

# 非线性系统的固定时间渐近稳定性及能量消耗估计\*

翟国庆<sup>1</sup>, 陈巧玉<sup>1</sup>, 童东兵<sup>1</sup>, 周武能<sup>2</sup>

(1. 上海工程技术大学 数理与统计学院, 上海 201620;  
2. 东华大学 信息科学与技术学院, 上海 200051)

**摘要:** 讨论了非线性系统的固定时间渐近稳定性和能量消耗估计问题. 首先, 提出了一种新的具有非线性和时变时滞的动态模型. 其次, 为了有效提高系统的收敛速率, 采用了一种固定时间控制策略. 通过构建 Lyapunov 泛函, 以及使用不等式分析方法, 获得了误差系统达到固定时间渐近稳定的准则. 同时, 为了预测系统运行过程中的能量消耗, 估计了系统能量消耗的上界, 这有助于评估系统的运行时间. 最后, 通过一个数值例子进行了模拟实验, 验证了所得结果的可行性和有效性.

**关键词:** 固定时间控制; 渐近稳定性; 时变时滞; 非线性系统; 能量消耗估计  
**中图分类号:** O175.13      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.440041

## Fixed-Time Asymptotic Stability and Energy Consumption Estimation of Nonlinear Systems

ZHAI Guoqing<sup>1</sup>, CHEN Qiaoyu<sup>1</sup>, TONG Dongbing<sup>1</sup>, ZHOU Wuneng<sup>2</sup>

(1. *School of Mathematics, Physics and Statistics, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, P.R.China;*  
2. *College of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai 200051, P.R.China*)

**Abstract:** The fixed-time asymptotic stability and energy consumption estimation problems of nonlinear systems were discussed. First, a novel dynamic model with nonlinearity and time-varying delays was proposed. Second, to effectively improve the convergence rate of the system, a fixed-time control strategy was adopted. Through construction of the Lyapunov functional and with the inequality analysis method, sufficient conditions for the error system were obtained to achieve the fixed-time asymptotic stability. Moreover, to predict the energy consumption during the operation of the system, the upper bound of the energy consumption for the system was estimated, which is helpful to evaluate the operation time of the system. Finally, a numerical example was given to verify the feasibility and effectiveness of the results.

**Key words:** fixed-time control; asymptotic stability; time-varying delay; nonlinear system; energy consumption estimation

\* 收稿日期: 2023-02-20; 修订日期: 2023-07-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(61673257)

作者简介: 翟国庆(1999—), 男, 硕士生(E-mail: zgqing991001@163.com);

陈巧玉(1984—), 女, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: goodluckqiaoyu@126.com).

引用格式: 翟国庆, 陈巧玉, 童东兵, 周武能. 非线性系统的固定时间渐近稳定性及能量消耗估计[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(10): 1180-1186.

## 0 引言

在过去的几十年中,由于各类非线性动力系统在模式识别<sup>[1]</sup>、图像处理<sup>[2]</sup>、电气工程<sup>[3]</sup>和神经网络控制<sup>[4]</sup>等领域的成功应用,人们对其稳定性进行了广泛的研究.经典的 Lyapunov 稳定性,如渐近稳定性或指数稳定性,要求系统的解轨迹在无限时间内趋向于期望的目标.然而为了提高系统在众多实际应用中的性能,研究者们期望系统的解轨迹在一个有限的时间内尽可能快地收敛到系统的平衡点.随后,有限时间稳定性的概念被提出,即如果一个系统的轨迹在有界时间  $T(\mathbf{x}_0)$  收敛到平衡状态,并一直保持平衡状态,则这个系统被称为是有限时间稳定的,其中  $T(\mathbf{x}_0)$  称为调整时间或收敛时间.有限时间稳定系统除了具有更快的收敛速率外,还具有更好的鲁棒性和抗干扰能力<sup>[5]</sup>.因此,有限时间稳定理论在多智能体系统<sup>[6]</sup>、非自治系统<sup>[7]</sup>、时滞系统<sup>[8]</sup>等系统中得到了广泛应用.

值得注意的是,有限时间稳定性的主要任务之一是准确估计调整时间  $T(\mathbf{x}_0)$ .在某些情况下,准确估计调整时间非常不方便或不可能,因为它严重依赖于系统的初始值.另一方面,固定时间稳定性方法<sup>[9]</sup>能够解决调整时间与系统初始值无关的问题.固定时间稳定性是一种特殊类型的有限时间稳定性,其调整时间独立于系统的初始值.近年来,对于非线性系统的固定时间稳定性问题,已经取得了一些成果<sup>[10-12]</sup>.文献[10]根据图论和矩阵理论,研究了随机非线性系统的固定时间稳定性和随机多智能体系统的固定时间一致性.文献[11]提出了一种用于多机互连电力系统固定时间稳定性的滑模控制器,并对多机互连电力系统收敛时间的上界进行了估计.文献[12]基于固定时间稳定性定理,设计了一个非线性反馈项的控制器,并得到了不连续动态网络的固定时间和预分配时间同步准则.

事实上,即使一个系统是稳定的,如果它的能量消耗是无限的,那么其在实际应用中也是没有意义的.所以在研究系统稳定性的同时,还应分析系统的能量消耗,并尽可能地减少系统的能量消耗.近年来,能量消耗问题被广泛研究.文献[13]根据分数阶理论,得到了分数阶网络有限时间同步的充分条件,并获得了系统能量消耗的上界.文献[14]研究了 Kuramoto 振子网络的固定时间同步和能量消耗,得到了网络同步的能量消耗上界.到目前为止,时滞非线性系统的固定时间稳定性及能量消耗估计问题仍有待进一步讨论,这鼓励了我们在这方面进行努力.

基于以上讨论,本文主要研究了时滞非线性系统的固定时间稳定性和能量消耗估计问题.本文的主要贡献如下:1) 构建了具有非线性、未知函数和时变时滞的动态模型.此模型更具有普遍性,可以满足更为广泛的应用需求.2) 通过构建一个新的 Lyapunov 泛函,得到了使误差系统实现固定时间渐近稳定的充分条件,并获得了系统的调整时间  $T$ .与有限时间控制不同, $T$  与系统的初始条件无关.3) 为了估计系统的能量消耗,我们给出了固定时间控制器作用下系统能耗的上界,这有助于评估系统的运行时间.

## 1 问题描述

构造如下带有时变时滞的非线性动态模型:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_i(t - \tau(t))) + \sum_{k=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^N \pi_{ijk} \mathbf{x}_j(t), \quad (1)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, N; \tau(t)$  表示时变时滞,并且满足  $0 \leq \tau(t) \leq \bar{\tau}$ ,  $\bar{\tau}$  表示已知的常数标量; $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_N(t)]^T \in R^N$  表示系统的状态向量; $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t)) = [\mathbf{g}(\mathbf{x}_1(t)), \mathbf{g}(\mathbf{x}_2(t)), \dots, \mathbf{g}(\mathbf{x}_N(t))]^T \in R^N$  和  $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t - \tau(t))) = [\mathbf{h}(\mathbf{x}_1(t - \tau(t))), \mathbf{h}(\mathbf{x}_2(t - \tau(t))), \dots, \mathbf{h}(\mathbf{x}_N(t - \tau(t)))]^T \in R^N$  是已知的非线性函数;

$\mathbf{\Pi}_k = (\pi_{ijk})_{N \times N}$  ( $k = 1, 2, \dots, \sigma, \sigma \in N$ ) 满足  $\pi_{iik} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ijk}$ ,  $R^N$  表示  $N$  维的 Euclid 空间.

由驱动系统(1), 响应系统模型为

$$\dot{\mathbf{y}}_i(t) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(t)) + \mathbf{h}(\mathbf{y}_i(t - \tau(t))) + \sum_{k=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^N \pi_{ijk} \mathbf{y}_j(t) + \boldsymbol{\zeta}_i(t), \quad (2)$$

其中  $\mathbf{y}(t) = [\mathbf{y}_1(t), \mathbf{y}_2(t), \dots, \mathbf{y}_N(t)]^T \in R^N$  表示状态向量;  $\mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) = [\mathbf{g}(\mathbf{y}_1(t)), \mathbf{g}(\mathbf{y}_2(t)), \dots, \mathbf{g}(\mathbf{y}_N(t))]^T \in R^N$  和  $\mathbf{h}(\mathbf{y}(t - \tau(t))) = [\mathbf{h}(\mathbf{y}_1(t - \tau(t))), \mathbf{h}(\mathbf{y}_2(t - \tau(t))), \dots, \mathbf{h}(\mathbf{y}_N(t - \tau(t)))]^T \in R^N$  表示未知的非线性函数;  $\boldsymbol{\zeta}(t) = [\boldsymbol{\zeta}_1(t), \boldsymbol{\zeta}_2(t), \dots, \boldsymbol{\zeta}_N(t)]^T \in R^N$  表示控制器.

将误差信号定义为  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)$ . 因此, 误差系统可以表示为

$$\dot{\mathbf{z}}_i(t) = \mathbf{g}(\mathbf{y}_i(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{h}(\mathbf{y}_i(t - \tau(t))) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_i(t - \tau(t))) + \sum_{k=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^N \pi_{ijk} \mathbf{z}_j(t) + \boldsymbol{\zeta}_i(t). \quad (3)$$

**假设 1** 对于任意的  $\mathbf{x}_i(t), \mathbf{y}_i(t) \in R^N$ , 存在  $\varepsilon > 0$  和  $\eta > 0$  使得如下的不等式成立:

$$|\mathbf{g}(\mathbf{y}_i(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_i(t))| \leq \varepsilon \mathbf{z}_i(t), \quad |\mathbf{h}(\mathbf{y}_i(t - \tau(t))) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_i(t - \tau(t)))| \leq \eta \mathbf{z}_i(t - \tau(t)).$$

**假设 2** 系统(3)的状态满足  $|\mathbf{z}_i(t - \tau(t))| \leq |\mathbf{z}_i(t - \bar{\tau})|$ .

**定义 1**<sup>[15]</sup> 如果误差系统(3)满足  $\mathbf{z}(\mathbf{z}_0, t) = \mathbf{0}, \forall t \geq T(\mathbf{z}_0)$ , 则误差系统(3)是有限时间渐近稳定的, 其中  $T(\mathbf{z}_0)$  是调整时间函数.

**定义 2**<sup>[16]</sup> 如果误差系统(3)是有限时间渐近稳定的, 并且存在一个有界的非负常数  $T$  满足  $T(\mathbf{z}_0) < T$ , 使得当  $t \geq T$  时,  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$  成立, 则误差系统(3)是固定时间渐近稳定的.

为了分析误差系统的渐近稳定性并估计系统的能量消耗, 以下给出必要的引理.

**引理 1**<sup>[17]</sup> 假设状态向量  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^N$ , 存在  $\psi > 0$ , 使得不等式  $\mathbf{x}^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T \mathbf{x} \leq \psi \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \psi^{-1} \mathbf{y}^T \mathbf{y}$  成立.

**引理 2**<sup>[18]</sup> 设标量  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N \geq 0, 0 < \Xi \leq 1, \Psi > 1$ , 则有

$$\sum_{m=1}^N \theta_m^{\Xi} \geq \left( \sum_{m=1}^N \theta_m \right)^{\Xi}, \quad \sum_{m=1}^N \theta_m^{\Psi} \geq N^{1-\Psi} \left( \sum_{m=1}^N \theta_m \right)^{\Psi}.$$

**引理 3**<sup>[19]</sup> 假设

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (4)$$

并且存在函数  $V(\mathbf{x}(t))$  满足

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -\alpha_1 V^p(\mathbf{x}(t)) - \alpha_2 V^q(\mathbf{x}(t)) - \alpha_3 V(\mathbf{x}(t)) - \alpha_4 V(\mathbf{x}(t - \tau(t))) - \alpha_5 V^{\varrho}(\mathbf{x}(t - \tau(t))),$$

其中,  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0, \alpha_4 > 0, \alpha_5 > 0, 0 < p < 1, 0 < \varrho < 1, q > 1$ . 那么, 系统(4)是固定时间渐近稳定的, 并且系统(4)的调整时间为

$$T \leq \frac{1}{1 - \tilde{p}} \frac{1}{\alpha_3 + \alpha_4} \ln \left( 1 + \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1 + \alpha_5} \right) + \frac{1}{q - 1} \frac{1}{\alpha_3 + \alpha_4} \ln \left( 1 + \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2} \right),$$

其中  $\tilde{p} = \max(p, \varrho)$ .

## 2 主要结果

在本节中, 对于系统(3), 根据 Lyapunov 稳定理论和能量消耗的定义, 将证明时滞非线性系统的固定时间渐近稳定, 并估计系统的能量消耗.

系统的能量消耗可被定义如下<sup>[20]</sup>:

$$E_c = \int_0^T \sum_{i=1}^N \|\boldsymbol{\zeta}_i(s)\|^2 ds, \quad (5)$$

式中  $T$  表示系统的调整时间, 系统控制器  $\boldsymbol{\zeta}$  被设计为如下形式:

$$\boldsymbol{\zeta}_i(t) = -\xi_1 \mathbf{z}_i(t) - \xi_2 \mathbf{z}_i^p(t) - \xi_3 \mathbf{z}_i^q(t) - \xi_4 \mathbf{z}_i(t - \tau(t)) - \xi_5 \mathbf{z}_i^{\varrho}(t - \tau(t)). \quad (6)$$

**定理 1** 若假设 1 和假设 2 成立, 如果存在标量  $\varepsilon > 0, \eta > 0, \xi_1 > 0, \xi_2 > 0, \xi_3 > 0, \xi_4 > 0, \xi_5 > 0, p = a_1/a_2, q = a_3/a_4, a_1, a_2, a_3$  和  $a_4$  是奇正整数, 且满足  $a_1 < a_2, a_3 > a_4$ , 使得

$$2\xi_1 > 2\varepsilon - 2\sigma\Omega - \eta\psi + \xi_4 + \xi_5,$$

$$\xi_4 > \eta\psi^{-1},$$

则误差系统(3)在控制器(6)的作用下是固定时间渐近稳定的,并且调整时间和能量消耗的上界为

$$T \leq \frac{2}{(\ell_1 + \ell_4)(1-p)} \ln \left( 1 + \frac{\ell_1 + \ell_4}{\ell_2 + \xi_5} \right) + \frac{2}{(\ell_1 + \ell_4)(q-1)} \ln \left( 1 + \frac{\ell_1 + \ell_4}{\ell_3} \right), \quad (7)$$

$$E_c \leq \frac{10V(0)\xi_1^2}{\ell_1}(1 - e^{-\ell_1 T}) + \frac{5 \times 2^p V^p(0)\xi_2^2}{\ell_1 p}(1 - e^{-\ell_1 p T}) + \frac{5 \times 2^q V^q(0)\xi_3^2}{\ell_1 q}(1 - e^{-\ell_1 q T}) + \frac{10V(0)\xi_4^2}{\ell_1}(e^{\ell_1 \bar{\tau}} - e^{-\ell_1(T-\bar{\tau})}) + \frac{5 \times 2^p V^p(0)\xi_5^2}{\ell_1 p}(e^{\ell_1 p \bar{\tau}} - e^{-\ell_1 p(T-\bar{\tau})}), \quad (8)$$

其中

$$\ell_1 = 2\xi_1 - 2\varepsilon - 2\sigma\Omega - \eta\psi + \xi_4 + \xi_5, \quad \ell_2 = \xi_2 2^{(1+p)/2}, \quad \ell_3 = \xi_3 2^{(1+q)/2} N^{(1-q)/2}, \quad \ell_4 = \xi_4 - \eta\psi^{-1},$$

$$\Omega = \lambda_{\max}(\mathbf{II}_k), \quad V(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T(0) \mathbf{z}_i(0), \quad k = 1, 2, \dots, \sigma.$$

**证明** 构造一个如下的 Lyapunov 泛函:

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T(t) \mathbf{z}_i(t).$$

根据引理 1 和式(3), 对  $V(t)$  进行求导, 可以获得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T(t) [\mathbf{g}(\mathbf{y}_i(t)) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_i(t)) + \mathbf{h}(\mathbf{y}_i(t - \tau(t))) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_i(t - \tau(t)))] + \\ &\quad \sum_{k=1}^{\sigma} \sum_{j=1}^N \pi_{ijk} \mathbf{z}_j(t) - \xi_1 \mathbf{z}_i(t) - \xi_2 \mathbf{z}_i^p(t) - \xi_3 \mathbf{z}_i^q(t) - \xi_4 \mathbf{z}_i(t - \tau(t)) - \xi_5 \mathbf{z}_i^p(t - \tau(t))] \leq \\ &\quad \varepsilon \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T(t) \mathbf{z}_i(t) + \eta \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T(t) \mathbf{z}_i(t - \tau(t)) + \sum_{k=1}^{\sigma} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \pi_{ijk} \mathbf{z}_i^T(t) \mathbf{z}_j(t) - \xi_1 \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T(t) \mathbf{z}_i(t) - \\ &\quad \xi_2 \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T(t) \mathbf{z}_i^p(t) - \xi_3 \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T(t) \mathbf{z}_i^q(t) - \xi_4 \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T(t) \mathbf{z}_i(t - \tau(t)) - \xi_5 \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T(t) \mathbf{z}_i^p(t - \tau(t)) \leq \\ &\quad \left( -\xi_1 + \varepsilon + \sigma\Omega + \frac{1}{2} \eta\psi - \frac{1}{2} \xi_4 - \frac{1}{2} \xi_5 \right) \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) - \xi_2 \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}^p(t) - \xi_3 \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}^q(t) + \\ &\quad \left( \frac{1}{2} \eta\psi^{-1} - \frac{1}{2} \xi_4 \right) \mathbf{z}^T(t - \tau(t)) \mathbf{z}(t - \tau(t)) - \frac{1}{2} \xi_5 (\mathbf{z}^p(t - \tau(t)))^T \mathbf{z}^p(t - \tau(t)) = \\ &\quad - (2\xi_1 - 2\varepsilon - 2\sigma\Omega - \eta\psi + \xi_4 + \xi_5) V(t) - (\xi_4 - \eta\psi^{-1}) V(t - \tau(t)) - \\ &\quad \xi_5 V^p(t - \tau(t)) - \xi_2 \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}^p(t) - \xi_3 \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}^q(t). \end{aligned} \quad (9)$$

并且, 根据引理 2,  $\mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}^p(t)$  和  $\mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}^q(t)$  放缩为

$$\mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}^p(t) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i^T(t) \mathbf{z}_i(t))^{(1+p)/2} \geq \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T(t) \mathbf{z}_i(t) \right)^{(1+p)/2} = 2^{(1+p)/2} V^{(1+p)/2}(t), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}^q(t) &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{z}_i^T(t) \mathbf{z}_i(t))^{(1+q)/2} \geq \\ &\quad \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{z}_i^T(t) \mathbf{z}_i(t) \right)^{(1+q)/2} \geq N^{(1-q)/2} (\mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t))^{(1+q)/2} = \\ &\quad 2^{(1+q)/2} N^{(1-q)/2} V^{(1+q)/2}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

将式(10)和(11)代入到式(9)中, 能够获得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq - (2\xi_1 - 2\varepsilon - 2\sigma\Omega - \eta\psi + \xi_4 + \xi_5) V(t) - \xi_2 2^{(1+p)/2} V^{(1+p)/2}(t) - \\ &\quad \xi_3 2^{(1+q)/2} N^{(1-q)/2} V^{(1+q)/2}(t) - (\xi_4 - \eta\psi^{-1}) V(t - \tau(t)) - \xi_5 V^p(t - \tau(t)). \end{aligned} \quad (12)$$

令

$$\ell_1 = 2\xi_1 - 2\varepsilon - 2\sigma\Omega - \eta\psi + \xi_4 + \xi_5, \quad \ell_2 = \xi_2 2^{(1+p)/2}, \quad \ell_3 = \xi_3 2^{(1+q)/2} N^{(1-q)/2}, \quad \ell_4 = \xi_4 - \eta\psi^{-1}.$$

根据引理 3 和式(12), 可以得到误差系统(3)是固定时间渐近稳定的, 并且误差系统(3)的调整时间为

$$T \leq \frac{2}{(\ell_1 + \ell_4)(1-p)} \ln\left(1 + \frac{\ell_1 + \ell_4}{\ell_2 + \xi_5}\right) + \frac{2}{(\ell_1 + \ell_4)(q-1)} \ln\left(1 + \frac{\ell_1 + \ell_4}{\ell_3}\right). \quad (13)$$

根据式(12), 可得

$$\dot{\mathbf{V}}(t) \leq -\ell_1 \mathbf{V}(t). \quad (14)$$

对式(14)进行积分, 计算得到

$$\mathbf{V}(t) \leq \mathbf{V}(0) e^{-\ell_1 t}. \quad (15)$$

根据式(5)和(15), 可得系统能量消耗的上界

$$\begin{aligned} E_c &= \int_0^T \sum_{i=1}^N \left\| -\xi_1 \mathbf{z}_i(s) - \xi_2 \mathbf{z}_i^p(s) - \xi_3 \mathbf{z}_i^q(s) - \xi_4 \mathbf{z}_i(s - \tau(s)) - \xi_5 \mathbf{z}_i^p(s - \tau(s)) \right\|^2 ds \leq \\ &5\xi_1^2 \sum_{i=1}^N \int_0^T \left\| \mathbf{z}_i(s) \right\|^2 ds + 5\xi_2^2 \sum_{i=1}^N \int_0^T \left\| \mathbf{z}_i^p(s) \right\|^2 ds + 5\xi_3^2 \sum_{i=1}^N \int_0^T \left\| \mathbf{z}_i^q(s) \right\|^2 ds + \\ &5\xi_4^2 \sum_{i=1}^N \int_0^T \left\| \mathbf{z}_i(s - \tau(s)) \right\|^2 ds + 5\xi_5^2 \sum_{i=1}^N \int_0^T \left\| \mathbf{z}_i^p(s - \tau(s)) \right\|^2 ds \leq \\ &10\xi_1^2 \int_0^T \mathbf{V}(s) ds + 5 \times 2^p \xi_2^2 \int_0^T \mathbf{V}^p(s) ds + 5 \times 2^q \xi_3^2 \int_0^T \mathbf{V}^q(s) ds + \\ &10\xi_4^2 \int_0^T \mathbf{V}(s - \bar{\tau}) ds + 5 \times 2^p \xi_5^2 \int_0^T \mathbf{V}^p(s - \bar{\tau}) ds \leq \\ &10\mathbf{V}(0) \xi_1^2 \int_0^T e^{-\ell_1 s} ds + 5 \times 2^p \mathbf{V}^p(0) \xi_2^2 \int_0^T e^{-\ell_1 p s} ds + 5 \times 2^q \mathbf{V}^q(0) \xi_3^2 \int_0^T e^{-\ell_1 q s} ds + \\ &10\mathbf{V}(0) \xi_4^2 \int_0^T e^{-\ell_1(s-\bar{\tau})} ds + 5 \times 2^p \mathbf{V}^p(0) \xi_5^2 \int_0^T e^{-\ell_1 p(s-\bar{\tau})} ds = \\ &\frac{10\mathbf{V}(0) \xi_1^2}{\ell_1} (1 - e^{-\ell_1 T}) + \frac{5 \times 2^p \mathbf{V}^p(0) \xi_2^2}{\ell_1 p} (1 - e^{-\ell_1 p T}) + \frac{5 \times 2^q \mathbf{V}^q(0) \xi_3^2}{\ell_1 q} (1 - e^{-\ell_1 q T}) + \\ &\frac{10\mathbf{V}(0) \xi_4^2}{\ell_1} (e^{\ell_1 \bar{\tau}} - e^{-\ell_1(T-\bar{\tau})}) + \frac{5 \times 2^p \mathbf{V}^p(0) \xi_5^2}{\ell_1 p} (e^{\ell_1 p \bar{\tau}} - e^{-\ell_1 p(T-\bar{\tau})}). \end{aligned} \quad (16)$$

证毕.  $\square$

**注1** 显然, 控制器(6)由5个部分组成, 其中  $-\xi_1 \mathbf{z}_i(t)$ ,  $-\xi_4 \mathbf{z}_i(t - \tau(t))$  和  $-\xi_5 \mathbf{z}_i^p(t - \tau(t))$  用于补偿非线性系统的不确定性;  $-\xi_2 \mathbf{z}_i^p(t)$  和  $-\xi_3 \mathbf{z}_i^q(t)$  用于保证误差系统(3)是固定时间渐近稳定的. 因此, 控制器(6)在实现时滞非线性系统的固定时间渐近稳定中发挥着重要作用.

**注2** 从不等式(13)可以明显看出, 当控制强度系数  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  和  $\xi_5$  增加时, 系统的收敛速率也会增加. 然而, 在系统的控制过程中对输入饱和存在一个实际限制, 这意味着  $\xi_2$ ,  $\xi_3$  和  $\xi_5$  不能无限制的增加. 此外, 通过选择合适的  $p$  和  $q$  也可以提高系统的收敛速率. 根据能量消耗的定义,  $E_c$  将随着调整时间  $T$  的增加而增加. 从实际应用的角度来看, 在保证系统稳定的同时, 应尽可能降低系统的能量消耗, 因此有必要控制  $T$  的值.

### 3 仿 真

为了验证本文所提出方法的有效性, 本节中将给出一个数值模拟例子来证明所得结果是可行的.

假设  $\mathbf{g}(s) = \tan(s)$ ,  $\mathbf{h}(s) = \sin(s)$ , 并且令  $N = 2$ , 时滞为  $\tau(t) = \frac{1}{2} \cos(t) + 0.5$ ,

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 6 & -6 \end{bmatrix},$$

通过计算矩阵  $\mathbf{H}_k$  的特征值得到  $\Omega = 14$ . 根据定理1, 选择参数  $\sigma = 2, \varepsilon = 100, \eta = 50, \psi = 2, p = 0.5, q = 1.5, \xi_1 = 200, \xi_2 = 30, \xi_3 = 1, \xi_4 = 2, \xi_5 = 3$ . 令误差系统(3)的初始值为  $\mathbf{z}(0) = [-0.15, 0.10]^T$ . 通过验证可知, 以上结果满足定理1所给出的条件. 将上述参数代入式(13)中, 可以获得调整时间  $T \leq 0.43$ . 图1是误差系统(3)的轨迹变化过程. 显然, 随着时间的增加, 系统(3)的状态轨迹逐渐趋于0, 并在0.43 s之前达到稳定. 图2是误差系统(3)在控制器(6)作用下的能量消耗.

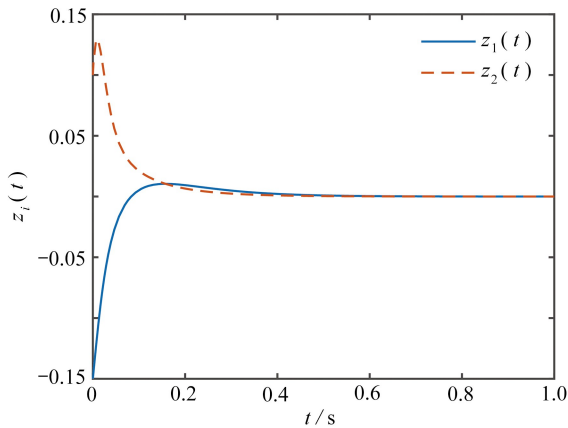


图 1 误差系统(3)的状态轨迹

Fig. 1 State trajectories of error system (3)

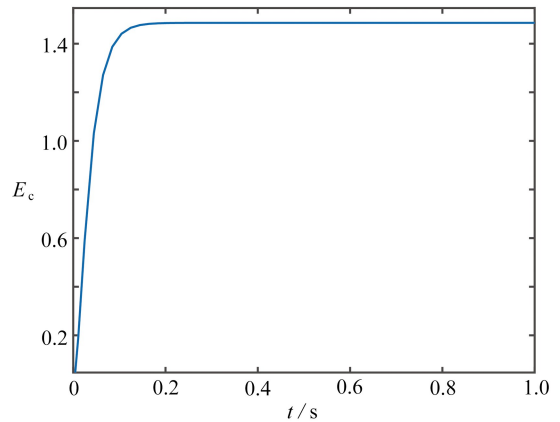


图 2 误差系统(3)在控制器(6)作用下的能量消耗

Fig. 2 Energy consumption of error system (3)

under the action of controller (6)

## 4 结 论

本文对非线性系统的固定时间稳定性和能量消耗估计问题进行了研究.根据 Lyapunov 稳定理论,给出了能够使误差系统实现固定时间渐近稳定的充分条件.同时,利用固定时间控制方法设计了一种含时滞项的控制器,得到了系统的调整时间和系统运行过程能量消耗的上界,并且揭示了控制强度系数对调整时间和能量消耗的影响.与有限时间控制相比,本文提出方法的优点是系统的调整时间独立于初始条件,易于调整和预测系统的能量消耗.在未来的工作中,我们将使用其他的控制方法来讨论非线性系统的稳定性,例如滑模控制和模糊控制.

## 参考文献(References):

- [1] YANG F, WANG C. Pattern-based NN control of a class of cncertain nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, **29**(4): 1108-1119.
- [2] CHEN H, ZHAO Y, HU F, et al. Nonlinear resilient learning method based on joint time-frequency image analysis in underwater visible light communication[J]. *IEEE Photonics Journal*, 2017, **55**(8): 4668-4681.
- [3] ZHON Q, YANG J, SHI K, et al. Event-triggered  $H_\infty$  load frequency control for multi-area nonlinear power systems based on non-fragile proportional integral control strategy [J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2021, **23**(8): 12191-12201.
- [4] 杜雨薇, 李兵, 宋乾坤. 事件触发下混合时滞神经网络的状态估计[J]. *应用数学和力学*, 2020, **41**(8): 887-898. (DU Yuwei, LI Bing, SONG Qiankun. Event-based state estimation for neural network with time-varying delay and infinite-distributed delay[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(8): 887-898. (in Chinese))
- [5] ABDURAHMAN A, JIANG H, TENG Z. Finite-time synchronization for memristor-based neural networks with time-varying delays[J]. *Neural Networks*, 2015, **69**: 20-28.
- [6] WU Y, HU J, XIANG L, et al. Finite-time output regulation of linear heterogeneous multi-agent systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, **69**(3): 1248-1252.
- [7] DANG V M, MINH T H, PHUOC N D, et al. Finite-time stabilization of non-autonomous, nonlinear second-order systems based on minimum time principle[J]. *Vietnam Journal of Science and Technology*, 2021, **59**(2): 249-260.
- [8] 佟英浩, 童东兵, 陈巧玉, 等. 事件触发驱动的非线性系统有限时间状态估计器设计[J]. *应用数学和力学*, 2020, **41**(6): 669-678. (TONG Yinghao, TONG Dongbing, CHEN Qiaoyu, et al. Design of a finite-time state estimator for nonlinear systems under event-triggered control [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(6): 669-678. (in Chinese))



- [9] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **57**(8): 2106-2110.
- [10] YU J, YU S, YAN Y. Fixed-time stability of stochastic nonlinear systems and its application into stochastic multi-agent systems[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2021, **15**(1): 126-135.
- [11] HUANG S, XIONG L, WANG J, et al. Fixed-time fractional-order sliding mode controller for multimachine power systems[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2020, **36**(4): 2866-2876.
- [12] HU C, HE H, JIANG H. Fixed/preassigned-time synchronization of complex networks via improving fixed-time stability[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, **51**(6): 2882-2892.
- [13] TONG D, MA B, CHEN Q, et al. Finite-time synchronization and energy consumption prediction for multilayer fractional-order networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2023, **70**(6): 2176-2180.
- [14] YANG G, TONG D, CHEN Q, et al. Fixed-time synchronization and energy consumption for Kuramoto-oscillator networks with multilayer distributed control[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2023, **70**(4): 1555-1559.
- [15] CAI Z, HUANG L, WANG Z. Finite-/fixed-time stability of nonautonomous functional differential inclusion: Lyapunov approach involving indefinite derivative[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2021, **33**(11): 6763-6774.
- [16] ZUO Z, SONG J, TIAN B, et al. Robust fixed-time stabilization control of generic linear systems with mismatched disturbances[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, **52**(2): 759-768.
- [17] TANG Z, PARK J H, SHEN H. Finite-time cluster synchronization of Lur'e networks: a nonsmooth approach [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, **48**(8): 1213-1224.
- [18] HU C, YU J, CHEN Z, et al. Fixed-time stability of dynamical systems and fixed-time synchronization of coupled discontinuous neural networks[J]. *Neural Networks*, 2017, **89**: 74-83.
- [19] WANG X, CAO J, WANG J, et al. A novel fixed-time stability strategy and its application to fixed-time synchronization control of semi-Markov jump delayed neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2021, **452**: 284-293.
- [20] XU Y, WU X, WAN X, et al. Finite/fixed-time synchronization of multi-layer networks based on energy consumption estimation[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2021, **68**(10): 4278-4286.