

# 无额外自由度广义有限元的近不可压弹-塑性分析\*

马今伟, 段庆林

- (1. 大连理工大学 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 辽宁 大连 116024;
2. 大连理工大学 大连理工大学白俄罗斯国立大学联合学院, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 研究了常规有限元方法在近不可压弹-塑性分析中的体积自锁问题,并在广义有限元框架下引入无额外自由度的强化函数对此问题进行了改进.一方面,插值函数在引入强化函数后获得了更加丰富的近似空间,提高了在体积近似不变约束下正确反映结构变形的能力;另一方面,强化函数的建立不依赖额外自由度,从而消除了传统广义有限元方法中的线性相关性问题,分析并验证了常规有限元在线弹性、超弹性和塑性分析中的体积自锁问题具有不同的触发条件和表现形式.3 个典型的数值算例表明,无额外自由广义有限元能有效地缓解体积自锁并得到准确合理的计算结果.

**关键词:** 广义有限元; 额外自由度; 近不可压; 体积自锁; 弹塑性; 超弹性

**中图分类号:** O302 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440067

## Nearly Incompressible Elasto-Plastic Analysis of Extra-DOF-Free Generalized Finite Elements

MA Jinwei, DUAN Qinglin

- (1. *State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China;*
2. *DUT-BSU Joint Institute, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)*

**Abstract:** The volumetric locking of the conventional finite element method (FEM) was investigated through the nearly incompressible elasto-plastic analysis, and the extra-DOF-free reinforcement function was introduced in the framework of the generalized finite element method (GFEM) for improvement of this problem. Through the introduction of the reinforcement function, a richer approximation space was obtained for the interpolation function, of which the ability of correctly reflecting structural deformations was promoted under the approximate volumetric invariance constraint. Furthermore, the construction of the reinforcement function is independent of the extra degrees of freedom, which eliminates the linear dependency in the traditional GFEM. Different triggering conditions and manifestations of volumetric locking of the conventional FEM were found in linear elastic, hyperelastic, and plastic analyses. Three classical numerical examples show that, the extra-DOF-free GFEM can effectively alleviate the volumetric locking in all analyses, and obtain accurate and reasonable re-

\* 收稿日期: 2023-03-15; 修订日期: 2023-06-13

**基金项目:** 中央高校基本科研业务费(DUT21GF304);科学挑战专题(TZ2018002)

**作者简介:** 马今伟(1992—),男,博士生(E-mail: majinwei\_1234@163.com);

段庆林(1979—),男,副教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: qinglingduan@dlut.edu.cn).

**引用格式:** 马今伟,段庆林. 无额外自由度广义有限元的近不可压弹-塑性分析[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(2): 220-226.

sults.

**Key words:** generalized finite element; extra degree of freedom; nearly incompressible; volumetric locking; elastoplasticity; hyperelasticity

## 0 引 言

近或完全不可压分析中的体积自锁一直是有限元分析难题<sup>[1]</sup>,它具有多种触发形式,例如线弹性材料中无限接近 0.5 的 Poisson 比、橡胶等超弹性材料中趋于无穷的体积模量以及金属等材料塑性应变的流动方向都会引起有限元分析中的体积自锁.从插值的角度解释:常规有限元的简单形函数难以做到不违背体积近似不变约束的同时,正确反应材料和结构的变形响应.解决体积自锁的思路大体上可以分为两种:第一种是放松约束,最典型的代表是混合格式中的 u-p 方法<sup>[2]</sup>;以及纯位移格式中的选择减缩积分<sup>[3]</sup>和平均体应变<sup>[4]</sup>方法.第二种思路是采用更加丰富的近似函数,如高阶单元中的 8 节点四边形单元和 20 节点六面体单元;以及 p 型方法中的等几何分析、无单元 Galerkin 法、h-p 云团法等,广义有限元就是 p 型方法的一种.

广义有限元是有限元的自然延伸,它通过引入强化函数极大地丰富了常规有限元的近似空间,并广泛应用于裂纹扩展<sup>[5-6]</sup>、并行计算<sup>[7]</sup>等问题的模拟.传统的广义有限元中,强化函数的构造需要引入额外自由度,这不仅扩大了问题的求解规模,额外自由度同标准自由度之间的线性相关性还会导致刚度阵奇异.针对该问题,目前已发展了多种方法,如稳定广义有限元<sup>[8]</sup>、正交广义有限元<sup>[9]</sup>等.Tian<sup>[10]</sup>提出了无额外自由度的强化函数,它的构造仅需标准自由度,从而消除了线性相关性问题.这种方法与常规有限元法具有相同的计算流程,且不增加求解规模,差别仅在于近似函数不同.Xiao 等<sup>[11]</sup>将这种方法推广到了扩展有限元,并应用于裂纹扩展问题的研究.Ma 等<sup>[12-13]</sup>将其推广到了弹塑性固体的大变形分析中.在这些应用中,无额外自由度广义有限元展现出了计算精度高、收敛稳定、网格扭曲健壮等方面的优点.

大量数值分析表明,采用高阶近似函数能有效提高其近不可压分析的能力,如:Elguedj 等<sup>[14]</sup>采用不同阶次的等几何单元进行了线弹性、超弹性以及塑性材料的近不可压分析;Chen 等<sup>[15]</sup>采用再生核粒子法对橡胶梁进行了大变形分析以及塑性杆的颈缩分析等.本文的主要研究内容就是探究无额外自由度广义有限元的近不可压分析能力.

## 1 无额外自由度广义有限元插值函数

无额外自由度广义有限元对标量函数的插值可以写为

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in E} N_I u_I(\mathbf{x}), \quad (1)$$

其中,  $E$  为点  $\mathbf{x}$  所在单元,  $N_I$  为标准有限元形函数,  $u_I(\mathbf{x})$  为定义在节点  $I$  处的局部近似函数,表示为

$$u_I(\mathbf{x}) = \sum_{K \in P_I^r} L_K^{P_I^r}(\mathbf{x}) u_K. \quad (2)$$

如图 1 所示,  $P_I^r$  为定义在节点  $I$  处的“片”,它划定了参与局部近似的节点,上标  $r$  则指定了“片”的大小.式(2)中的  $L_K^{P_I^r}(\mathbf{x})$  为局部近似函数,这里采用选择插值最小二乘法构造,表示为

$$L_K^{P_I^r}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \left( \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}_K - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}_I \mathbf{p}_I^T \mathbf{A}^{-1}}{\mathbf{p}_I^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}_I} \mathbf{p}_K + \frac{1}{\mathbf{p}_I^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}_I} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{p}_K \delta_{IK} \right), \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  为基底向量,它的常数形式以及二阶和三阶形式分别写为

$$\begin{cases} \mathbf{p}(\mathbf{x}) \equiv 1, & \text{constant base,} \\ \mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1, x, y, z, xy, yz, zx, x^2, y^2, z^2]^T, & \text{quadratic base,} \\ \mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1, x, y, z, xy, yz, zx, x^2, y^2, z^2, x^2y, xy^2, y^2z, x^2z, xz^2, yz^2, xyz, x^3, y^3, z^3]^T, & \text{cubic base.} \end{cases} \quad (4)$$

另外在式(3)中,  $\mathbf{p}_K = \mathbf{p}(x_K)$ ,  $\mathbf{p}_I = \mathbf{p}(x_I)$ ,  $\mathbf{A} = \sum_{K \in P_I^r} \mathbf{p}_K \mathbf{p}_K^T$ . 将式(3)代入式(1)中, 并重新组织下标得最终近似形式为

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I \in P_E^r} \tilde{N}_I(\mathbf{x}) u_I, \quad (5)$$

其中  $P_E^r = \cup_{I \in E} P_I^r$  为单元上所有节点处“片”的集合,  $\tilde{N}_I(\mathbf{x})$  表示为

$$\tilde{N}_I(\mathbf{x}) = \sum_{K \in E} N_K(\mathbf{x}) L_I^{P_K}(\mathbf{x}). \quad (6)$$

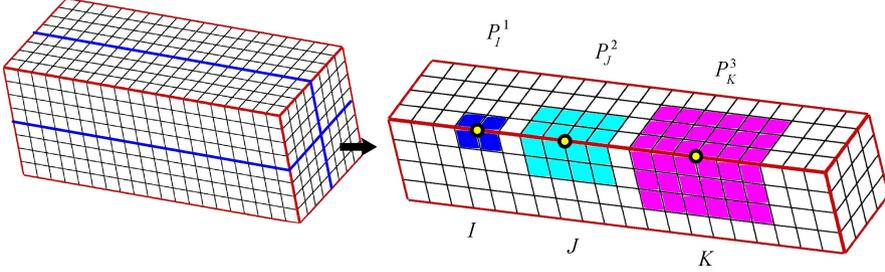


图1 节点 patch 示意图

Fig. 1 Schematic diagram of patches

## 2 非线性广义有限元节点内力线性化

控制方程弱形式的离散化可以写为

$$f_{ii}^{\text{ext}}(x) - f_{ii}^{\text{int}}(x) = 0, \quad (7)$$

其中,  $f_{ii}^{\text{int}}$  和  $f_{ii}^{\text{ext}}$  分别为节点内、外力. 本文采用 Newton-Raphson 方法求解上述非线性方程. 由于本文仅考虑不随构型变化的常外力, 因此只有节点内力需要线性化. 内力线性化同时考虑几何和材料的非线性, 过程可参考文献[13], 其结果为

$$dJ_{ii}^{\text{int}} = (K_{iiJj}^{\text{mat}} + K_{iiJj}^{\text{geo}}) du_{Jj}, \quad (8)$$

其中,  $K_{iiJj}^{\text{mat}}$  和  $K_{iiJj}^{\text{geo}}$  分别为材料和几何刚度, 它们同标准的非线性有限元仅在插值形式上不同, 即

$$K_{ijIJ}^{\text{mat}} = \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{N}_I}{\partial x_k} C_{ijkl}^{\sigma T} \frac{\partial \tilde{N}_J}{\partial x_l} d\Omega_x, \quad K_{ijIJ}^{\text{geo}} = \delta_{ij} \int_{\Omega} \frac{\partial \tilde{N}_I}{\partial x_k} \sigma_{kl} \frac{\partial \tilde{N}_J}{\partial x_l} d\Omega_x, \quad (9)$$

其中,  $\Omega^x$  为当前构型域,  $C_{ijkl}^{\sigma T}$  为联系 Cauchy 应力 Truesdell 速率  $\dot{\sigma}_{ik}^T$  和变形张量率的本构模量.

## 3 近不可压线弹性小变形分析

线弹性小变形分析忽略几何效应, 且本构模量为常量. 式(9)中考虑

$$C_{ijkl}^{\sigma T} = \mu (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \lambda \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad K_{ijIJ}^{\text{geo}} \equiv 0, \quad (10)$$

其中,  $\mu$  和  $\lambda$  为 Lamé 常数, 后者与弹性模量  $E$  及 Poisson 比  $\nu$  的关系可写为  $\lambda = \nu E / ((1 + \nu)(1 - 2\nu))$ , 与体积模量  $\kappa$  的关系为  $\kappa = \lambda + 2\mu/3$ . 当  $\nu$  趋近于 0.5 时,  $\lambda$  和  $\kappa$  趋近于无穷, 这意味着结构几乎只能发生纯剪切变形, 而体积不能发生膨胀和压缩.

采用经典的 Cook 膜问题考察无额外自由度广义有限元在近不可压线弹性分析中的表现. Cook 膜算例的描述可参见文献[14]. 分别采用常数形式以及式(4)中二次和三次的基底向量来考察插值函数的阶次对缓解体积自锁的效果. 为方便阐述, 我们将采用这 3 种基底的方法分别表述为 constant-base GFEM、quadratic-base GFEM 和 cubic-base GFEM. Poisson 比设置为  $\nu = 0.4999$ , 计算网格和 3 种方法计算得到的变形及  $y$  方向位移云图如图 2 所示.

采用不同密度的 4 种网格考察 3 种基底的收敛性. 这些网格厚度方向始终保持为 3 个单元, 另两个方向

的单元数分别为  $3 \times 3$ ,  $6 \times 6$ ,  $9 \times 9$ ,  $15 \times 15$ . 粗略来说, 右上角顶点处的位移的参考解在  $7.9 \sim 8.0$  之间, 收敛性测试结果如图 3 所示.

容易看出, 常量形式的基底存在严重的体积自锁问题, 而缓解的效果随着基底向量阶次的提高变得更好. 然而, 升高插值函数的阶次会急剧增加计算量. 以六面体网格为例, 构建二次基底的强化函数和插值函数分别需要 27 和 64 个节点, 而三次基底则分别需要 125 和 216 个节点参与计算. 因此, 当二次基底能够取得足够的精度时, 没有必要继续升高插值函数的阶次. 此外, 采用常数形式基底的无额外自由度广义有限元会完全退化为常规有限元, 这是因为  $p(\mathbf{x}) \equiv 1$  时, 式(3)中的强化函数变为  $L_K^p(\mathbf{x}) = \delta_{IK}$ , 而式(6)中的插值函数变为  $\tilde{N}_I(\mathbf{x}) \equiv N_I(\mathbf{x})$ . 因此在接下来的分析中, 我们直接用常规有限元代替采用常量形式基底的广义有限元并标记为 FEM, 另外我们不再考虑三次基底, 并直接用 GFEM 表示采用二次基底的广义有限元.

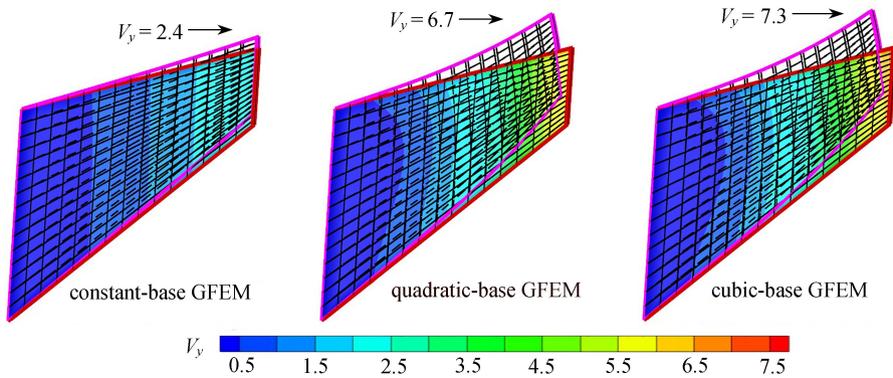


图 2 Cook 膜算例中 GFEM 采用 3 种基向量计算的位移场和变形

Fig. 2 Displacement fields and deformations obtained with the GFEM for constant, quadratic and cubic bases in the Cook membrane example

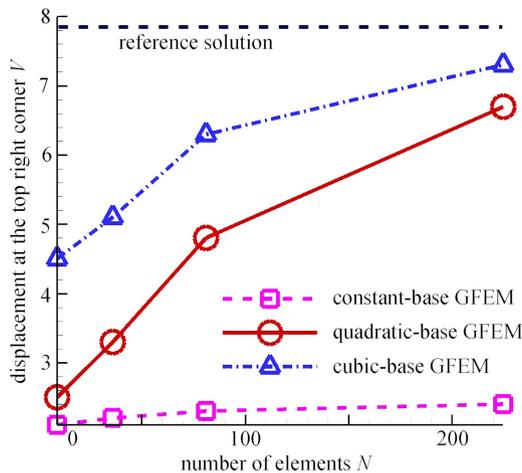


图 3 Cook 膜算例中 GFEM 采用 3 种基向量在不同密度网格下收敛性测试结果

Fig. 3 Convergence results of the GFEM for constant, quadratic and cubic bases in the Cook membrane example

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同.

## 4 近不可压超弹性大变形分析

橡胶是典型的超弹性材料, 其本构方程通过联系第二 PK 应力  $S_{ij}$  和 Green 应变张量  $E_{kl}$  给出:

$$S_{ij} = C_{ijkl}^{SE} E_{kl}. \tag{11}$$

$C_{ijkl}^{SE}$  和式(9)中的  $C_{ijkl}^{\sigma T}$  存在如下转换关系:

$$C_{ijkl}^{\sigma T} = \sum_{I,J,K,L} F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} C_{IJKL}^{SE}, \quad (12)$$

其中,  $F_{ij}$  为变形梯度. 这里考察超弹性橡胶梁的纯弯曲, 算例的描述及 Mooney-Rivlin 橡胶可参见文献[12]. 采用隐式分析流程, 将梁的弯矩载荷均分为 100 步施加, 并将体积模量分别设置为  $\kappa = 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$ . 图 4 和图 5 分别展示了 FEM 和 GFEM 在第 1, 10, 30, 60, 100 个载荷步中梁的变形过程.

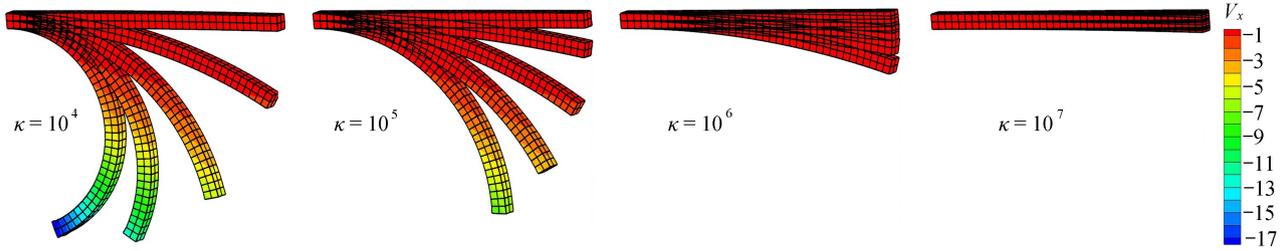


图 4 FEM 在纯弯曲橡胶梁中的变形

Fig. 4 Deformations obtained with the FEM in the pure bending rubber beam example

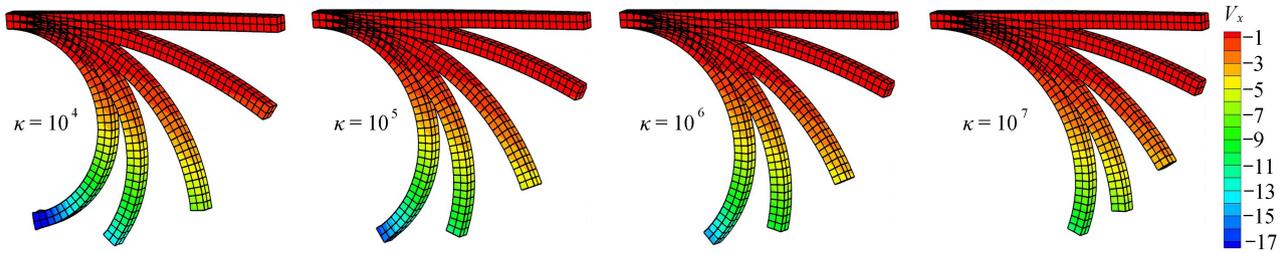


图 5 GFEM 在纯弯曲橡胶梁中的变形

Fig. 5 Deformations obtained with the GFEM in the pure bending rubber beam example

## 5 近不可压 $J_2$ 塑性分析

$J_2$  塑性的屈服函数可写为

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = \sqrt{3\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}/2} - \sigma_Y(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p), \quad (13)$$

其中,  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}$  为 Cauchy 应力的偏应力张量,  $\sigma_Y$  为屈服半径函数, 等效塑性应变  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  是上式唯一内变量. 本文采用和式分解进行塑性分析, 即

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \quad (14)$$

其中,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  和  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$  分别为总应变率和弹性应变率, 塑性应变率  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  可以写为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \lambda \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \sqrt{3/2} \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} / \|\boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}\|, \quad (15)$$

其中,  $\lambda$  为塑性乘子,  $\mathbf{n}$  为塑性流动方向.

塑性材料的变形过程中, 塑性应变远大于弹性应变, 而塑性应变流动只能沿着偏应变方向进行, 这意味着塑性变形是纯剪切变形, 体积无法发生膨胀或压缩. 需要说明的是, 塑性变形与加载路径相关, 为保证收敛及避免可能出现的伪卸载现象需要采用正割的 Newton-Raphson 迭代法. 此外, 屈服面附近发生弹性到塑性的突变, 需要采用基于应力更新算法的一致切线模量来提高收敛性. 正割的 Newton-Raphson 迭代方法可参见文献[16]第 6 章第 4 节, 应力更新算法及一致切线模量的推导可参见文献[17]第 3 章.

考察圆杆的颈缩问题, 算例描述可参见文献[15]. 杆的变形集中在局部从而发生颈缩现象, 而想要模拟出颈缩现象需要较为精确的内力线性化和较强的近不可压分析能力. 图 6 展示了计算网格以及 FEM 和 GFEM 计算的变形及位移场, 图 7 展示了两种方法得到的“顶端位移-颈缩比例”曲线和“顶端位移-支反力”曲线同试验结果的对比, 试验数据来源于文献[15].

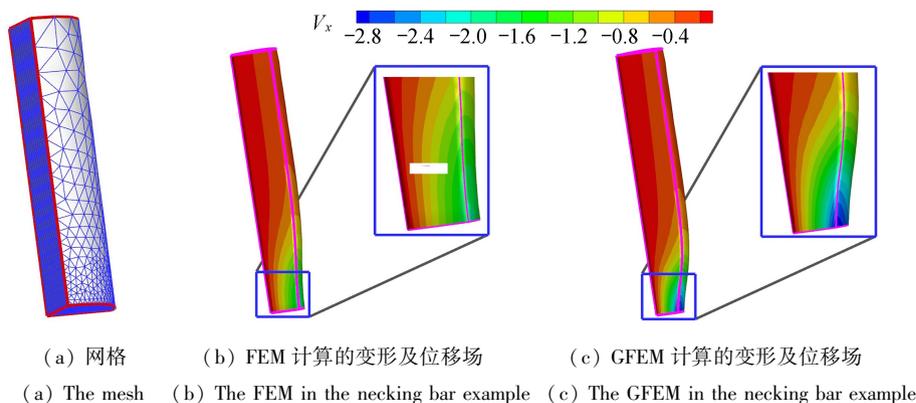
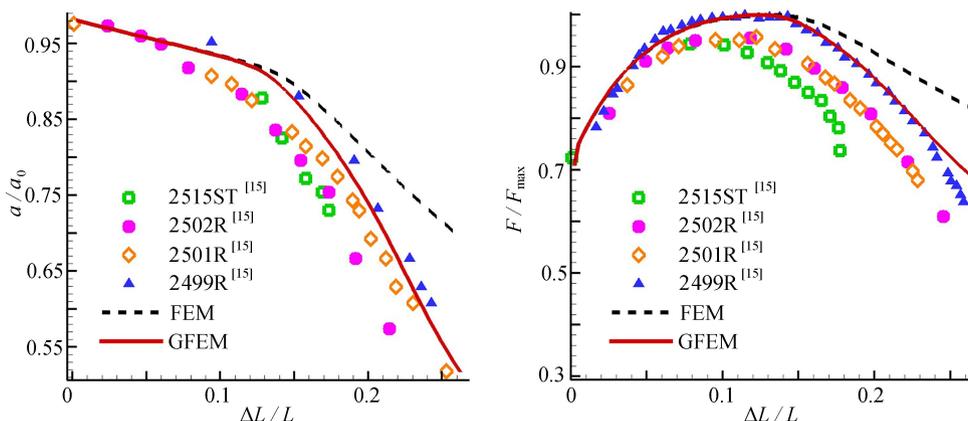


图 6 圆杆颈缩算例

Fig. 6 Displacement fields and deformations obtained in the necking bar example

Fig. 7 Comparison between experimental data<sup>[15]</sup> and numerical results in the necking circular bar example

## 6 结 论

本文在弹性、超弹性及塑性不可压分析中,得出了如下结论:

1) 弹性问题的不可压性体现在 Poisson 比接近 0.5 时,在 Cook 膜算例中可以看出,采用常量形式基底向量的广义有限元,也就是常规有限元,存在非常严重的体积自锁问题,体积自锁的缓解效果随着插值阶次的提高而变得更好。

2) 超弹性材料的不可压性体现在超大的体积模量,常规有限元随着体积模量的增大表现出愈发严重的体积自锁,而广义有限元方法能有效缓解这种体积自锁。

3) 塑性材料的不可压性体现在塑性流动只能沿着偏应变方向,导致塑性变形中体积不会膨胀和压缩。在圆杆颈缩算例中,常规有限元无法模拟颈缩现象,而采用二次基底的广义有限元可以。

**致谢** 本文作者衷心感谢大连理工大学中白国际合作基金(ICR2203)对本文的资助。

## 参考文献 (References):

- [1] 李嘉钰, 陈梦成, 王开心. 基于剪切效应纤维梁单元的结构非线性有限元数值模拟[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(1): 34-48. (LI Jiayu, CHEN Mengcheng, WANG Kaixin. Nonlinear numerical simulation of finite elements based on fiber beam elements with shear effects for structures[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(1): 34-48. (in Chinese))
- [2] SUSSMAN T, BATHE K J. A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis[J]. *Computers & Structures*, 1987, **26**(1/2): 357-409.

- [3] HUGHES T J R. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1980, **15**(9): 1413-1418.
- [4] NAGTEGAAL J C, PARKS D M, RICE J R. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1974, **4**(2): 153-177.
- [5] SHAUER N, DUARTE C A. Improved algorithms for generalized finite element simulations of three-dimensional hydraulic fracture propagation[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2019, **43**(18): 2707-2742.
- [6] 毛晓敏, 张慧化, 纪晓磊, 等. 基于 XFEM 和 GA-BP 神经网络的裂纹智能识别研究[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(11): 1268-1280. (MAO Xiaomin, ZHANG Huihua, JI Xiaolei, et al. Intelligent crack recognition based on XFEM and GA-BP neural networks[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(11): 1268-1280. (in Chinese))
- [7] LI H, DUARTE C A. A two-scale generalized finite element method for parallel simulations of spot welds in large structures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, **337**: 28-65.
- [8] BABUŠKA I, BANERJEE U. Stable generalized finite element method (SGFEM) [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012, **201/204**: 91-111.
- [9] SILLEM A, SIMONE A, SLUYS L J. The orthonormalized generalized finite element method-OGFEM: efficient and stable reduction of approximation errors through multiple orthonormalized enriched basis functions[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, **287**: 112-149.
- [10] TIAN R. Extra-DOF-free and linearly independent enrichments in GFEM[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, **266**: 1-22.
- [11] XIAO G Z, WEN L F, TIAN R, et al. Improved XFEM (IXFEM): 3D dynamic crack propagation under impact loading[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, **405**: 115844.
- [12] MA J W, DUAN Q L, TIAN R. A generalized finite element method without extra degrees of freedom for large deformation analysis of three-dimensional elastic and elastoplastic solids[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, **392**: 114639.
- [13] 马今伟, 段庆林, 陈嵩涛. 无额外自由度广义有限元非线性分析[J]. *计算力学学报*, 2021, **38**(1): 60-65. (MA Jinwei, DUAN Qinglin, CHEN Songtao. Extra-DOF-free generalized finite element method for non-linear analysis[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2021, **38**(1): 60-65. (in Chinese))
- [14] ELGUEDJ T, BAZILEVS Y, CALO V M, et al. B-bar and F-bar projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, **197**(33/40): 2732-2762.
- [15] CHEN J S, PAN C, WU C T, et al. Reproducing kernel particle methods for large deformation analysis of non-linear structures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **139**: 195-227.
- [16] BELYTSCHKO T, LIU W K, MORAN B, et al. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures* [M]. 2nd ed. UK: John Wiley & Sons, 2014.
- [17] SIMO J C, HUGHES T J R. *Computational Inelasticity* [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.