|\boldsymbol{n}'\|<1/\aleph<1$, 因此, $\|\mathcal{I}_{\boldsymbol{\eta}}\|\leqslant\aleph/(\aleph-1)<1$.此外, $\|id_{\mathbb{R}^d}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\|\leqslant1$, 由假设 H2②(i), H1⑤可知 $\partial_\mu\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)=\partial_{\boldsymbol{x}}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)$ 有界,从而 $\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)$ 关于 μ 为 Lipschitz 连续的.由假设 H2①知 $\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)$ 关于 (t,μ) 为 Lipschitz 连续的.由假设 H1⑤知 $\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)$ 关于 t 为 Lipschitz 连续的.综上可得,对任意的 $t,s\in[0,T]$,任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$, $\mu,\nu\in\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned}&|\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)-\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\nu)|=\\&\quad|\bar{\boldsymbol{\phi}}'(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))-\bar{\boldsymbol{\phi}}'(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\nu)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))+\end{aligned}$$

$$\bar{\boldsymbol{\phi}}(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)\mathscr{I}_{\boldsymbol{\eta}}(\mathscr{J}^{-1}(\boldsymbol{x}))(id_{\mathbb{R}^d}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})))-$$
$$\bar{\boldsymbol{\phi}}(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\nu)\mathscr{I}_{\boldsymbol{\eta}}(\mathscr{J}^{-1}(\boldsymbol{x}))(id_{\mathbb{R}^d}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})))|\leqslant$$
$$|\bar{\boldsymbol{\phi}}'(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))||\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)-\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\nu)|+$$
$$|\bar{\boldsymbol{\phi}}(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)\mathscr{I}_{\boldsymbol{\eta}}(\mathscr{T}^{-1}(\boldsymbol{x}))(id_{\mathbb{R}^d}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})))||\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)-$$
$$\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\nu)|\leqslant C_2\mathscr{W}_2(\mu,\nu),$$

$$|\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)-\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{x},\mu)|=$$
$$|\bar{\boldsymbol{\phi}}'(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))-\bar{\boldsymbol{\phi}}'(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)\boldsymbol{\alpha}(s,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))+$$
$$\bar{\boldsymbol{\phi}}(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)\mathscr{I}_{\boldsymbol{\eta}}(\mathscr{J}^{-1}(\boldsymbol{x}))(id_{\mathbb{R}^d}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})))-$$
$$\bar{\boldsymbol{\phi}}(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\alpha}(s,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)\mathscr{I}_{\boldsymbol{\eta}}(\mathscr{J}^{-1}(\boldsymbol{x}))(id_{\mathbb{R}^d}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})))|\leqslant$$
$$|\bar{\boldsymbol{\phi}}'(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))||\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)-\boldsymbol{\alpha}(s,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)|+$$
$$|\bar{\boldsymbol{\phi}}(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\|)\mathscr{I}_{\boldsymbol{\eta}}(\mathscr{T}^{-1}(\boldsymbol{x}))(id_{\mathbb{R}^d}-\boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})))||\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)-$$
$$\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{\alpha}(s,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}),\mu)|\leqslant C_3|t-s|.$$

因此

$$|\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)-\partial_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{y},\nu)|\leqslant$$
$$|\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)-\partial_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y},\mu)|+|\partial_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y},\mu)-\partial_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y},\nu)|+$$
$$|\partial_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y},\nu)-\partial_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{y},\nu)|\leqslant$$
$$C_1|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+C_2\mathscr{W}_2(\mu,\nu)+C_3|t-s|\leqslant$$
$$\max(C_1,C_2,C_3)(|t-s|+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+\mathscr{W}_2(\mu,\nu)).$$

取 $L=\max(C_1,\ C_2,C_3)$ 即可.证毕. □

定义 $\boldsymbol{Z}_t=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t,\mu_t)$, 由假设 H2②(i) 知

$$\sup_{(t,\boldsymbol{x},\mu)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)}\left[\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)(\boldsymbol{y})|^2\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{y})+\int_{\mathbb{R}^d}|\partial_{\boldsymbol{y}}\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)(\boldsymbol{y})|^2\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{y})\right]<\infty.$$

因此,由文献[15]中 proposition 5.102 可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Z}_t=(\partial_t\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t,\mu_t)+\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t,\mu_t)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{X}_t,\mu_t))\mathrm{d}t+\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t,\mu_t)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X}_t,\mu_t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t+$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{X}_t,\mu_t)\partial^2_{\boldsymbol{xx}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t,\mu_t)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X}_t,\mu_t)]\mathrm{d}t+\mathscr{L}_{\mu_t}(\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t,\cdot))(\mu_t)\mathrm{d}t=$$
$$\tilde{\boldsymbol{b}}(t,\boldsymbol{Z}_t,\mu_t)\mathrm{d}t+\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t,\boldsymbol{Z}_t,\mu_t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t,\tag{5}$$

其中

$$\boldsymbol{Z}_0=\boldsymbol{G}(0,\boldsymbol{\xi},\delta_{\boldsymbol{\xi}}),\ \boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{\xi},\ \mathscr{L}_{X_0}=\delta_{\boldsymbol{\xi}},\ \mu_t=\mathscr{L}_{X_t},\qquad t\in(0,T],$$

$$\mathscr{L}_{\mu_t}(\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\cdot))(\mu_t)=\int_{\mathbb{R}^d}\Big(\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu_t)(\boldsymbol{y})b(t,\boldsymbol{y},\mu_t)+$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{y},\mu_t)\partial_{\boldsymbol{y}}\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu_t)(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{y},\mu_t)]\Big)\mu_t(\mathrm{d}\boldsymbol{y}),$$

$$\tilde{\boldsymbol{b}}(t,\boldsymbol{Z}_t,\mu_t)=\partial_t\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t,\mu_t),\mu_t)+\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t,\mu_t),\mu_t)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t,\mu_t),\mu_t)+$$
$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t,\mu_t),\mu_t)\partial^2_{\boldsymbol{xx}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t,\mu_t),\mu_t)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t,\mu_t),\mu_t)]+$$
$$\mathscr{L}_{\mu_t}(\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t,\mu_t),\cdot))(\mu_t),\tag{6}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t,\boldsymbol{Z}_t,\mu_t)=\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t,\mu_t),\mu_t)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t,\mu_t),\mu_t).\tag{7}$$

引理 2　假设 H2①、H2②(i) 成立,对所有的 $(t,\boldsymbol{x},\mu)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^d\ni\boldsymbol{y}\mapsto\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},$

$\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{y})$ 属于 $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$.那么,对所有的 $(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{y}) \in [0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{G}^{-1}:[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^d$ 是 L- 可微的且其 L- 导数连续.此外,当 $d=1$ 时,

$$\partial_\mu G^{-1}(t,x,\boldsymbol{\mu})(y)=\frac{-\partial_\mu G(t,G^{-1}(t,x,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})(y)}{\partial_x G(t,G^{-1}(t,x,\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})}. \tag{8}$$

证明 首先注意到,由假设 H2②(i)知 $\boldsymbol{G}$ 是 L- 可微的.设 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in L_2(\Omega,\mathcal{F},P;\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{\mu}$, $\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{\nu}$.对任意的 $(t,\boldsymbol{y})\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$,考虑提升函数 $\tilde{\boldsymbol{G}}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{X})=\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\mu})$.类似地,对任意的 $(t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$,设 $\tilde{\boldsymbol{G}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{X})=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$ 和 $\tilde{\boldsymbol{G}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\nu})$.固定 $(t,\boldsymbol{y})\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$,设 $\boldsymbol{x}=\tilde{\boldsymbol{G}}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{h}=\tilde{\boldsymbol{G}}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})-\boldsymbol{x}$.

当 $\|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}))\|>c$ 时, $\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})=0$.当 $\|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}))\|\leqslant c$ 时,由假设 H2②(i)及 $\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})+\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})\partial_\mu\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})=0$ 知

$$|\partial_\mu\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})|=\left|\frac{\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})}{\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})}\right|\leqslant 2|\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})|\leqslant$$
$$2C|\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}))|\leqslant\frac{Cc^2}{6}.$$

最后一个不等号用到了当 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})|<c$ 时, $|\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x})|\leqslant c^2/12$.从而, $\boldsymbol{\mu}\mapsto\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\mu})$ 是 Lipschitz 连续的.注意到 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\nu}),\boldsymbol{\nu})=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h},\boldsymbol{\nu})$ 和 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\mu}),\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu})$,故

$$|\boldsymbol{h}|=|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\nu})-\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\mu})|\leqslant L\mathcal{W}_2(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\mu})\leqslant L\|\boldsymbol{Y}\|_{L_2}. \tag{9}$$

下面证明式(8).由 $x\mapsto\partial_x G(t,x,\boldsymbol{\mu})$ 的有界性可知,存在常数 $C>0$ 使得

$$\frac{|\tilde{G}^{-1}(t,y,X+Y)-\tilde{G}^{-1}(t,y,X)-\langle(-\partial_\mu G(t,x,\boldsymbol{\mu})(X))/(\partial_x G(t,x,\boldsymbol{\mu})),Y\rangle_{L_2}|}{\|Y\|_{L_2}}\leqslant$$
$$C\frac{|\partial_x G(t,x,\boldsymbol{\mu})h+\langle\partial_\mu G(t,x,\boldsymbol{\mu})(X),Y\rangle_{L_2}|}{\|Y\|_{L_2}}.$$

注意到 $\tilde{G}(t,x,X)=\tilde{G}(t,x+h,X+Y)$,因此

$$\frac{|\tilde{G}^{-1}(t,y,X+Y)-\tilde{G}^{-1}(t,y,X)-\langle(-\partial_\mu G(t,x,\boldsymbol{\mu})(X))/(\partial_x G(t,x,\boldsymbol{\mu})),Y\rangle_{L_2}|}{\|Y\|_{L_2}}\leqslant$$
$$C\frac{|-\partial_x G(t,x,\boldsymbol{\mu})h+\tilde{G}(t,x+h,X+Y)-\tilde{G}(t,x,X)-\langle\partial_\mu G(t,x,\boldsymbol{\mu})(X),Y\rangle_{L_2}|}{\|Y\|_{L_2}}\leqslant$$
$$C\frac{|\tilde{G}(t,x+h,X+Y)-\tilde{G}(t,x,X+Y)-\partial_x G(t,x,\boldsymbol{\nu})h|}{\|Y\|_{L_2}}+$$
$$C\frac{|\partial_x G(t,x,\boldsymbol{\nu})h-\partial_x G(t,x,\boldsymbol{\mu})h|}{\|Y\|_{L_2}}+$$
$$C\frac{|\tilde{G}(t,x,X+Y)-\tilde{G}(t,x,X)-\langle\partial_\mu G(t,x,\boldsymbol{\mu})(X),Y\rangle_{L_2}|}{\|Y\|_{L_2}}\leqslant$$
$$CL\frac{|G(t,x+h,\boldsymbol{\nu})-G(t,x,\boldsymbol{\nu})-\partial_x G(t,x,\boldsymbol{\nu})h|}{|h|}+CL|\partial_x\tilde{G}(t,x,X+Y)-\partial_x\tilde{G}(t,x,X)|+$$
$$C\frac{|\tilde{G}(t,x,X+Y)-\tilde{G}(t,x,X)-\langle\partial_\mu G(t,x,\boldsymbol{\mu})(X),Y\rangle_{L_2}|}{\|Y\|_{L_2}}\leqslant$$
$$CL\partial_{xx}^2 G(t,x,\boldsymbol{\nu})|h|+CL|\partial_x\tilde{G}(t,x,X+Y)-\partial_x\tilde{G}(t,x,X)|+$$
$$C|\partial_\mu\tilde{G}(t,x,X+Y)-\partial_\mu\tilde{G}(t,x,X)|.$$

若 $\|Y\|_{L_2}\to 0$,则 $|h|\to 0$,从而最后一个不等式的右边趋于0,因此,式(8)得证.类似于式(8)可得,当 $d\neq$

1 时，$\partial_\mu \boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu)(\boldsymbol{y})=-\partial_\mu \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu),\mu)(\boldsymbol{y})\cdot[\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu),\mu)]^{-1}$，其中，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵。由假设 H2②(i)及 $\boldsymbol{y}\mapsto\partial_\mu \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)(\boldsymbol{y})$ 属于 $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ 可知 $\boldsymbol{G}^{-1}:[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\to\mathbb{R}^d$ 是 L-可微的，且其 L- 导数连续。证毕。 □

引理 3 若假设 H2①、H2②(i) 成立，则对任意的 $t,s\in[0,T]$，任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$，$\mu,\nu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$，存在 $L_{G^{-1}}$ 使得

$$|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu)-\boldsymbol{G}^{-1}(s,\boldsymbol{y},\nu)|\leqslant L_{G^{-1}}(|t-s|+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+\mathcal{W}_2(\mu,\nu)).$$

证明 当 $0<c<c_0$ 时，$|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)|>1/2$，由

$$1=|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu),\mu)\cdot\partial_x \boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu)|>\frac{1}{2}|\partial_x \boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu)|$$

可得 $|\partial_x \boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu)|<2$，所以对任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$，有

$$|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu)-\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\mu)|\leqslant 2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.$$

由 $\partial_t \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu),\mu)+\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu),\mu)\partial_t \boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu)=0$ 知

$$|\partial_t \boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu)|=\left|-\frac{\partial_t \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu),\mu)}{\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu),\mu)}\right|\leqslant 2|\partial_t \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu),\mu)|\leqslant$$
$$2|\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu))||\partial_t \boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu),\mu)|.$$

由 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})|<c$，$|\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x})|\leqslant c^2/12$ 及假设 H2②(iv) 知 $|\partial_t \boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu)|\leqslant C'c^2/6$，从而 $|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu)-\boldsymbol{G}^{-1}(s,\boldsymbol{x},\mu)|\leqslant(C'c^2/6)|t-s|$。当 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})|\geqslant c$ 时，$|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu)-\boldsymbol{G}^{-1}(s,\boldsymbol{x},\mu)|=0\leqslant(C'c^2/6)\times|t-s|$。

由引理 2 的证明可知 $\mu\mapsto\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\mu)$ 是 Lipschitz 连续的且 Lipschitz 常数为 $Cc^2/6$。因此，对任意的 $t,s\in[0,T]$，任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d$，$\mu,\nu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 有

$$|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu)-\boldsymbol{G}^{-1}(s,\boldsymbol{y},\nu)|\leqslant$$
$$|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu)-\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\nu)|+|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{x},\nu)-\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\nu)|+|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\nu)-\boldsymbol{G}^{-1}(s,\boldsymbol{y},\nu)|\leqslant$$
$$2|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|+\frac{Cc^2}{6}\mathcal{W}_2(\mu,\nu)+\frac{C'c^2}{6}|t-s|.$$

取 $L_{G^{-1}}=\max\left(\frac{Cc^2}{6},\frac{C'c^2}{6},2\right)$ 即可。证毕。 □

接下来，假设 $c<\sup_{\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)}|\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{\eta},\mu)|$，且 c 充分的小，使得 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\ni\mu\mapsto G^{-1}(t,\boldsymbol{x},\mu)$（属于 C^3）的 Lipschitz 常数小于 1/2。设 $\boldsymbol{\xi}\in L_0{}^2(\mathbb{R}^d)$，$(\mu_t)_{t\in[0,T]}\in\mathcal{C}([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$，$\boldsymbol{X}_t^\mu$ 为方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t=\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{X}_t,\mu_t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X}_t,\mu_t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T,\ \boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{\xi}$$

的解，则由假设 H1①、H1②和 H2①知，$\mathcal{E}[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\boldsymbol{X}_t^\mu|^2]\leqslant C(1+\mathcal{E}[|\boldsymbol{\xi}|^2])=\bar{C}$，其中正数 C 只依赖于 T 和假设中出现的常数。定义

$$\mathcal{P}^b=\left\{\mu_t\in\mathcal{C}([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))\ \middle|\ \sup_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}^d}\boldsymbol{x}^2\mu_t(\mathrm{d}\boldsymbol{x})\leqslant\bar{C}\right\}.$$

下面证明随机微分方程(5)的系数是 Lipschitz 连续的，从而式(5)有唯一强解。

引理 4 若假设 H1、H2 成立，$0<c<c_0$，$\nu\in\mathcal{P}^b$，则 $\tilde{\boldsymbol{b}}(t,z,\nu)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t,z,\nu)$ 在 $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 上是 Lipschitz 连续函数。

证明 由假设 H1①、H1②、$2>|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)|>1/2$、引理 1 和引理 3 可得

$$|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t,z,\mu)-\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t,z,\nu)|\leqslant$$
$$|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\mu),\mu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\mu),\mu)-\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\mu),\mu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)|+$$
$$|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\mu),\mu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)-\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)|\leqslant$$
$$|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\mu),\mu)||\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\mu),\mu)-\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)|+$$

$$
\begin{aligned}
&|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\mu),\mu)-\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)||\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)|\leqslant\\
&2L_1(|\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\mu)-\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu)|+\mathscr{W}_2(\mu,\nu))+\\
&C(C_1|\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\mu)-\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu)|+C_2\mathscr{W}_2(\mu,\nu))\leqslant\\
&2L_1(L_{\boldsymbol{G}^{-1}}\mathscr{W}_2(\mu,\nu)+\mathscr{W}_2(\mu,\nu))+C(C_1L_{\boldsymbol{G}^{-1}}\mathscr{W}_2(\mu,\nu)+C_2\mathscr{W}_2(\mu,\nu))\leqslant C\mathscr{W}_2(\mu,\nu).
\end{aligned}
$$

所以映射 $\nu\mapsto\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t,z,\nu)$ 是 Lipschitz 连续函数.类似地,

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t,z,\nu)-\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t,z',\nu)|\leqslant\\
&\quad|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)-\\
&\quad\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z',\nu),\nu)|+\\
&\quad|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z',\nu),\nu)-\\
&\quad\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z',\nu),\nu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z',\nu),\nu)|\leqslant\\
&\quad|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)||\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)-\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z',\nu),\nu)|+\\
&\quad|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)-\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z',\nu),\nu)||\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z',\nu),\nu)|\leqslant\\
&\quad 2L_1|\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu)-\boldsymbol{G}^{-1}(t,z',\nu)|+CC_1|\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu)-\boldsymbol{G}^{-1}(t,z',\nu)|\leqslant\\
&\quad 2L_1L_{\boldsymbol{G}^{-1}}|z-z'|+CC_1L_{\boldsymbol{G}^{-1}}|z-z'|\leqslant C|z-z'|.
\end{aligned}
$$

所以映射 $z\mapsto\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t,z,\nu)$ 是 Lipschitz 连续函数.类似地,

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t,z,\nu)-\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s,z,\nu)|\leqslant\\
&\quad|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)-\\
&\quad\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)\boldsymbol{\sigma}(s,\boldsymbol{G}^{-1}(s,z,\nu),\nu)|+\\
&\quad|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)\boldsymbol{\sigma}(s,\boldsymbol{G}^{-1}(s,z,\nu),\nu)-\\
&\quad\partial_x \boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{G}^{-1}(s,z,\nu),\nu)\boldsymbol{\sigma}(s,\boldsymbol{G}^{-1}(s,z,\nu),\nu)|\leqslant\\
&\quad|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)||\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)-\boldsymbol{\sigma}(s,\boldsymbol{G}^{-1}(s,z,\nu),\nu)|+\\
&\quad|\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)-\partial_x \boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{G}^{-1}(s,z,\nu),\nu)||\boldsymbol{\sigma}(s,\boldsymbol{G}^{-1}(s,z,\nu),\nu)|\leqslant\\
&\quad 2L_1(|t-s|+|\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu)-\boldsymbol{G}^{-1}(s,z,\nu)|)+\\
&\quad C(C_1|\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu)-\boldsymbol{G}^{-1}(s,z,\nu)|+C_3|t-s|)\leqslant\\
&\quad 2L_1(|t-s|+L_{\boldsymbol{G}^{-1}}|t-s|)+C(C_1L_{\boldsymbol{G}^{-1}}|t-s|+C_3|t-s|)\leqslant C|t-s|.
\end{aligned}
$$

所以映射 $t\mapsto\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t,z,\nu)$ 是 Lipschitz 连续函数.因此, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t,z,\nu)$ 关于 (t,z,ν) 是 Lipschitz 连续函数.

下面证明 $\tilde{\boldsymbol{b}}(t,z,\nu)$ 是 Lipschitz 连续函数,由引理 3、假设 H2②(iv)知 $\partial_t \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)$ 关于 (t,z,ν) Lipschitz 连续.由式(6)知要证 $\tilde{\boldsymbol{b}}(t,z,\nu)$ 为 Lipschitz 连续,只需证

$$
\begin{aligned}
(t,z,\nu)\mapsto\ &\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)\partial_{xx}^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)]+\\
&\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)+\mathscr{L}_\nu(\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\cdot))(\nu)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

是 Lipschitz 连续函数.首先证明

$$
\begin{aligned}
(t,z,\nu)\mapsto\ &\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)\partial_{xx}^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)]+\\
&\partial_x \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,z,\nu),\nu)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

是 Lipschitz 连续函数.设 $\boldsymbol{X}$ 为 U 上一个局部定义的过程,那么在 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times R$ 中存在一个局部定义的过程 $\boldsymbol{Y}$,使得

$$
\boldsymbol{X}=Y_1\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\psi}(Y_2,\cdots,Y_d))+\boldsymbol{\psi}(Y_2,\cdots,Y_d),
$$

即 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\mathcal{J}}(\boldsymbol{Y})$.如果 $\boldsymbol{Y}$ 是方程 $\mathrm{d}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{\beta}(t,\boldsymbol{Y},\nu)\mathrm{d}t+\boldsymbol{\omega}(t,\boldsymbol{Y},\nu)\mathrm{d}\boldsymbol{W}$ 局部定义的解,则由 Itô 公式可得

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\mathcal{J}}'(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\beta}(t,\boldsymbol{Y},\nu)\mathrm{d}t+\boldsymbol{\mathcal{J}}'(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\omega}(t,\boldsymbol{Y},\nu)\mathrm{d}\boldsymbol{W}+\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{Y},\nu)\boldsymbol{\mathcal{J}}''(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\omega}(t,\boldsymbol{Y},\nu)]\mathrm{d}t,
$$

其中, $\mathcal{J}'$ 和$\mathcal{J}''$分别表示$\mathcal{J}$的 Jacobi 和 Hesse 算子.我们想要$\mathcal{J}'(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\omega}(t,\boldsymbol{Y},\nu)=\boldsymbol{\sigma}(t,\mathcal{J}(\boldsymbol{Y}),\nu)$,即$\boldsymbol{\omega}(t,\boldsymbol{Y},\nu)=(\mathcal{J}'(\boldsymbol{Y}))^{-1}\boldsymbol{\sigma}(t,\mathcal{J}(\boldsymbol{Y}),\nu)$.为方便起见,记$\mathcal{G}=\mathcal{J}^{-1}$.令

$$(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}})_{1,1}=\omega_{1,1}^2+\cdots+\omega_{1,d}^2=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\mathcal{G}'\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(\mathcal{G}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1).$$

下面证明 $(\mathcal{G}')^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{n}$.当$\boldsymbol{\xi}\in\Theta$时,$\mathcal{J}$的 Jacobi 算子$\mathcal{J}'$为

$$\mathcal{J}'=\left(\boldsymbol{n},\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial y_2},\cdots,\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial y_d}\right),$$

$$\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(\mathcal{J}')^{-1}=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}((\mathcal{J}')^{-1})=\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\Leftrightarrow\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\mathcal{J}'=\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{n},\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial y_2},\cdots,\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial y_d}\right)=(\|\boldsymbol{n}\|^2,0,\cdots,0)=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}.$$

因此,在Θ上有$\omega_{1,1}^2+\cdots+\omega_{1,d}^2=\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}$.$\boldsymbol{\beta}$关于第二个分量在集合$\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^d:y_1=0\}$上有不连续点.此外

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\boldsymbol{Y}=\mathrm{d}(\mathcal{G}(\boldsymbol{X}))=\\&\quad\mathcal{G}'(\boldsymbol{X})\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{X},\nu)\mathrm{d}t+\mathcal{G}'(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X},\nu)\mathrm{d}\boldsymbol{W}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{X},\nu)\mathcal{G}''(\boldsymbol{X})\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X},\nu)]\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即$\boldsymbol{\beta}(t,\boldsymbol{y},\nu)=\mathcal{G}'(\mathcal{J}(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{b}(t,\mathcal{J}(\boldsymbol{y}),\nu)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\mathcal{J}(\boldsymbol{y}),\nu)\mathcal{G}''(\mathcal{J}(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{\sigma}(t,\mathcal{J}(\boldsymbol{y}),\nu)]$.第二项是连续的,所以

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0+}(\boldsymbol{\beta}(t,(-h,y_2,\cdots,y_d),\nu)-\boldsymbol{\beta}(t,(h,y_2,\cdots,y_d),\nu))=\\&\quad\mathcal{G}'(\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d))\lim_{h\to0+}(\boldsymbol{b}(t,\mathcal{J}(-h,y_2,\cdots,y_d),\nu)-\boldsymbol{b}(t,\mathcal{J}(h,y_2,\cdots,y_d),\nu))=\\&\quad\mathcal{G}'(\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d))\lim_{h\to0+}(\boldsymbol{b}(t,\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d)-h\boldsymbol{n}(\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d)),\nu)-\\&\quad\boldsymbol{b}(t,\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d)+h\boldsymbol{n}(\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d)),\nu))=\\&\quad\mathcal{G}'(\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d))2\boldsymbol{\alpha}(t,\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d),\nu)(\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n})(t,\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d),\nu)=\\&\quad\mathcal{G}'(\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d))2\boldsymbol{\alpha}(t,\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d),\nu)(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}})_{1,1}(t,(0,y_2,\cdots,y_d),\nu).\end{aligned}\tag{12}$$

考虑

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})(\boldsymbol{y})=\mathcal{J}(\boldsymbol{y})+\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\mathcal{J}(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\mathcal{J}(\boldsymbol{y})),\nu)=\\&\quad y_1\boldsymbol{n}(\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d))+\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d)+y_1|y_1|\boldsymbol{\phi}\left(\frac{y_1}{c}\right)\boldsymbol{\alpha}(t,\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d),\nu),\\&(\mathcal{G}\circ\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})(\boldsymbol{y})=\\&\quad\mathcal{G}\left(y_1\boldsymbol{n}(\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d))+\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d)+y_1|y_1|\boldsymbol{\phi}\left(\frac{y_1}{c}\right)\boldsymbol{\alpha}(t,\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d),\nu)\right).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y_1}(\mathcal{G}\circ\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})(\boldsymbol{y})=\\&\quad\mathcal{G}'((\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})(\boldsymbol{y}))\frac{\partial}{\partial y_1}\Big(y_1\boldsymbol{n}(\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d))+\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d)+\\&\quad y_1|y_1|\boldsymbol{\phi}\left(\frac{y_1}{c}\right)\boldsymbol{\alpha}(t,\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d),\nu)\Big)=\\&\quad\mathcal{G}'((\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})(\boldsymbol{y}))\Bigg(\boldsymbol{n}(\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d))+\Bigg(2|y_1|\boldsymbol{\phi}\left(\frac{y_1}{c}\right)+\\&\quad y_1|y_1|\boldsymbol{\phi}'\left(\frac{y_1}{c}\right)\frac{1}{c}\Bigg)\boldsymbol{\alpha}(t,\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d),\nu)\Bigg),\\&\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}(\mathcal{G}\circ\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})(\boldsymbol{y})=\end{aligned}$$

$$\text{continuous founction} + \mathcal{G}'((\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})(\boldsymbol{y}))\left(2\operatorname{sign}(y_1)\boldsymbol{\phi}\left(\frac{y_1}{c}\right)\alpha(t,\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d),\nu)\right).$$

当 $\boldsymbol{x}\in\Theta$ 时,$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$,从而当 $y_1=0$ 时,$\boldsymbol{G}(\mathcal{J}(\boldsymbol{y}))=\mathcal{J}(\boldsymbol{y})$, 因此

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0+}\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}(\mathcal{G}\circ\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})(-h,y_2,\cdots,y_d)-\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}(\mathcal{G}\circ\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})(h,y_2,\cdots,y_d)\right)=\\&\qquad-4\mathcal{G}'((\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})(0,y_2,\cdots,y_d))\boldsymbol{\alpha}(t,\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d),\nu)=\\&\qquad-4\mathcal{G}'(\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d))\boldsymbol{\alpha}(t,\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d),\nu).\end{aligned}\tag{13}$$

考虑 $(\mathcal{G}\circ\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})_k(\boldsymbol{Y})$ 的漂移系数

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k(t,\boldsymbol{y},\nu)=&\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial y_j}(\mathcal{G}\circ\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})_k(\boldsymbol{y})\beta_j(t,\boldsymbol{y},\nu)+\\&\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}(\mathcal{G}\circ\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})_k(\boldsymbol{y})\sum_{l=1}^{d}\omega_{li}(t,\boldsymbol{y},\nu)\omega_{lj}(t,\boldsymbol{y},\nu),\end{aligned}$$

由于 $(\mathcal{G}\circ\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})'(0,y_2,\cdots,y_d)=id_{\mathbb{R}^d}$,因此,$\dfrac{\partial}{\partial y_j}(\mathcal{G}\circ\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})_k(0,y_2,\cdots,y_d)=(\boldsymbol{e}_k)_j$.此外,当$(i,j)\neq(1,1)$ 时,$\dfrac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}(\mathcal{G}\circ\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})_k$ 是连续的.因此,由式(12)和(13)可得

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0+}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k(t,(-h,y_2,\cdots,y_d),\nu)-\tilde{\boldsymbol{\beta}}_k(t,(h,y_2,\cdots,y_d),\nu))=\\&\quad\lim_{h\to0+}\Bigg(\boldsymbol{\beta}_k(t,(-h,y_2,\cdots,y_d),\nu)+\\&\quad\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}(\mathcal{G}\circ\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})_k(-h,y_2,\cdots,y_d)(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}})_{11}(t,(0,y_2,\cdots,y_d),\nu)-\\&\quad\boldsymbol{\beta}_k(t,(h,y_2,\cdots,y_d),\nu)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}(\mathcal{G}\circ\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})_k(h,y_2,\cdots,y_d)(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}})_{11}(t,(0,y_2,\cdots,y_d),\nu)\Bigg)=\\&\quad\mathcal{G}'(\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d))2\boldsymbol{\alpha}(t,\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d),\nu)(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}})_{1,1}(t,(0,y_2,\cdots,y_d),\nu)-\\&\quad2\mathcal{G}'(\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d))\boldsymbol{\alpha}(t,\mathcal{J}(0,y_2,\cdots,y_d),\nu)(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}})_{1,1}(t,(0,y_2,\cdots,y_d),\nu)=0,\end{aligned}$$

因此,$\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 在$\mathbb{R}^d$上是连续的.由于$\mathcal{J},\mathcal{G}\in C^2$,故 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X})=\mathcal{J}\circ(\mathcal{G}\circ\boldsymbol{G}\circ\mathcal{J})\circ\mathcal{G}(\boldsymbol{X})$ 的漂移系数是连续的,即式(11)在 Θ 上是连续的.为了证明式(11)在 $\mathbb{R}^d$ 上是 Lipschitz 连续的,由文献[2]中 lemma 3.6 知只需证明式(11)在 $\mathbb{R}^d\backslash\Theta$ 上是逐段 Lipschitz 连续的.当 $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^d\backslash\Theta^c$ 时, 由假设 H2①知

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)\partial_{\boldsymbol{xx}}^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)]+\\&\qquad\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu).\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{z}$ 在$\mathbb{R}^d\backslash\Theta$ 上是内蕴 Lipschitz 连续的,因此,式(11)在 $\mathbb{R}^d\backslash\Theta^c$ 也是内蕴 Lipschitz 连续的.

当$\boldsymbol{z}\in\Theta^c\backslash\Theta$ 时,$\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{z},\nu)$ 和 $\partial_{\boldsymbol{xx}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{z},\nu)$ 可微且导数有界.因此,由文献[2]中 lemma 3.8 知 $\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{z},\nu)$ 和 $\partial_{\boldsymbol{xx}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{z},\nu)$ 是内蕴 Lipschitz 连续的,由引理 3 知 $\boldsymbol{G}^{-1}$ 是 Lipschitz 连续的.由假设 H1②、H2①和文献[2]中 lemma 3.9 知, $\boldsymbol{z}\mapsto\dfrac{1}{2}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)\partial_{\boldsymbol{xx}}^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)]$ 和 $\boldsymbol{z}\mapsto\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)$ 是内蕴 Lipschitz 连续的,从而式(11)在 $\Theta^c\backslash\Theta$ 上是内蕴 Lipschitz 连续的.因此,式(11)在 $\mathbb{R}^d$ 上是逐段 Lipschitz 连续函数.

由引理 3、假设 H2②ⅳ、假设 H2①知 $\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)$ 关于(t,ν) Lipschitz 连续.由引理 3、假设 H1⑤、假设 H2①知

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)\partial_{\boldsymbol{xx}}^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)]$$

关于 (t,ν) Lipschitz 连续.从而,式(11)关于 (t,z,ν) 是 Lipschitz 连续函数.

下面证明映射

$$(t,\boldsymbol{z},\nu)\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}\left\{\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{y},\nu)\partial_y\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{y},\nu)]+\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)(\boldsymbol{y})\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)\right\}\nu(\mathrm{d}\boldsymbol{y})$$

是 Lipschitz 连续的.由假设 H2②(i)、(ii)知 $\boldsymbol{y}\mapsto\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)(\boldsymbol{y})\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)$ 在 Θ 上连续.

对 $\mu,\nu\in\mathscr{P}^b$,考虑 $\mu(\cdot)$ 和 $\nu(\cdot)$ 的耦合测度 $\Pi(\cdot,\cdot)$,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}[\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\mu),\mu)(\boldsymbol{x})]\Pi(\mathrm{d}\boldsymbol{y},\mathrm{d}\boldsymbol{x})=\\&\quad\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}[\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)(\boldsymbol{y})-\\&\quad\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\mu)(\boldsymbol{x})]\Pi(\mathrm{d}\boldsymbol{y},\mathrm{d}\boldsymbol{x})+\\&\quad\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}[\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\mu)(\boldsymbol{x})-\\&\quad\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\mu),\mu)(\boldsymbol{x})]\Pi(\mathrm{d}\boldsymbol{y},\mathrm{d}\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

通过求 $|\tilde{\boldsymbol{\phi}}|$ 的最大值,可得 $|\tilde{\boldsymbol{\phi}}|\leqslant c^2/12$, 因此,由假设 H2②(iii)可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\mu)(\boldsymbol{x})|\Pi(\mathrm{d}\boldsymbol{y},\mathrm{d}\boldsymbol{x})=\\&\quad\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu))-\\&\quad\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\mu)(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu))|\Pi(\mathrm{d}\boldsymbol{y},\mathrm{d}\boldsymbol{x})\leqslant C\mathcal{W}_2(\mu,\nu).\end{aligned}$$

由假设 H2②(i)、H1①可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\mu)(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\mu),\mu)(\boldsymbol{x})|\Pi(\mathrm{d}\boldsymbol{y},\mathrm{d}\boldsymbol{x})\leqslant\\&\quad\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)||\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\mu)(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu))-\\&\quad\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\mu)),\mu)(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\mu))|\Pi(\mathrm{d}\boldsymbol{y},\mathrm{d}\boldsymbol{x})\leqslant\\&\quad\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)||\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\mu)(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu))-\\&\quad\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\mu)(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\mu))+\\&\quad\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\mu)(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\mu))-\\&\quad\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\mu)),\mu)(\boldsymbol{x})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\mu))|\Pi(\mathrm{d}\boldsymbol{y},\mathrm{d}\boldsymbol{x})\leqslant\\&\quad\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)|(|\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\mu)(\boldsymbol{x})||\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu))-\\&\quad\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\mu))|+|\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\mu)(\boldsymbol{x})-\\&\quad\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\mu)),\mu)(\boldsymbol{x})||\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\mu))|)\Pi(\mathrm{d}\boldsymbol{y},\mathrm{d}\boldsymbol{x})\leqslant\\&\quad C\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}|\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu))-\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\mu))|+|\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu))-\\&\quad\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\mu))|\Pi(\mathrm{d}\boldsymbol{y},\mathrm{d}\boldsymbol{x})\leqslant\\&\quad C\mathcal{W}_2(\mu,\nu),\end{aligned}\tag{14}$$

最后一个不等式用到了 $\boldsymbol{z}\mapsto\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{z})$ 的 Lipschitz 连续性,引理 2 和 $\mu\in\mathscr{P}^b$,$\boldsymbol{p}$ 在 Θ^c 上连续.因此

$$\nu\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)(\boldsymbol{y})\nu(\mathrm{d}\boldsymbol{y})$$

是 Lipschitz 连续函数.类似地,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}(\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)\partial_\mu \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)\partial_\mu \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z}',\nu),\nu)(\boldsymbol{y}))\nu(\mathrm{d}\boldsymbol{y})\right| \leqslant$$
$$\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)|(|\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu))-$$
$$\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z}',\nu))|+$$
$$|\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z}',\nu))-$$
$$\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z}',\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z}',\nu))|)\nu(\mathrm{d}\boldsymbol{y})\leqslant$$
$$\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)|(|\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})||\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu))-\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z}',\nu))|+$$
$$|\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})-$$
$$\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z}',\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})||\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z}',\nu))|)\nu(\mathrm{d}\boldsymbol{y})\leqslant$$
$$C|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)-\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z}',\nu)|\leqslant C|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{z}'|,$$

其中,倒数第二个不等式用到了假设 H1①,映射 $(\boldsymbol{y},\nu)\mapsto\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})$ 有界,$\boldsymbol{p}$ 的连续性和映射 $\boldsymbol{z}\mapsto\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{z})$ 有界且连续,因此,$\boldsymbol{z}\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)(\boldsymbol{y})\nu(\mathrm{d}\boldsymbol{y})$ 是 Lipschitz 连续函数.类似地,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d}(\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)\partial_\mu \boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{b}(s,\boldsymbol{y},\nu)\partial_\mu \boldsymbol{G}(s,\boldsymbol{G}^{-1}(s,\boldsymbol{z},\nu),\nu)(\boldsymbol{y}))\nu(\mathrm{d}\boldsymbol{y})\right| \leqslant$$
$$\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu))-$$
$$\boldsymbol{b}(s,\boldsymbol{y},\nu)\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(s,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(s,\boldsymbol{z},\nu))|\nu(\mathrm{d}\boldsymbol{y})\leqslant$$
$$\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)-\boldsymbol{b}(s,\boldsymbol{y},\nu)||\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu))|+$$
$$|\boldsymbol{b}(s,\boldsymbol{y},\nu)||\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})-$$
$$\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(s,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(s,\boldsymbol{z},\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})||\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu))|+$$
$$|\boldsymbol{b}(s,\boldsymbol{y},\nu)\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(s,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(s,\boldsymbol{z},\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})||\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu))-\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{G}^{-1}(s,\boldsymbol{z},\nu))|\nu(\mathrm{d}\boldsymbol{y})\leqslant$$
$$\int_{\mathbb{R}^d}C|t-s|+C|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)-\boldsymbol{G}^{-1}(s,\boldsymbol{z},\nu)|\nu(\mathrm{d}\boldsymbol{y})\leqslant C|t-s|,$$

其中,倒数第二个不等式用到了假设 H2①、假设 H2②(iii),即 $\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu)),\nu)(\boldsymbol{y})$ 关于 t 是 Lipschitz 连续的, $\boldsymbol{p}$ 的连续性和映射 $\boldsymbol{z}\mapsto\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{z})$ 有界且连续.所以

$$t\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y},\nu)\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)(\boldsymbol{y})\nu(\mathrm{d}\boldsymbol{y})$$

是 Lipschitz 连续函数.由假设 H1①、②知 $\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{z},\nu)$ 关于 $(t,\boldsymbol{z},\nu)$ 是 Lipschitz 连续且有界的,由假设 H2②(i)知 $\partial_y\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)(\boldsymbol{y})$ 是 Lipschitz 连续且有界的,因此

$$(t,\boldsymbol{z},\nu)\mapsto\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{y},\nu)^{\mathrm{T}}\partial_y\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{z},\nu),\nu)(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{y},\nu)]\nu(\mathrm{d}\boldsymbol{y})$$

是 Lipschitz 连续函数.证毕. □

2 主要结果

2.1 漂移系数可分解的分布依赖随机微分方程及交互作用粒子系统

本小节考虑方程(1)的漂移系数可分解的情形,即对任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,\mu\in\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)$,

$$\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)=\boldsymbol{b}_1(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{b}_2(t,\boldsymbol{x},\mu),$$

其中 $\boldsymbol{b}_1:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 为逐段 Lipschitz 连续函数, 对任意的 $t,t'\in[0,T],\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}'\in\mathbb{R}^d,\ \mu,\ \mu'\in\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)$,存在常数 $L_6>0$ 使得

$$|\boldsymbol{b}_2(t,\boldsymbol{x},\mu)-\boldsymbol{b}_2(t',\boldsymbol{x}',\mu')|\leqslant L_6(|t-t'|+|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|+\mathcal{W}_2(\mu,\mu')).$$

由于

$$0\leqslant\lim_{h\to0+}\frac{|\boldsymbol{b}_2(t,\boldsymbol{\eta}-h\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\eta}),\mu)-\boldsymbol{b}_2(t,\boldsymbol{\eta}+h\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\eta}),\mu)|}{2\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{\eta},\mu)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\eta})\|_{\mathrm{HS}}^2}\leqslant\lim_{h\to0+}\frac{2L_1h|\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\eta})|}{2\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{\eta},\mu)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\eta})\|_{\mathrm{HS}}^2}=0,$$

因此,$\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{\eta})=\lim_{h\to0+}\dfrac{\boldsymbol{b}_1(t,\boldsymbol{\eta}-h\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\eta}))-\boldsymbol{b}_1(t,\boldsymbol{\eta}+h\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\eta}))}{2\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{\eta},\mu)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{\eta})\|_{\mathrm{HS}}^2}$,即 $\boldsymbol{\alpha}$ 不依赖于 $\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,从而

$$\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x})=\begin{cases}\boldsymbol{x}+\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})), & \boldsymbol{x}\in\Theta^{\varepsilon_0},\\ \boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\backslash\Theta^{\varepsilon_0}.\end{cases}\tag{15}$$

定理 1　对给定的 $p\geqslant2$,设 $\boldsymbol{\xi}\in L_0^p(\mathbb{R}^d)$,$0<c<c_0$,若假设 H1 成立,则方程(1)在 $\mathcal{S}^p([0,T])$ 上有唯一强解.

证明　由引理 4 可知方程(5)的系数是 Lipschitz 连续的,Lipschitz 连续可推出单调条件成立,因此,由文献[10]中 theorem 2.1 可知方程(5)有唯一强解 $\boldsymbol{Z}_t$.当 $0<c<c_0$ 时,由 1.2 小节知 $\boldsymbol{G}$ 有唯一的逆函数 $\boldsymbol{G}^{-1}$,由 Itô 公式可得 $\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t)$ 满足方程(1),从而方程(1)的强解存在.若 $\boldsymbol{X}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{X}_2(t)$ 都是方程(1)的强解,则由 Itô 公式可得 $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_1(t))$ 和 $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_2(t))$ 都是方程(5)的强解.由强解的唯一性可知 $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_1(t))=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_2(t))$,又 $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x})$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 为单射,从而 $\boldsymbol{X}_1(t)=\boldsymbol{X}_2(t)$.证毕. □

与方程(1)对应的交互作用的粒子 $(\boldsymbol{X}_t^{i,N})_{t\in[0,T]}$,$i\in\{1,\cdots,N\}$ 满足

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t^{i,N}=\boldsymbol{b}_1(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N})+\boldsymbol{b}_2(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})\mathrm{d}t+\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t^i,\tag{16}$$

其中,$\boldsymbol{X}_0^{i,N}=\boldsymbol{\xi}^i$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的独立复制,$(\boldsymbol{W}_t^i)_{t\in[0,T]}$ 是相互独立的 d 维 Brown 运动,且经验测度 $\mu_t^{X^N}(\mathrm{d}\boldsymbol{x})=\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{\boldsymbol{X}_t^{j,N}}(\mathrm{d}\boldsymbol{x})$ 逼近真实测度 $\mathcal{L}_{X_t}$,其中 $\delta_{\boldsymbol{x}}$ 表示在 $\boldsymbol{x}$ 处的 Dirac 测度.称

$$(\boldsymbol{X}_t^N)_{t\in[0,T]}=(\boldsymbol{X}_t^{1,N},\cdots,\boldsymbol{X}_t^{N,N})_{t\in[0,T]}^{\mathrm{T}}$$

为交互作用的粒子系统,易知每个粒子 $\boldsymbol{X}_t^{i,N}$ 服从相同的分布.

定理 2　对给定的 $p\geqslant2$,$\boldsymbol{\xi}\in L_0^p(\mathbb{R}^d)$,设 $0<c<c_0$,若假设 H1 成立,则方程(16)在 $\mathcal{S}^p([0,T])$ 上有唯一强解.

证明　对任意的 $i=1,2,\cdots,N$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{Z}_t^{i,N}=&[\partial_t\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N})+\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N})(\boldsymbol{b}_1(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N})+\boldsymbol{b}_2(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N}))]\mathrm{d}t+\\&\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N})\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t^i+\\&\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})\partial_{\boldsymbol{xx}}^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N})\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})]\mathrm{d}t=\\&\tilde{\boldsymbol{b}}(t,\boldsymbol{Z}_t^{i,N},\mu_t^{Z^N})\mathrm{d}t+\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t,\boldsymbol{Z}_t^{i,N},\mu_t^{Z^N})\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t^i,\end{aligned}\tag{17}$$

其中,$\boldsymbol{Z}_0^{i,N}=\boldsymbol{G}(0,\boldsymbol{\xi}^i,\delta_{\xi^i})$,$\mu_t^{Z^N}(\mathrm{d}z)=\dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^N\delta_{G^{-1}(t,Z_0^{j,N})}(\mathrm{d}z)$.

由引理 4 及文献[10]中 theorem 2.1 知式(17)有唯一强解 $\boldsymbol{Z}_t^{i,N}$.当 $0<c<c_0$ 时,由 1.2 小节知 $\boldsymbol{G}$ 有唯一的逆函数 $\boldsymbol{G}^{-1}$,由 Itô 公式可得 $\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t^{i,N})$ 满足方程(16),从而方程(16)的强解存在.若 $\boldsymbol{X}_1^{i,N}(t)$ 和 $\boldsymbol{X}_2^{i,N}(t)$ 都是方程(16)的强解,则由 Itô 公式可得 $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_1^{i,N}(t))$ 和 $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_2^{i,N}(t))$ 都是方程(17)的强解.由强解的唯一性及 $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x})$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 为单射可得 $\boldsymbol{X}_1^{i,N}(t)=\boldsymbol{X}_2^{i,N}(t)$.证毕. □

2.2　漂移系数不可分解的分布依赖随机微分方程及交互作用粒子系统

定理 3　若假设 H1、H2 成立,对给定的 $p\geqslant2$,$\boldsymbol{\xi}\in L_0^p(\mathbb{R}^d)$,$0<c<c_0$,则方程(1)在 $\mathcal{S}^p([0,T])$ 上有唯一强解.

证明　对给定的测度流 $(\mu_t)_{t\in[0,T]}\in\mathcal{C}([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$,由引理 4 知方程(5)有唯一强解.由引理 4,BDG 不等式,Hölder 不等式和 Gronwall 不等式可得对 $(\mu_t)_{t\in[0,T]}$,$(\nu_t)_{t\in[0,T]}\in\mathcal{P}^b$,$\forall t\in[0,T]$ 有

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}[|\boldsymbol{Z}_t^\mu-\boldsymbol{Z}_t^\nu|^2]\leqslant\\
&\quad C\mathcal{E}\left[\int_0^t|\tilde{\boldsymbol{b}}(s,\boldsymbol{Z}_s^\mu,\mu_s)-\tilde{\boldsymbol{b}}(s,\boldsymbol{Z}_s^\nu,\nu_s)|^2\mathrm{d}s\right]+C\mathcal{E}\left[\int_0^t|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s,\boldsymbol{Z}_s^\mu,\mu_s)-\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s,\boldsymbol{Z}_s^\nu,\nu_s)|^2\mathrm{d}s\right]\leqslant\\
&\quad C\mathcal{E}\left[\int_0^t|\tilde{\boldsymbol{b}}(s,\boldsymbol{Z}_s^\mu,\mu_s)-\tilde{\boldsymbol{b}}(s,\boldsymbol{Z}_s^\nu,\mu_s)|^2\mathrm{d}s\right]+C\mathcal{E}\left[\int_0^t|\tilde{\boldsymbol{b}}(s,\boldsymbol{Z}_s^\nu,\mu_s)-\tilde{\boldsymbol{b}}(s,\boldsymbol{Z}_s^\nu,\nu_s)|^2\mathrm{d}s\right]+\\
&\quad C\mathcal{E}\left[\int_0^t|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s,\boldsymbol{Z}_s^\mu,\mu_s)-\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s,\boldsymbol{Z}_s^\nu,\mu_s)|^2\mathrm{d}s\right]+C\mathcal{E}\left[\int_0^t|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s,\boldsymbol{Z}_s^\nu,\mu_s)-\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(s,\boldsymbol{Z}_s^\nu,\nu_s)|^2\mathrm{d}s\right]\leqslant\\
&\quad C\mathcal{E}\left[\int_0^t(|\boldsymbol{Z}_s^\mu-\boldsymbol{Z}_s^\nu|^2+\mathcal{W}_2^2(\mu_s,\nu_s))\mathrm{d}s\right]\leqslant C\int_0^t\mathcal{W}_2^2(\mu_s,\nu_s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}\tag{18}
$$

对 $k\geqslant 0,t\in[0,T]$，定义 Picard 迭代

$$
\mu_t^{k+1}=\mathrm{Law}(\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t^{\mu^k},\mu_t^k)),\tag{19}
$$

其中，$\boldsymbol{Z}_t^{\mu^0}=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{\xi},\delta_{\boldsymbol{\xi}}),\mu_t{}^0=\delta_{\boldsymbol{\xi}}$，定义 $\boldsymbol{X}_t^{k+1}=\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t^{\mu^k},\mu_t^k)$.由引理3知 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\ni\mu\mapsto\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{y},\mu)$ 属于 $\mathcal{C}_b^{1,1}$，因此，对 $\boldsymbol{G}^{-1}$ 用 Itô 公式可得 $\boldsymbol{X}_t^{k+1}$ 是方程

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t^{k+1}=\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{X}_t^{k+1},\mu_t^k)\mathrm{d}t+\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X}_t^{k+1},\mu_t^k)\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t,\qquad \boldsymbol{X}_0^{k+1}=\boldsymbol{\xi}
$$

的解.由假设 H1②和 H2①可得 $(\boldsymbol{X}_t^{k+1})_{t\in[0,T]}$ 的矩一致有界，即

$$
\sup_{k\geqslant 1}\mathcal{E}[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\boldsymbol{X}_t^{k+1}|^p]\leqslant C(1+\mathcal{E}[|\boldsymbol{\xi}|^p]).\tag{20}
$$

由引理3及式(18)可得

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}\mathcal{W}_2^2(\mu_t^{k+1},\mu_t^k)\leqslant\sup_{t\in[0,T]}\mathcal{E}[|\boldsymbol{X}_t^{k+1}-\boldsymbol{X}_t^k|^2]\leqslant\\
&\quad 2\sup_{t\in[0,T]}\mathcal{E}[|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t^{\mu^k},\mu_t^k)-\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t^{\mu^{k-1}},\mu_t^k)|^2]+\\
&\quad 2\sup_{t\in[0,T]}\mathcal{E}[|\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t^{\mu^{k-1}},\mu_t^k)-\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t^{\mu^{k-1}},\mu_t^{k-1})|^2]\leqslant\\
&\quad C\int_0^T\mathcal{W}_2^2(\mu_s^k,\mu_s^{k-1})\mathrm{d}s+\frac{Cc^2}{6}\sup_{t\in[0,T]}\mathcal{W}_2^2(\mu_t^k,\mu_t^{k-1})\leqslant\\
&\quad C\int_0^T\mathcal{W}_2^2(\mu_s^k,\mu_s^{k-1})\mathrm{d}s+\frac{Cc^2}{6}\sup_{t\in[0,T]}\mathcal{E}[|\boldsymbol{X}_t^k-\boldsymbol{X}_t^{k-1}|^2].
\end{aligned}\tag{21}
$$

选择常数 $C>0,0<c<c_0$，使得 $L=Cc^2/6<1$.令 $0<T_0<T$ 且 $CT_0+L<1$.对 $t\in[0,T]$，假设方程(1)存在两个解 $(\boldsymbol{X},\mu),(\boldsymbol{Y},\nu)$，其中，对 $t\in[0,T]$，μ_t,ν_t 分别为 $\boldsymbol{X}_t,\boldsymbol{Y}_t$ 的边缘分布，由式(21)可得方程(1)在 $[0,T_0]$ 上解的唯一性.另外，序列 $(\mu^k)_k$ 是完备的度量空间 $\mathcal{C}([0,T],\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$ 上的 Cauchy 序列.因此，式(19)存在一个不动点 $\boldsymbol{X}_t=\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t^\mu,\mu_t)$，其中 $\mu_t=\mathcal{L}_{\boldsymbol{X}_t}$.对 $\boldsymbol{G}^{-1}$ 用 Itô 公式可得方程(1)在 $[0,T_0]$ 有唯一强解.把 T_0 看作初始时刻，重复上面的步骤，可以将解扩展到区间 $[T_0,T_1]$，其中 $T_0<T_1<T$.因为 T_1 的选择只依赖于 $\boldsymbol{X}_{T_0}$ 的二阶矩，由式(20)知 $\boldsymbol{X}_t$ 在 $[0,T]$ 上一致有界，从而这种扩展是可能的.继续这种扩展可得方程(1)在 $[0,T]$ 上有唯一强解.证毕. □

假设 H3 假设 H2②(ii)、(iii) 成立，且

① 假设 H1①、H1②成立，对任意的 $t\in[0,T],\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d,\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$，存在常数 $L_7>0$ 使得 $\|\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\mu)\|\leqslant L_7$.

② 存在单增函数 $Ł_6(t)>0$，使得对任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\backslash\Theta$，任意的 $\mu,\nu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ 有

$$
|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)-\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\nu)|\leqslant Ł_6(t)\mathcal{W}_2(\mu,\nu).
$$

另外，对任意的 $\mu\in\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$，$\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 在 $\mathbb{R}^d\backslash\Theta$ 上满足逐段 Lipschitz 连续条件，且 Lipschitz 常数不依赖于分布.

③ 映射 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\ni\mu\mapsto\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 是有界函数且属于 $\mathcal{C}_b^{1,2}$，且映射

$$
\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^d\ni(\mu,\boldsymbol{y})\mapsto\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{x},\mu)(\boldsymbol{y}),\ \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^d\ni(\mu,\boldsymbol{y})\mapsto\partial_{\boldsymbol{y}}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{x},\mu)(\boldsymbol{y}),
$$

$$
\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\ni(\mu,\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')\mapsto\partial_\mu^2\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{x},\mu)(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}')
$$

有界且 Lipschitz 连续.

与方程(1)对应的交互作用粒子 $(\boldsymbol{X}_t^{i,N})_{t\in[0,T]}, i\in\{1,\cdots,N\}$ 满足

$$\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t^{i,N}=\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})\mathrm{d}t+\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t^i, \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{X}_0^{i,N}=\boldsymbol{\xi}^i$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的独立复制,$(\boldsymbol{W}_t^i)_{t\in[0,T]}$ 是相互独立的 d 维 Brown 运动.

当漂移系数不可分解时,由式(2)可得

$$\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{x}^N,\mu^{x^N})=\lim_{h\to0+}\frac{\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}^N-h\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^N),\mu^{x^N})-\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}^N+h\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^N),\mu^{x^N})}{2\|\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x}^N,\mu^{x^N})\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^N)\|_{\mathrm{HS}}^2},$$

此时

$$\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{x^N})=\begin{cases}\boldsymbol{x}_i+\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{\alpha}(t,p(\boldsymbol{x}_i),\mu^{x^N}), & \boldsymbol{x}_i\in\Theta^{\varepsilon_0},\\ \boldsymbol{x}_i, & \boldsymbol{x}_i\in\mathbb{R}^d\backslash\Theta^{\varepsilon_0},\end{cases} \tag{23}$$

其中　$0<\varepsilon_0<\mathrm{Reach}(\Theta)$.

设 $(\mathbb{R}^d)^N\ni\boldsymbol{x}^N\mapsto\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{x}^N)=\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{x^N})$,定义 $\boldsymbol{G}_N:(\mathbb{R}^d)^N\to(\mathbb{R}^d)^{N\times N}$,

$$\boldsymbol{G}_N(\boldsymbol{x}^N)=(\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{x}^N),\cdots,\boldsymbol{G}_N(\boldsymbol{x}^N))^{\mathrm{T}}.$$

令 $[\boldsymbol{X}^{i,N}]_t$ 表示 $\boldsymbol{X}_t^{i,N}$ 的二次变差.对任意的 $t\in[0,T], i\in\{1,\cdots,N\}$, 由文献[15]中 proposition 5.35 得

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})=\mathrm{d}\boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{X}_t^{1,N},\cdots,\boldsymbol{X}_t^{N,N})=\\&\quad\partial_{\boldsymbol{x}_i}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t^{i,N}+\frac{1}{2}\partial_{\boldsymbol{x}_i}^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})\mathrm{d}[\boldsymbol{X}^{i,N}]_t+\partial_t\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})\mathrm{d}t+\\&\quad\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})(\boldsymbol{X}_t^{k,N})\mathrm{d}\boldsymbol{X}_t^{k,N}+\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^N\partial_y\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})(\boldsymbol{X}_t^{k,N})\mathrm{d}[\boldsymbol{X}^{k,N}]_t+\\&\quad\frac{1}{2N^2}\sum_{k=1}^N\partial_\mu^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})(\boldsymbol{X}_t^{k,N},\boldsymbol{X}_t^{k,N})\mathrm{d}[\boldsymbol{X}^{k,N}]_t+\\&\quad\frac{1}{N}\partial_{\boldsymbol{x}_i}\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_t^{i,N},\mu_t^{X^N})(\boldsymbol{X}_t^{i,N})\mathrm{d}[\boldsymbol{X}^{i,N}]_t.\end{aligned}$$

引理 5　若假设 H3③成立, $0<c<c_0$,则 $\boldsymbol{G}_N$ 为可逆的函数.

证明　由 Hadamard 逆函数定理(文献[16]中 theorem 2.2)知要证 $\boldsymbol{G}_N$ 可逆,只需要证 $\boldsymbol{G}_N$ 满足:$\boldsymbol{G}_N\in\mathcal{C}^1((\mathbb{R}^d)^N,(\mathbb{R}^d)^{N\times N})$, $\lim_{|\boldsymbol{x}^N|\to\infty}|\boldsymbol{G}_N(\boldsymbol{x}^N)|=\infty$ 和对任意的 $\boldsymbol{x}^N\in(\mathbb{R}^d)^N$, $\boldsymbol{G}_N'(\boldsymbol{x}^N)$ 可逆.由 $\boldsymbol{G}_N$的定义、$\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ 的一致有界性,只需证明对任意的 $\boldsymbol{x}^N\in(\mathbb{R}^d)^N$, $\boldsymbol{G}_N'(\boldsymbol{x}^N)$ 可逆.注意到

$$\boldsymbol{G}_N'(\boldsymbol{x}^N)=I_{N\times N}+\mathrm{diag}_{N\times N}(\tilde{\boldsymbol{\phi}}'(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{\alpha}_N(\boldsymbol{x}^N),\cdots,\tilde{\boldsymbol{\phi}}'(\boldsymbol{x}_N)\boldsymbol{\alpha}_N(\boldsymbol{x}^N))+\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}^N)\boldsymbol{\alpha}_N'(\boldsymbol{x}^N),$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}^N)=(\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}_1),\cdots,\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}_N))^{\mathrm{T}}$, $(\boldsymbol{\alpha}_N'(\boldsymbol{x}^N))_i=\dfrac{1}{N}\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{x}_t^N,\mu_t^{x^N})(\boldsymbol{x}_i)$, $\boldsymbol{\alpha}_N'$ 是行向量.定义

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{x}^N)=\mathrm{diag}_{N\times N}(\tilde{\boldsymbol{\phi}}'(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{\alpha}_N(\boldsymbol{x}^N),\cdots,\tilde{\boldsymbol{\phi}}'(\boldsymbol{x}_N)\boldsymbol{\alpha}_N(\boldsymbol{x}^N))+\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}^N)\boldsymbol{\alpha}_N'(\boldsymbol{x}^N),$$

从而 $\boldsymbol{G}_N'(\boldsymbol{x}^N)$ 为线性算子 $id_{(\mathbb{R}^d)^N}+\mathscr{A}(\boldsymbol{x}^N):(\mathbb{R}^d)^N\to(\mathbb{R}^d)^N$.当 $0<c<c_0$ 时,$\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}_i)$,$\tilde{\boldsymbol{\phi}}'(\boldsymbol{x}_i)\to0$,且 $\boldsymbol{\alpha}_N$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_N'$有界,所以 $\boldsymbol{G}_N'(\boldsymbol{x}^N)\to id_{(\mathbb{R}^d)^N}$,即当 $0<c<c_0$ 时,$\boldsymbol{G}_N'(\boldsymbol{x}^N)$ 可逆.证毕. □

令 $\boldsymbol{Z}_t^N=\boldsymbol{G}_N(\boldsymbol{X}_t^{1,N},\cdots,\boldsymbol{X}_t^{N,N})$, 则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Z}_t^N=\boldsymbol{B}_N(\boldsymbol{G}_N^{-1}(\boldsymbol{Z}_t^N))\mathrm{d}t+\boldsymbol{\Sigma}_N(\boldsymbol{G}_N^{-1}(\boldsymbol{Z}_t^N))\mathrm{d}\boldsymbol{W}_t^N,\ \boldsymbol{Z}_0^N=\boldsymbol{G}_N(\boldsymbol{X}_0^{1,N},\cdots,\boldsymbol{X}_0^{N,N}), \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}_N(\boldsymbol{x}^N)=(B_1(\boldsymbol{x}^N),\cdots,B_N(\boldsymbol{x}^N))^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\Sigma}_N(\boldsymbol{x}^N)=(\Sigma^{i,j}(\boldsymbol{x}^N))_{i,j\in\{1,\cdots,N\}},\boldsymbol{W}_t^N=(W_t^1,\cdots,W_t^N)^{\mathrm{T}},\\&B_i(\boldsymbol{x}^N)=\partial_t\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{x^N})+\partial_{\boldsymbol{x}_i}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{x^N})\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{x^N})+\\&\quad\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{x^N})(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}_k,\mu^{x^N})+\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})\partial_{\boldsymbol{x}_i}^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})]+$$
$$\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x}_k,\mu^{\boldsymbol{x}^N})\partial_y\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x}_k,\mu^{\boldsymbol{x}^N})]+$$
$$\frac{1}{2N^2}\sum_{k=1}^{N}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x}_k,\mu^{\boldsymbol{x}^N})\partial_\mu^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x}_k,\mu^{\boldsymbol{x}^N})]+$$
$$\frac{1}{N}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})\partial_{\boldsymbol{x}_i}\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})],$$

$$\Sigma^{i,j}(\boldsymbol{x}^N)=\partial_{\boldsymbol{x}_i}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})\delta_{i,j}+\frac{1}{N}\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x}_j,\mu^{\boldsymbol{x}^N}).\tag{25}$$

引理 6 若假设 H3 成立,则 $\boldsymbol{B}_N,\boldsymbol{\Sigma}_N$ 满足局部 Lipschitz 连续性和线性增长条件.

证明 由 $\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 和 $\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)(\boldsymbol{y})$ 关于 $(\boldsymbol{x},\mu)$ Lipschitz 连续及式(25)可得对 $\boldsymbol{x}^N,\boldsymbol{y}^N\in(\mathbb{R}^d)^N$,

$$\|\boldsymbol{\Sigma}_N(\boldsymbol{x}^N)-\boldsymbol{\Sigma}_N(\boldsymbol{y}^N)\|^2\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{N}|\Sigma^{i,i}(\boldsymbol{x}^N)-\Sigma^{i,i}(\boldsymbol{y}^N)|^2+\sum_{i\neq j}|\Sigma^{i,j}(\boldsymbol{x}^N)-\Sigma^{i,j}(\boldsymbol{y}^N)|^2\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{N}|\partial_{\boldsymbol{x}_i}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})-\partial_{\boldsymbol{y}_i}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})|^2+$$
$$\frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}|\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})(\boldsymbol{x}_j)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x}_j,\mu^{\boldsymbol{x}^N})-\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})(\boldsymbol{y}_j)\sigma(t,\boldsymbol{y}_j,\mu^{\boldsymbol{y}^N})|^2\leqslant$$
$$C|\boldsymbol{x}^N-\boldsymbol{y}^N|^2,$$

其中,最后一个不等式用到了假设 H1②、假设 H3①和引理 1.

$$|B_i(\boldsymbol{x}^N)-B_i(\boldsymbol{y}^N)|^2\leqslant$$
$$C|\partial_{\boldsymbol{x}_i}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})-\partial_{\boldsymbol{y}_i}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})+$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})\partial_{\boldsymbol{x}_i}^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})]-$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})\partial_{\boldsymbol{y}_i}^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})]|^2+$$
$$\frac{C}{N}\sum_{k=1}^{N}|\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}_k,\mu^{\boldsymbol{x}^N})-\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})(\boldsymbol{y}_k)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y}_k,\mu^{\boldsymbol{y}^N})|^2+$$
$$\frac{C}{2N}\sum_{k=1}^{N}|\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x}_k,\mu^{\boldsymbol{x}^N})\partial_y\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x}_k,\mu^{\boldsymbol{x}^N})]-$$
$$\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{y}_k,\mu^{\boldsymbol{y}^N})\partial_y\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})(\boldsymbol{y}_k)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{y}_k,\mu^{\boldsymbol{y}^N})]|^2+$$
$$\frac{C}{2N^2}\sum_{k=1}^{N}|\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x}_k,\mu^{\boldsymbol{x}^N})\partial_\mu^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x}_k,\mu^{\boldsymbol{x}^N})]-$$
$$\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{y}_k,\mu^{\boldsymbol{y}^N})\partial_\mu^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})(\boldsymbol{y}_k,\boldsymbol{y}_k)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{y}_k,\mu^{\boldsymbol{y}^N})]|^2+$$
$$\frac{C}{N}|\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})\partial_{\boldsymbol{x}_i}\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})]-$$
$$\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})\partial_{\boldsymbol{y}_i}\partial_\mu\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})(\boldsymbol{y}_i)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})]|^2=\sum_{i=1}^{5}\Pi_i.$$

由假设 H3①和 H3③可得 Π_3,Π_4 和 Π_5 是有界且 Lipschitz 连续的.

当 $|\boldsymbol{x}^N|,|\boldsymbol{y}^N|\leqslant R$ 时,由假设 H3②、H3③和 $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ 的 Lipschitz 连续性及有界性可知存在常数 $L_R>0$ 使得

$$\Pi_2\leqslant\frac{C}{N}\sum_{k=1}^{N}|\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{\boldsymbol{x}^N})(\boldsymbol{x}_k)\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}_k,\mu^{\boldsymbol{x}^N})-\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{\boldsymbol{y}^N})(\boldsymbol{y}_k)\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y}_k,\mu^{\boldsymbol{y}^N})|^2+$$

$$\frac{C}{N}\sum_{k=1}^{N}|\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{y^N})(\boldsymbol{y}_k)\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{x}_i)b(t,\boldsymbol{y}_k,\mu^{y^N})-\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{y^N})(\boldsymbol{y}_k)\tilde{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{y}_i)b(t,\boldsymbol{y}_k,\mu^{y^N})|^2\leqslant$$
$$\frac{C}{N}\sum_{k=1}^{N}|\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{x^N})(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}_k,\mu^{x^N})-\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{y^N})(\boldsymbol{y}_k)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y}_k,\mu^{y^N})|^2+$$
$$L_R|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i|^2.$$

此外,由假设 H2②(ii)、(iii),可得

$$\sum_{k=1}^{N}|\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{x}_i,\mu^{x^N})(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}_k,\mu^{x^N})-\partial_\mu\boldsymbol{\alpha}(t,\boldsymbol{y}_i,\mu^{y^N})(\boldsymbol{y}_k)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{y}_k,\mu^{y^N})|^2\leqslant$$
$$C\sum_{k=1}^{N}|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{y}_k|^2,$$

从而

$$\Pi_2\leqslant L_R|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i|^2+\frac{C}{N}\sum_{k=1}^{N}|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{y}_k|^2.$$

由文献[2]中 lemma 3.6、lemma 3.9 和 lemma 3.11 可得

$$\boldsymbol{x}\mapsto\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x},\mu)+\frac{1}{2}\operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x},\mu)\partial_{\boldsymbol{x}}^2\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)\boldsymbol{\sigma}(t,\boldsymbol{x},\mu)]$$

是 Lipschitz 连续函数.由假设 H3①—H3③可得

$$\Pi_1\leqslant C\left(|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{y}_i|^2+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{y}_k|^2\right).$$

因此,由 $|\boldsymbol{B}_N(\boldsymbol{x}^N)-\boldsymbol{B}_N(\boldsymbol{y}^N)|^2=\sum_{i=1}^{N}|B_i(\boldsymbol{x}^N)-B_i(\boldsymbol{y}^N)|^2$ 可得 $\boldsymbol{B}_N$ 是 Lipschitz 连续函数.

最后,由 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{\sigma}$ 满足增长条件和 $\boldsymbol{G},\boldsymbol{\alpha}$ 导函数的有界性可得 $\boldsymbol{B}_N,\boldsymbol{\Sigma}_N$ 满足线性增长条件,即存在常数 $C>0$,使得对任意的 $\boldsymbol{x}^N\in(\mathbb{R}^d)^N$,$|\boldsymbol{B}_N(\boldsymbol{x}^N)|+\|\boldsymbol{\Sigma}_N(\boldsymbol{x}^N)\|\leqslant C(1+|\boldsymbol{x}^N|)$.证毕.

定理 4　对给定的 $p\geqslant 2$,$\boldsymbol{\xi}\in L_0^p(\mathbb{R}^d)$,$0<c<c_0$,若假设 H3 成立,则方程(22)在 $\mathscr{S}^p([0,T])$ 上有唯一强解.

证明　由引理 6 可知 $\boldsymbol{B}_N,\boldsymbol{\Sigma}_N$ 满足局部 Lipschitz 连续和线性增长条件,从而由文献[17]中 theorem 5.2.5 可得方程(24)有唯一强解 $\boldsymbol{Z}^N$.由引理 5 知 $\boldsymbol{G}_N^{-1}$ 存在且 $\boldsymbol{G}_N^{-1}$ 继承 $\boldsymbol{G}_N$ 的正则性,由 Itô 公式可得 $\boldsymbol{G}^{-1}(t,\boldsymbol{Z}_t^{i,N},\mu_t^{\boldsymbol{Z}^N})$ 满足方程(22),从而方程(22)的强解存在.若 $\boldsymbol{X}_1^{i,N}(t)$ 和 $\boldsymbol{X}_2^{i,N}(t)$ 都是方程(22)的强解,则由 Itô 公式可得 $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_1^{i,N}(t),\mu_t^{\boldsymbol{X}^N})$ 和 $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{X}_2^{i,N}(t),\mu_t^{\boldsymbol{X}^N})$ 都是方程(24)的强解.由强解的唯一性及 $\boldsymbol{G}(t,\boldsymbol{x},\mu)$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 为单射可得 $\boldsymbol{X}_1^{i,N}(t)=\boldsymbol{X}_2^{i,N}(t)$.证毕. □

3　结　　论

本文在系数关于空间变量不是 Lipschitz 连续的条件下,借助于 Zvonkin 变换得到了一类分布依赖的高维随机微分方程及相应的粒子系统解的存在唯一性.本文中 Zvonkin 变换的变换函数不同于文献[1]中系数不依赖于时间和分布的一维随机微分方程情形下的变换函数.本文的变换函数不仅和状态有关,还和时间以及分布有关.为了得到变换后的方程解的存在唯一性,本文重点考虑了分布函数关于每个分量的 Lipschitz 连续性,进而通过逆变换得到了原方程解的存在唯一性.本文的结论有效地补充了文献[1-2,7].

参考文献(References)：

[1]　LEOBACHER G, SZOLGYENYI M. A numerical method for SDEs with discontinuous drift[J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2016, **56**(1): 151-162.

[2]　LEOBACHER G, SZOLGYENYI M. A strong order 1/2 method for multidimensional SDE with discontinuous drift[J]. *The Annals of Applied Probablity*, 2015, **27**(4): 2383-2418.

［3］ 马丽，马瑞楠. 一类随机泛函微分方程带随机步长的 EM 逼近的渐近稳定［J］. 应用数学和力学，2019，**40**（1）：97-107.（MA Li，MA Ruinan. Almost sure asymptotic stability of Euler-Maruyama method with random variable stepsizes for stochastic functional differential equations［J］. *Applied Mathematics and Mechanics*，2019，**40**（1）：97-107.（in Chinese））

［4］ 梁青. 一类带扰动的随机脉冲泛函微分方程解的渐近性［J］. 应用数学和力学，2022，**43**（9）：1034-1044.（LIANG Qing. Asymptotic properties of the solution to a class of perturbed stochastic impulsive functional differential equations［J］. *Applied Mathematics and Mechanics*，2022，**43**（9）：1034-1044.（in Chinese））

［5］ 李光洁，杨启贵. G-Brown 运动驱动的非线性随机时滞微分方程的稳定化［J］. 应用数学和力学，2021，**42**（8）：841-851.（LI Guangjie，YANG Qigui. Stabilization of nonlinear stochastic delay differential equation driven by G-Brownian motion［J］. *Applied Mathematics and Mechanics*，2021，**42**（8）：841-851.（in Chinese））

［6］ SCHEUTZOW M. Uniqueness and non-uniqueness of solutions of Vlasov-McKean equations［J］. *Journal of the Australian Mathematical Society*，1987，**43**（2）：246-256.

［7］ LEOBACHER G，REISINGER C，STOCKINGER W. Well-posedness and numerical schemes for one-dimensional McKean-Vlasov equations and interacting particle systems with discontinuous drift［J］. *BIT Numerical Mathematics*，2022，**62**（4）：1505-1549.

［8］ ROCKNER M，ZHANG X. Well-posedness of distribution dependent SDEs with singular drifts［J］. *Bernoulli*，2021，**27**（2）：1131-1158.

［9］ HUANG X，WANG F. Singular McKean-Vlasov（reflecting）SDEs with distribution dependent noise［J］. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*，2020，**154**（1）：126301.

［10］ WANG F. Distribution dependent SDEs for Landau type equations［J］. *Stochastic Processes and Their Applications*，2018，**128**（2）：595-621.

［11］ CHAUDRU DE RAYNAL P E. Strong well posedness of McKean-Vlasov stochastic differential equations with Hölder drift［J］. *Stochastic Processes and Their Applications*，2020，**130**（1）：79-107.

［12］ REN P. Singular McKean-Vlasov SDEs：well-posedness，regularities and Wang's Harnack inequality［J］. *Stochastic Processes and Their Applications*，2023，**156**：291-311.

［13］ ZHAO G. On distribution dependent SDEs with singular drifts［R/OL］.［2023-03-11］. https://arxiv.org/abs/2003.04829v3.

［14］ HAMMERSLEY W，SISKA D，SZPRUCH L. McKean-Vlasov SDEs under measure dependent Lyapunov conditions［J］. *Annales de l' Institut Henri Poincare*，*Probabilites et Statistiques*，2021，**57**（2）：1032-1057.

［15］ CARMONA R，DELARUE F. *Probabilistic Theory of Mean Field Games With Applications I*［M］. Springer Cham，2018.

［16］ RUZHANSKY M，SUGIMOTO M. On global inversion of homogeneous maps［J］. *Bulletin of Mathematical Sciences*，2015，**5**（1）：13-18.

［17］ MAO Xuerong. *Stochastic Differential Equations and Applications*［M］. Chichester：Horwood Publishing Ltd，2008.