

# 基于 ANN 的混凝土均匀化方法解析解\*

刘溢凡<sup>1,2</sup>, 马小敏<sup>1,2</sup>, 王志勇<sup>1,2</sup>, 王志华<sup>1,2</sup>

(1. 太原理工大学 机械与运载工程学院 应用力学研究所, 太原 030024;  
2. 材料强度与结构冲击山西省重点实验室, 太原 030024)

**摘要:** 通过自定义人工神经网络(artificial neural network, ANN), 借助其优秀的函数拟合功能, 针对骨料/砂浆基质二相混凝土, 求解间接均匀化理论中微分法的高度非线性耦合微分方程的解析解, 得到了混凝土体积模量和剪切模量分别与骨料体积分数的函数关系, 并与数值模拟的结果进行了对比. 结果表明, 基于 ANN 的求解方法快速且具有更高的精度. 此外, 通过解构 ANN 的方法给出了在细观力学参数不变的条件下由骨料体积分数、初始孔隙率直接计算骨料/砂浆基质/孔隙三相混凝土弹性模量的公式. 结果表明, 对于不同骨料体积分数和初始孔隙率的混凝土样本, 该公式均有较高的计算精度, 同时避免了传统均匀化方法的复杂分析和大量假设, 为复合材料均匀化方法研究提供了新思路.

**关键词:** 人工神经网络; 混凝土; 均匀化; 微分方程; 弹性模量

**中图分类号:** TU37; TP39; O34 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440106

## Analytical Solution of the Concrete Homogenization Method Based on the ANN

LIU Yifan<sup>1,2</sup>, MA Xiaomin<sup>1,2</sup>, WANG Zhiyong<sup>1,2</sup>, WANG Zhihua<sup>1,2</sup>

(1. *Institute of Applied Mechanics, College of Mechanical and Vehicle Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, P.R.China;*  
2. *Shanxi Key Laboratory of Material Strength and Structural Impact, Taiyuan 030024, P.R.China*)

**Abstract:** By means of the self-defined artificial neural network (ANN) and its excellent function fitting function, aimed at aggregate-mortar matrix 2-phase concrete, the analytical solutions of the highly nonlinear coupling differential equation of the differential method in the indirect homogenization theory were given, the functional relations between the volume modulus and the shear modulus of concrete and the volume fractions of aggregate were obtained respectively, and the results were compared with those of numerical simulation. The results show that, the method based on the ANN is fast and has higher precision. In addition, the method of deconstructing ANN provides the formula of calculating the elastic modulus of aggregate-mortar matrix-pore 3-phase concrete directly from aggregate volume fractions and initial porosities under constant meso-mechanical parameters. For concrete samples with different aggregate volume fractions and initial porosities, the formula

\* 收稿日期: 2023-04-13; 修订日期: 2023-12-18

**基金项目:** 国家自然科学基金(12272257;12202303); 山西省基础研究计划(202203021211169)

**作者简介:** 刘溢凡(1999—), 男, 硕士生(E-mail: liuyifan0019@link.tyut.edu.cn);

王志勇(1982—), 男, 副教授, 博士, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: wangzhiyong@tyut.edu.cn).

**引用格式:** 刘溢凡, 马小敏, 王志勇, 王志华. 基于 ANN 的混凝土均匀化方法解析解[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(5): 554-570.

has higher calculation accuracy, and avoids the complex analysis and many assumptions of the traditional homogenization method. The work provides a new idea of homogenization method for composite materials.

**Key words:** artificial neural network; concrete; homogenization; differential equation; elasticity modulus

## 0 引 言

由于复合材料的可设计性以及其具有良好的性能,使得其在工程结构中获得了日益重要的应用。但是复合材料的材质、增强相和缺陷分布往往具有不均匀性,导致其性能也是不均匀的<sup>[1-3]</sup>。因此,通过细观力学方法在细观尺度上研究各相材料的相互作用,建立材料宏观力学性能与细观参数的关系一直是研究人员的重要目标<sup>[4-6]</sup>。

均匀化方法是一种基于细观场和细观性能,可以估计复合材料有效性能的力学理论<sup>[7-8]</sup>。均匀化方法和模型包括:RVE 模型、直接均匀化方法、以单一夹杂理论为基础的自洽模型、广义自洽模型和 M-T 模型,微分法、以变分原理为基础的定界法、二尺度展开法等,这些方法和模型都推动了复合材料均匀化理论和应用的发展<sup>[9-10]</sup>。但是由于现代工程对产品性能、质量和加工精度等要求不断提高,各种新型复合材料不断问世,对于复合材料的性能要求也不断提高。通过传统力学方法推导复合材料均匀化方法中的解析解往往十分困难且耗时巨大,因此如何快速、更加准确地预测复合材料的有效性能成为亟待解决的问题<sup>[11-14]</sup>。

近年来,随着人工智能在越来越多的领域取得显著成果,人们开始利用深度学习技术优秀的数据挖掘能力解决复杂的工程问题<sup>[15-18]</sup>。作为深度学习算法基本组成部分的人工神经网络(ANN)是一个优越的通用函数逼近器,它可以建立大量数据“端到端”的高精度映射,同时具有自动求解微分的性质,这使得 ANN 可以被应用于均匀化问题中的有效性能预测和复杂微分方程的求解<sup>[19]</sup>。闫海等<sup>[20]</sup>通过建立短纤维增强聚氨酯复合材料(RSF/UC)的有限元模型,使用卷积神经网络(CNN),预测了平面随机分布 RSF/UC 的有效弹性参数,比较了其与传统模型在预测有效弹性模量和剪切模量上的精度差异。针对均匀化降阶模型,Kani 等<sup>[21]</sup>采用深度残差递归神经网络(DR-RNN),将物理约束求解偏微分方程法与正交分解和离散经验插值方法相结合,用于构造最优的降阶基函数和评估与全阶模型大小无关的非线性项,该方法大大降低了计算成本。Yang 等<sup>[22]</sup>基于均匀化理论的 neo-Hookean 模型和 Arruda-Boyce 模型,通过 RVE 生成了超弹性材料的主拉伸应力数据,采用 ANN 方法建立了任意载荷下的三维非线性弹性材料定律。本文使用自定义的 ANN 模型,以混凝土这种具有代表性、应用广泛,且建立宏观细观联系十分困难的复合材料为研究对象<sup>[23]</sup>,并针对骨料/砂浆基质二相混凝土模型,基于间接均匀化理论的微分法,计算混凝土在不同体积分数下的体积模量和剪切模量,并与数值模拟结果进行对比。

对于骨料/砂浆基质/孔隙三相混凝土,混凝土中含有的初始孔洞和裂隙等细观缺陷会对其宏观力学性能造成很大影响,微分法往往不再适用<sup>[24]</sup>。通常的均匀化方法为:先根据骨料和砂浆基质各自的体积分数采用二相介质复合材料的均匀化方法简化为“等效基质”,再通过各向同性空心弹性球模型求解混凝土的各有效模量。此方法在计算“等效基质”和混凝土发生变形后的孔隙率时均使用了简化模型,并不能真实反映混凝土细观组分的变形过程<sup>[25]</sup>。同时,在计算不同孔隙率混凝土的有效模量时,需要求解其对应的变形后孔隙率,过程较为繁琐。因此,本文提出了一种基于解构 ANN 方法的三相混凝土弹性模量求解思路,并给出了在细观力学参数不变的条件下由骨料体积分数、初始孔隙率直接计算混凝土弹性模量的公式,该方法可以建立骨料体积分数和初始孔隙率到弹性模量的“端到端”高精度映射。

本文详细介绍了二相混凝土模型和三相混凝土模型的有限元建模方法、参数设置和数值仿真结果,阐述了采用 ANN 的搭建思路、具体架构、超参数设置和激活函数的选择等,并且对结果进行了对比和分析。

## 1 骨料/砂浆基质二相混凝土

### 1.1 有限元模型

在现有工作的基础上<sup>[26]</sup>,使用搭建深度学习框架常用的 PYTHON 语言编写建立混凝土细观模型的脚本,导入商业数值模拟软件 ABAQUS 进行二次开发,实现自动化建模、赋予材料属性、建立分析步、施加荷载

和边界条件、网格划分等操作可以提高数据集的建立效率.本文采用 Monte-Carlo 方法进行混凝土二维细观模型骨料投放,生成满足均匀分布的随机变量,并基于 Fuller 曲线的 Walraven 公式计算二维平面中随机骨料的各级配颗粒数量, Walraven 公式的具体表达如下:

$$P_c(D < D_0) = P_k \left( 1.065 \left( \frac{D_0}{D_{\max}} \right)^{0.5} - 0.053 \left( \frac{D_0}{D_{\max}} \right)^4 - 0.012 \left( \frac{D_0}{D_{\max}} \right)^6 - 0.0045 \left( \frac{D_0}{D_{\max}} \right)^8 + 0.0025 \left( \frac{D_0}{D_{\max}} \right)^{10} \right), \quad (1)$$

式中,  $P_c(D < D_0)$  为混凝土样本截面内颗粒粒径  $D$  小于筛孔  $D_0$  范围内的概率;  $P_k$  为混凝土样本中粗细骨料体积占总体积的百分比;  $D_0$  为筛孔直径;  $D_{\max}$  为最大骨料粒径.

在本文建立的数据集中,混凝土样本的尺寸为 150 mm×150 mm,骨料采用三级配,骨料体积分数范围为 0.2~0.4,共包括数据 21 组.骨料粒径分别为 6 mm, 12 mm 和 18 mm,随机骨料为圆形,网格尺寸均为 1 mm<sup>[27]</sup>.其中,骨料、砂浆采用三角形平面应变网格.为了提高数值模拟的效率,采用线弹性各向同性模型模拟骨料的力学行为,砂浆则采用混凝土塑性损伤模型 (concrete damage plasticity)<sup>[28]</sup>.其他具体的材料参数如表 1 所示,其中  $E$  为弹性模量;  $\nu$  为 Poisson 比;  $f_c$  为抗压强度;  $\Psi$  为膨胀角;  $\eta$  为偏心率;  $\sigma_{\text{b0}}/\sigma_{\text{c0}}$  为应力比.最后,使用 ABAQUS/Standard 隐式模块进行数值模拟计算,采用准静态单轴压缩实验,即在试件顶部施加均匀位移荷载,底部采用固定约束.在 PyCharm 中完成骨料投放后并用 MATPLOTLIB 库绘制的模型如图 1(a) 所示,将骨料等信息导入 ABAQUS 后由脚本自动建模生成的有限元模型如图 1(b) 所示.图 2 展示了本文使用 PYTHON 语言建立的不同骨料体积分数下的混凝土细观模型,其分别对应在 ABAQUS 中加载得到的应力-应变曲线,如图 3(a) 所示.可以看出,弹性模量均随着骨料体积分数的提高呈现逐渐增大的趋势.为了验证所提出有限元模型的有效性,在相似工况和参数选取下和文献中的试验结果<sup>[29-30]</sup>进行了对比,如图 3(b) 所示.从图中可以看出,模拟结果与试验结果吻合较好,曲线趋势一致,弹性模量和峰值应力误差均在 2% 以内.在下降段考虑到混凝土具有较强的随机、非均质和复杂界面等特点,细观模型和实际试件的宏观力学响应的误差在可接受的范围内.

表 1 两种细观组分的力学参量

Table 1 Mechanical parameters of the 2 meso-components

	$E/\text{GPa}$	$\nu$	$f_c/\text{MPa}$	$\Psi/(\text{°})$	$\eta/\%$	$\sigma_{\text{b0}}/\sigma_{\text{c0}}$
aggregate	43	0.23	-	-	-	-
mortar	25	0.2	35	38	0.1	1.16

为了给 1.4 小节中求解微分方程的计算结果提供对比数据,提取 21 组应力-应变曲线的弹性模量,结果见表 2.

表 2 数据集中各混凝土样本的弹性模量

Table 2 The elastic modulus of each concrete sample in the dataset

number	1	2	3	4	5	6	7
$E/\text{GPa}$	28.80	28.89	29.10	29.21	29.31	29.51	29.64
number	8	9	10	11	12	13	14
$E/\text{GPa}$	29.74	29.95	30.06	30.36	30.47	30.68	30.81
number	15	16	17	18	19	20	21
$E/\text{GPa}$	30.93	31.15	31.26	31.41	31.59	31.73	31.85

## 1.2 微分法

均匀化方法中的自洽模型使用了 Eshelby 单一夹杂理论,而该理论对夹杂的形状有严格限制,在高体积分数的情况下,计算结果与实际结果相比误差较大.同时,当夹杂和基体的性能相差较大时往往会导致计算结果不收敛.微分法则采用向基体中逐渐加入夹杂的微分过程,构造了一个“少量添加-均匀化”的循环迭代过程,避免了 Eshelby 单一夹杂理论的限制和夹杂间的互相影响,下面介绍微分法的具体推导过程<sup>[31]</sup>.

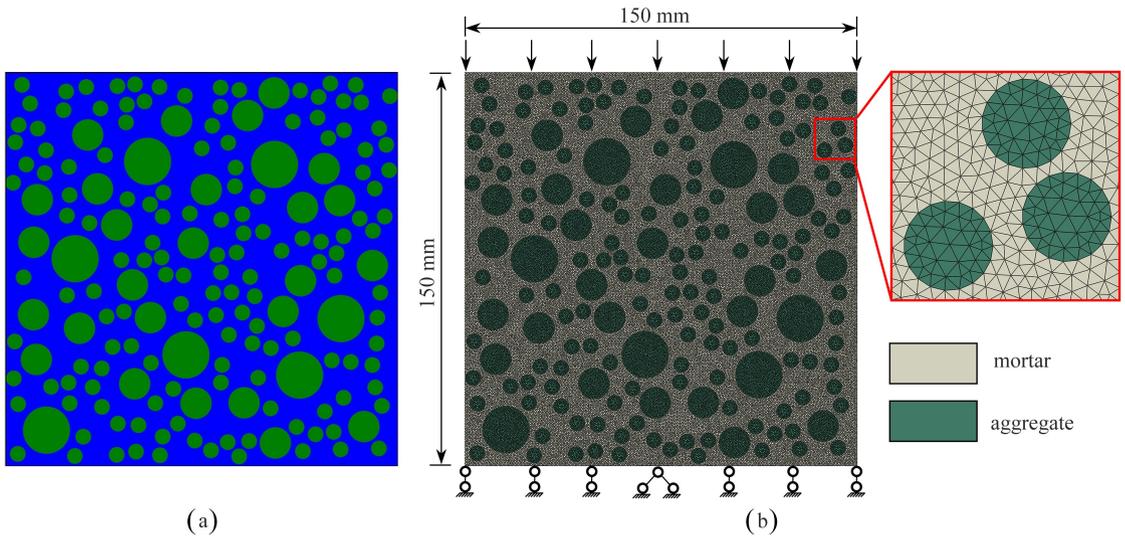


图 1 PYTHON 绘制模型和有限元模型

Fig. 1 The PYTHON drawing model and the finite element model

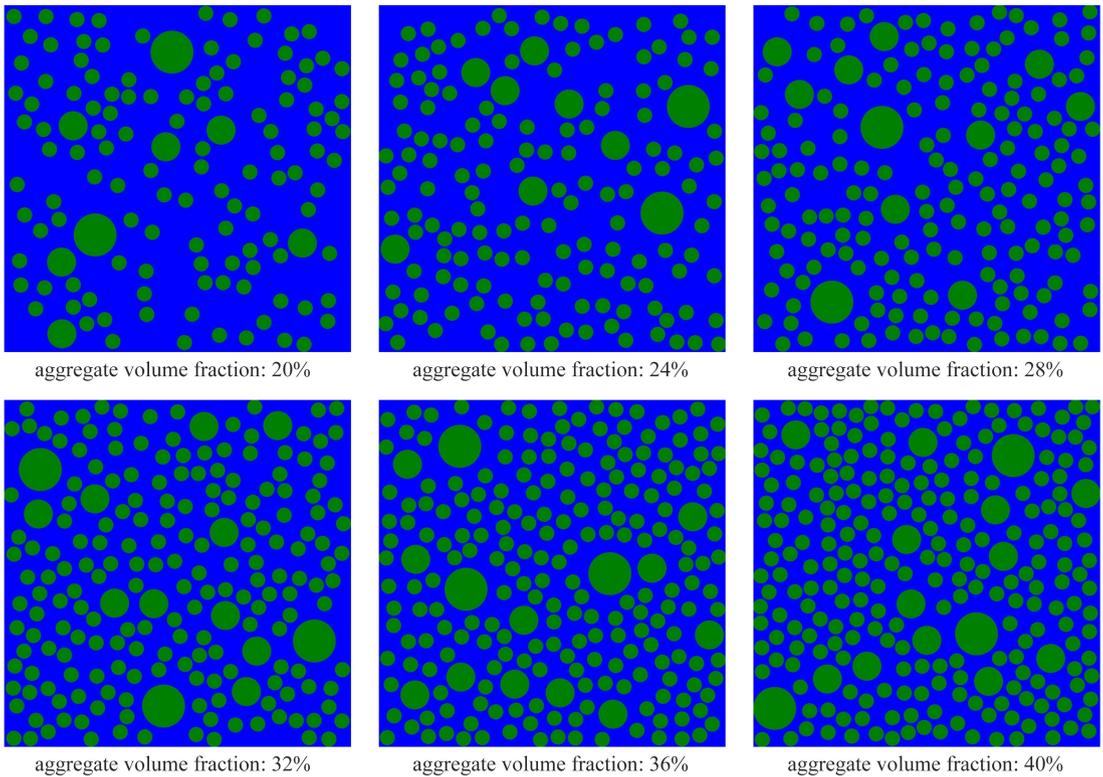


图 2 部分不同骨料体积分数下混凝土微观模型样本

Fig. 2 Some concrete meso-model samples with different aggregate volume fractions

设初始状态下体积为  $V_0$  的混凝土基体中骨料的体积分数为  $p_1$ , 有效刚度矩阵为  $\mathbf{c}$ . 随后加入体积为  $\delta V$  的少量骨料, 使体积分数变为  $p_1 + \delta p_1$ , 有效刚度矩阵变为  $\mathbf{c} + \delta \mathbf{c}$ . 在加入新的骨料之前, 将混凝土基体去掉  $\delta V$  以保证混凝土的总体积  $V_0$  不变, 此时实际的骨料体积分数为

$$p_1 V_0 + \delta V - p_1 \delta V = (p_1 + \delta p_1) V_0, \tag{2}$$

计算得到

$$\frac{\delta V}{V_0} = \frac{\delta p_1}{1 - p_1}. \tag{3}$$

根据平均应力和平均应变的关系:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{c} + \delta\mathbf{c})\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (4)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{V_0 - \delta V}{V_0} \boldsymbol{\sigma} + \frac{\delta V}{V_0} \boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \quad (5)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{V_0 - \delta V}{V_0} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\delta V}{V_0} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}, \quad (6)$$

式中,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  和  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  为混凝土的平均应力和平均应变;  $\boldsymbol{\sigma}$  和  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为混凝土砂浆基质的平均应力和平均应变;  $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$  和  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}$  为新加入骨料的平均应力和平均应变。

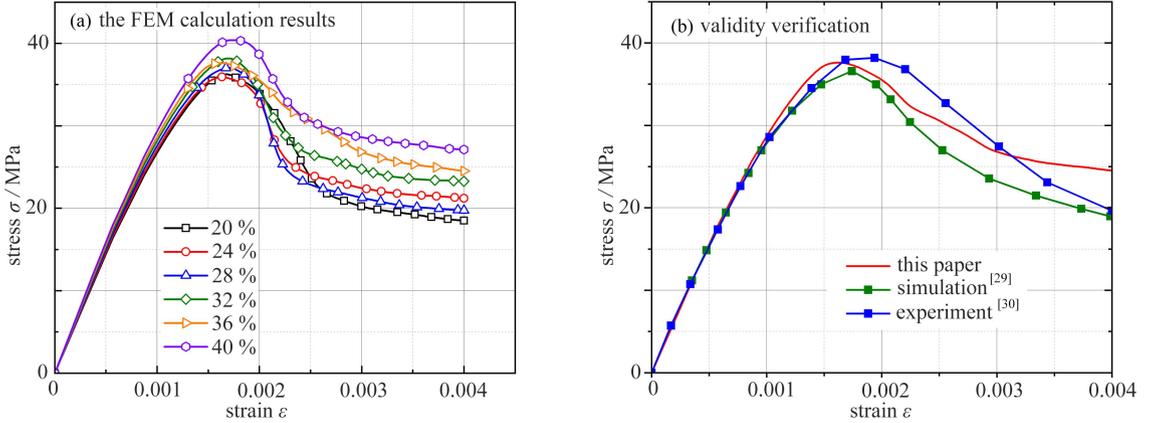


图3 不同骨料体积分数下混凝土微观模型应力-应变曲线及有效性验证

Fig. 3 The concrete meso-model stress-strain curves with different aggregate volume fractions and validity verification

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

由于加入少量骨料,故可用稀疏夹杂的 Eshelby 理论求解式(7)中的平均应变集中因子  $\mathbf{A}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \mathbf{A}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (7)$$

骨料内的应力由平均应力  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  和扰动应力  $\boldsymbol{\sigma}^{\text{pt}}$  组成,应变由平均应变  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  和扰动应变  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pt}}$  组成,即

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{pt}}, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pt}}. \quad (9)$$

根据 Eshelby 等效夹杂理论,有如下等式:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{pt}} = \mathbf{c}^1(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pt}}) = \bar{\mathbf{c}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pt}} - \boldsymbol{\varepsilon}^*), \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{pt}} = \mathbf{S}\boldsymbol{\varepsilon}^*, \quad (11)$$

式中,  $\mathbf{c}^1$  为骨料的材料刚度矩阵;  $\mathbf{S}$  是 Eshelby 张量;  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  是等效特征应变。

联立方程(8)–(11),得

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = [\mathbf{I} + \mathbf{S}\mathbf{c}^{-1}(\mathbf{c}^1 - \bar{\mathbf{c}})]^{-1}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (12)$$

式中,  $\mathbf{I}$  为单位张量。

联立方程(4)、(6)、(7),得

$$\delta\mathbf{c} = (\mathbf{c}^1 - \mathbf{c})\mathbf{A} \frac{\delta V}{V_0}, \quad (13)$$

联立方程(3)、(13),得

$$\frac{d\mathbf{c}}{dp_1} = \frac{1}{1 - p_1}(\mathbf{c}^1 - \mathbf{c})\mathbf{A}. \quad (14)$$

本文采用圆形骨料进行建模,故方程(14)可以简化为

$$\frac{dk}{dp_1} = \frac{k_1 - k}{1 - p_1} \frac{k + k^*}{k_1 + k^*}, \quad k^* = \frac{4}{3}\mu, \quad (15)$$

$$\frac{d\mu}{dp_1} = \frac{\mu_1 - \mu}{1 - p_1} \frac{\mu + \mu^*}{\mu_1 + \mu^*}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{6} \frac{9k + 8\mu}{k + 2\mu}, \quad (16)$$

初始条件为

$$p_1 = 0; k = k_0, \mu = \mu_0, \quad (17)$$

式中,  $k$  和  $\mu$  分别为混凝土的体积模量和剪切模量;  $k_1$  和  $\mu_1$  分别为骨料的弹性模量和剪切模量;  $k_0$  和  $\mu_0$  分别为混凝土砂浆基质的体积模量和剪切模量。

该方程为相互耦合的微分方程且具有高度非线性的特点,求得显式解十分困难.通常近似取

$$k^* = \frac{4}{3} \mu_0, \mu^* = \frac{\mu_0}{6} \frac{9k_0 + 8\mu_0}{k_0 + 2\mu_0}, \quad (18)$$

可以通过分离变量法得到该方程的显式解为

$$k^* = k_0 + \frac{p_1(k_1 - k)}{1 + (1 - p_1) \frac{k_1 - k_0}{k_1 + k^*}}, \quad (19)$$

$$\mu^* = \mu_0 + \frac{p_1(\mu_1 - \mu)}{1 + (1 - p_1) \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu^*}}. \quad (20)$$

由于在式(15)、(16)的  $k^*$  和  $\mu^*$  计算中假设混凝土的体积模量和剪切模量不随骨料的逐渐加入发生变化,导致最终结果往往小于实际值.下面将介绍本文使用 ANN 求解该方程解析解的方法。

### 1.3 ANN 架构

ANN 通过连接层和每层的神经元,用渐进的方式形成输入层到输出层之间越来越复杂的表示,每层的线性变化通过权重实现参数化,再通过激活函数实现非线性变换.采用损失函数衡量输出与预期值之间的距离,根据损失函数计算的损失值并通过反向传播算法(优化器)对权重值进行调整.神经网络初始化时会随机赋予各层权重值,随着大量的迭代计算,权重值向正确的方向逐步微调,损失值逐渐降低.当损失值不发生变化或者在最小值附近震荡时,即可得到输入数据和输出数据的精确映射关系<sup>[32-33]</sup>。

本文搭建的 ANN 如图 4 所示,共包括两个 BP 神经网络,隐藏层均为 4 个全连接层,每层有 20 个神经元.采用 tanh 函数作为激活函数,解决了 sigmoid 函数不以 0 为中心输出的问题,从而提高了收敛速度,同时在训练过程中不会发生梯度爆炸,这两种激活函数的表达如图 5(a) 和 5(b) 所示。

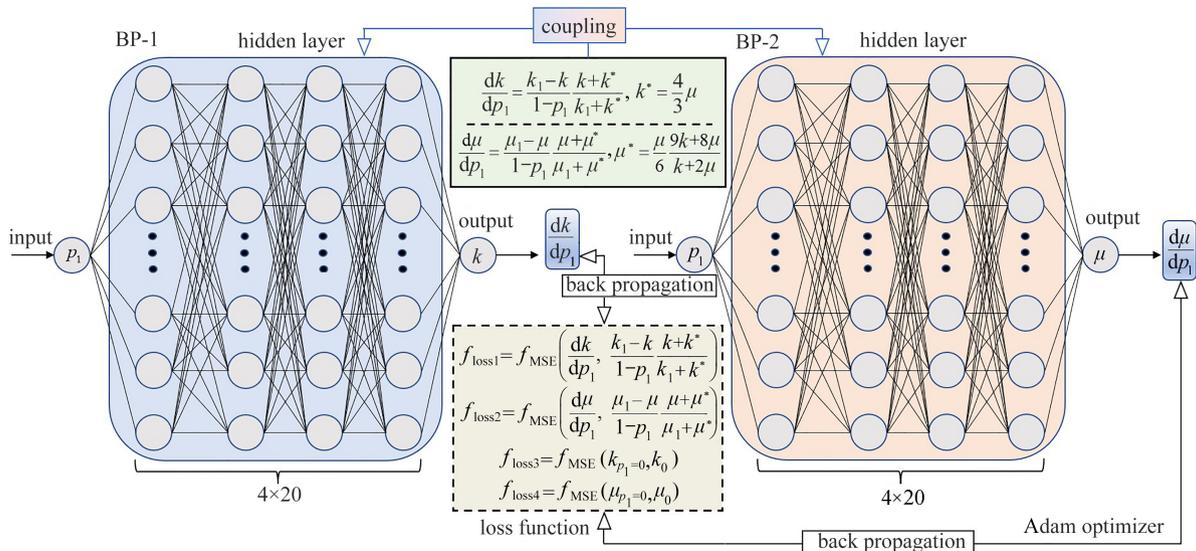


图 4 自定义 ANN 架构

Fig. 4 The custom ANN architecture

采用均方误差 (MSE) 函数作为损失函数, MSE 函数表达式如式 (21) 所示. 将 Adam 算法作为反向传播过程的优化器, 初始学习率设置为  $1\text{E}-4$ ,

$$f_{\text{MSE}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad (21)$$

式中,  $n$  为数据点数量;  $y_i$  为第  $i$  个数据点的真实值;  $\hat{y}_i$  为第  $i$  个数据点的预测值.

将骨料体积分数的范围  $[0, 0.4]$ , 固定间隔共 100 个点同时输入两个神经网络, 对应的混凝土体积模量和剪切模量作为输出, 通过神经网络拟合得到体积模量和剪切模量分别与骨料体积分数的初始关系, 即通过神经网络 1 (BP-1) 拟合体积模量和骨料体积分数的关系, 神经网络 2 (BP-2) 拟合剪切模量和骨料体积分数的关系. 然后通过神经网络计算得到  $dk/dp_1$  和  $d\mu/dp_1$ , 用方程 (15) 和方程 (16) 的耦合关系建立两个 BP 神经网络的联系. 随后通过两个微分方程的等式关系和初始条件, 设置自定义的损失函数, 如图 4 中 “ $f_{\text{loss}1} \sim f_{\text{loss}4}$ ” 所示, 再将  $f_{\text{loss}1} + f_{\text{loss}3}$  和  $f_{\text{loss}2} + f_{\text{loss}4}$  分别作为两个神经网络的最终损失函数. 最后神经网络通过多次迭代计算不断优化权重, 得到体积模量和剪切模量分别与骨料体积分数的最终关系, 完成微分方程的求解.

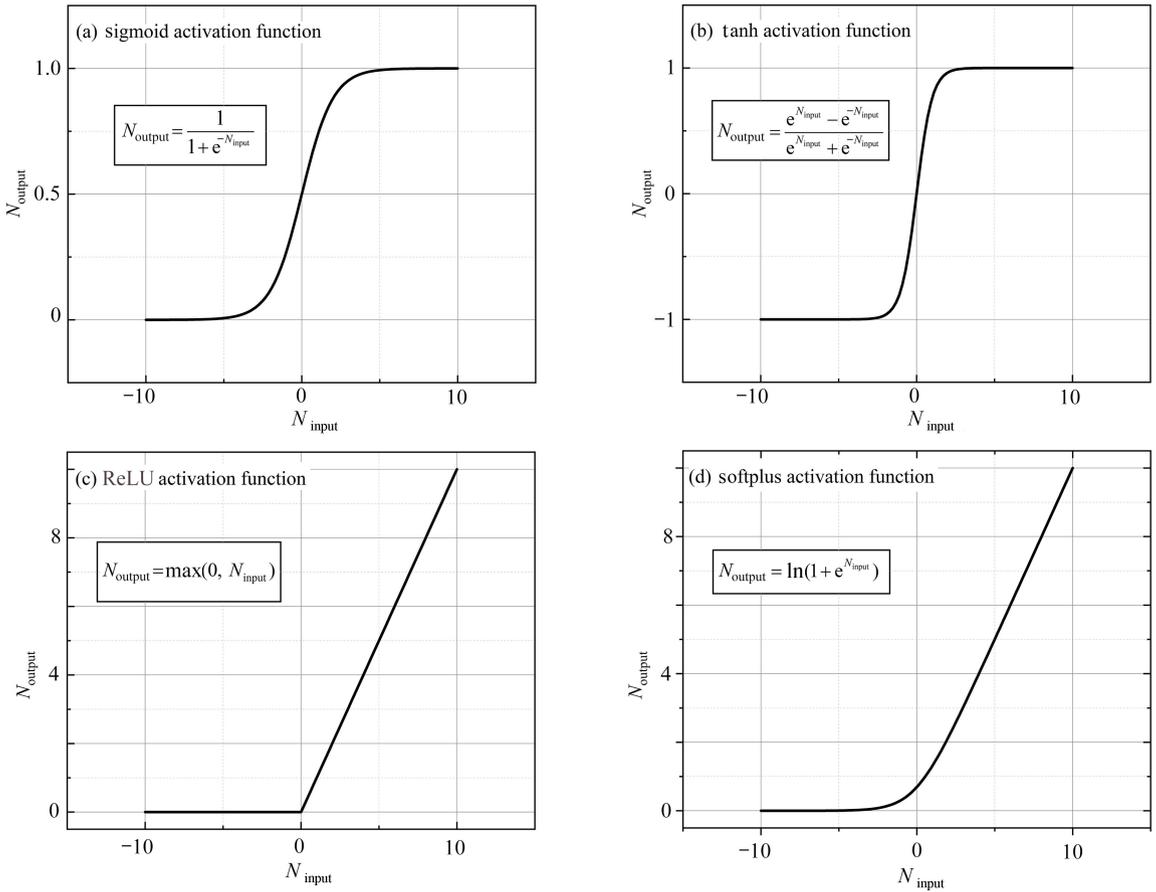


图5 激活函数

Fig. 5 The activation function

#### 1.4 训练过程

首先需要使用 1.1 小节中的力学参数对微分方程中的已知量进行计算, 包括混凝土砂浆基体的体积模量和剪切模量以及骨料的体积模量和剪切模量:

$$k_0 = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} = \frac{25}{3 \times (1 - 2 \times 0.2)} = 13.89 \text{ GPa}, \quad k_1 = \frac{43}{3 \times (1 - 2 \times 0.23)} = 26.54 \text{ GPa}, \quad (22)$$

$$\mu_0 = \frac{E}{2(1 + \mu)} = \frac{25}{2 \times (1 + 0.2)} = 10.42 \text{ GPa}, \quad \mu_1 = \frac{43}{2 \times (1 + 0.23)} = 17.48 \text{ GPa}. \quad (23)$$

训练过程基于 PyCharm 集成编译环境中的 Pytorch1.8.0 框架, ANN 共迭代 1 000 次, 完整迭代过程耗

时 8.12 s, 训练采用的计算机软硬件环境如表 3 所示.两个神经网络在训练过程中的损失曲线如图 6 所示.其中,神经网络 1 在迭代至 967 轮时收敛,此时的 MSE 值为 0.000 1,神经网络 2 在迭代至 221 轮时收敛, MSE 值为 0.

表 3 试验环境的硬件和软件参数

Table 3 Hardware and software parameters of the experimental environment

part	parameter
central processing unit	Inter Core i7-11800H CPU @ 2.3 GHz
memory	DDR4 memory 8 GB
graphics card	NVIDIA GeForce RTX3060
system	Windows 10
environment	PYTHON 3.9.7 Tensorfolw 2.8.0 Keras 2.0.6 Numpy 1.22.2

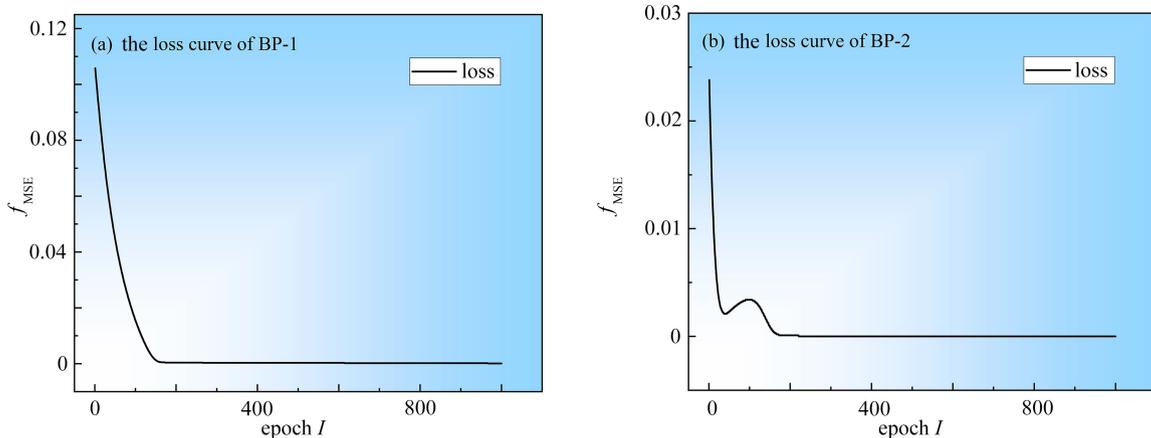


图 6 训练过程的损失曲线

Fig. 6 The loss curves of the training process

根据 1.1 小节有限元模型的骨料体积分数范围,选取了  $p_1$  区间为  $[0.2, 0.4]$  下的混凝土体积模量和剪切模量在本文训练的 ANN 方法下的计算结果,如图 7(a) 所示.同时,对体积模量和剪切模量分别与骨料体积分数的关系做了公式拟合,拟合误差评估采用 MAE 函数(见式(26)).经计算,这两组关系可以表达为

$$k = - 2.248p_1^2 + 11.06p_1 + 13.93, \tag{24}$$

$$\mu = - 1.286p_1^2 + 6.475p_1 + 10.47, \tag{25}$$

$$f_{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n | y_i - \hat{y}_i | . \tag{26}$$

先通过分离变量法计算得到本文研究微分方程的近似显式解,由于 1.1 小节中提取的是混凝土的弹性模量,故还需将神经网络方法计算得到的体积模量和分离变量方法得到的体积模量转换为弹性模量(即通过 Voigt 并联模型计算等效 Poisson 比)<sup>[34]</sup>,最后对两种不同计算方法的结果进行对比,对比结果如图 7(b) 所示.结果表明,基于 ANN 的求解方法具有更高的精度,同样采用 MAE 函数评估两种方法的误差,经过计算,ANN 方法和分离变量方法的精度分别为 0.92 和 2.05.

需要说明的是,混凝土作为一种随机复合材料,细观组分分布的随机性和骨料的几何形状会对其宏观力学性能造成一定影响.相关文献表明,细观组分的随机分布和骨料形状对弹性模量的影响很小,峰值应力略有误差,而裂纹的初始萌发位置、裂纹扩展走势和损伤的演化受到细观混凝土中骨料几何形状和随机分布的影响,也导致了应力-应变曲线下降段的差异<sup>[35-37]</sup>.因此,本文采用圆形骨料在保证模拟精度的同时具有较高的建模效率.对于骨料分布随机性的影响,采用相同骨料体积分数下具有不同的骨料空间随机分布的混凝土样本进行 3 组数值模拟,其损伤和弹性模量等结果如图 8 所示.可以看出,骨料空间随机分布对弹性模量的影响误差大约为 1%.

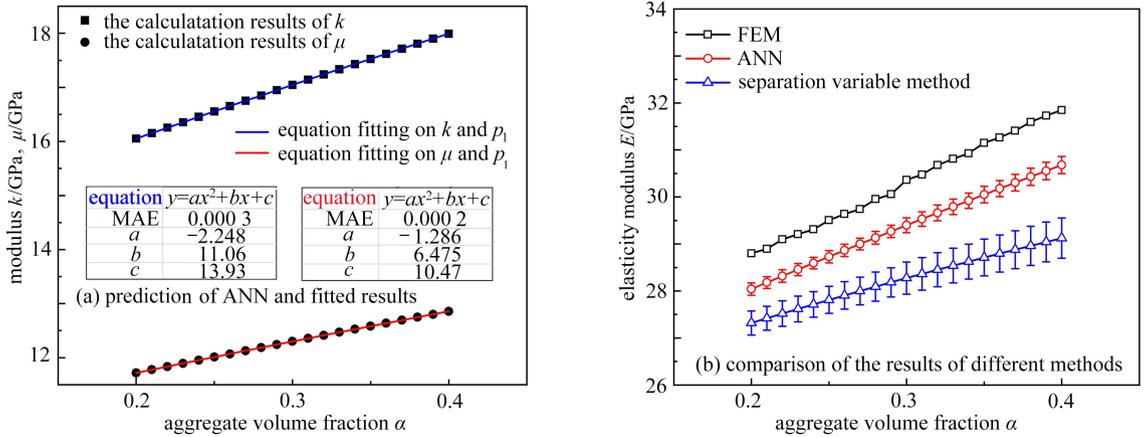


图7 ANN计算结果以及与其他方法对比

Fig. 7 The ANN calculation results and the comparison with other methods

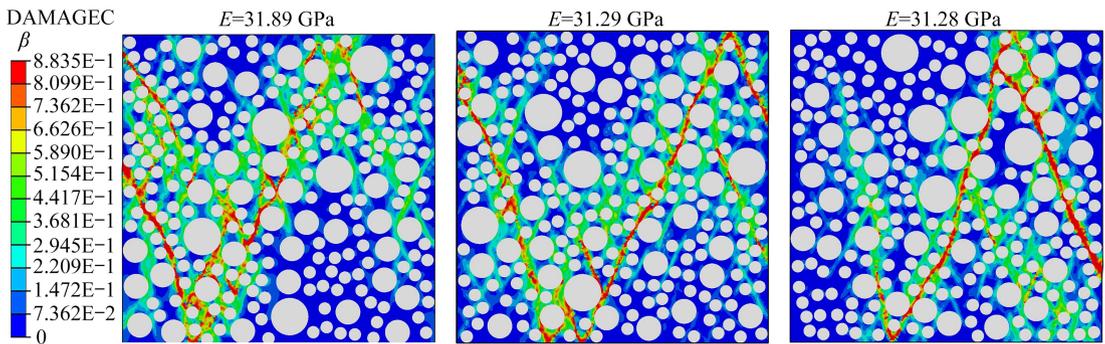


图8 不同骨料随机分布下的损伤和弹性模量

Fig. 8 Damages and elastic moduli under different random distributions of aggregates

## 2 骨料/砂浆基质/孔隙三相混凝土

### 2.1 有限元模型

采用与1.1小节类似的建模方法,不同之处在于需要在基体中投放骨料后建立圆形孔隙.共建立数据231组,骨料体积分数范围为0.2~0.4,孔隙率范围为0~0.1.其他模型参数、材料属性、网格划分、加载方式等均同1.1小节.建立的有限元模型和对应的PYTHON模型分别如图9(a)和9(b)所示.图10展示了本文使用PYTHON语言建立的部分不同骨料体积分数和孔隙率下的混凝土微观模型.

部分数值模拟加载结果如图11所示,可以看出,在同一骨料体积分数下,随着初始孔隙率的增加,应力-应变曲线弹性模量、峰值应力和峰值应变均逐渐减小.同时,在骨料体积分数和初始孔隙率两个细观参量的共同作用下,混凝土有效弹性模量呈现复杂的变化规律.

采用解构ANN的方法实现提取混凝土弹性模量与骨料体积分数、初始孔隙率的函数关系.首先搭建BP神经网络,输入层包括骨料体积分数和初始孔隙率两个神经元,为了便于解构神经网络,仅设置一层隐藏层,包括3个神经元,输出层为混凝土弹性模量一个神经元(见图12(a)).采用softplus函数作为激活函数替代常用的ReLU函数(图5(c)和5(d)),这样做的原因是:softplus函数作为平滑后的ReLU函数,虽然计算时间略有提升,但是具有更优越的非线性问题处理能力,同时也不会出现梯度饱和的问题.采用MSE函数作为损失函数,同时选取MAE函数作为评价指标,将Adam算法作为反向传播过程的优化器.

在读取数据集后,由于骨料体积分数的数据尺度比孔隙率大一个数量级,如果直接采用原始数据进行分析,数值较大的参量在神经网络的综合分析过程中影响权重可能会被放大,而数值较小的参量会被削弱.同时,数据数量级的差异会导致神经网络的收敛速度变慢.因此需要对输入数据进行标准差标准化处理,使不同数据具有相同的尺度.

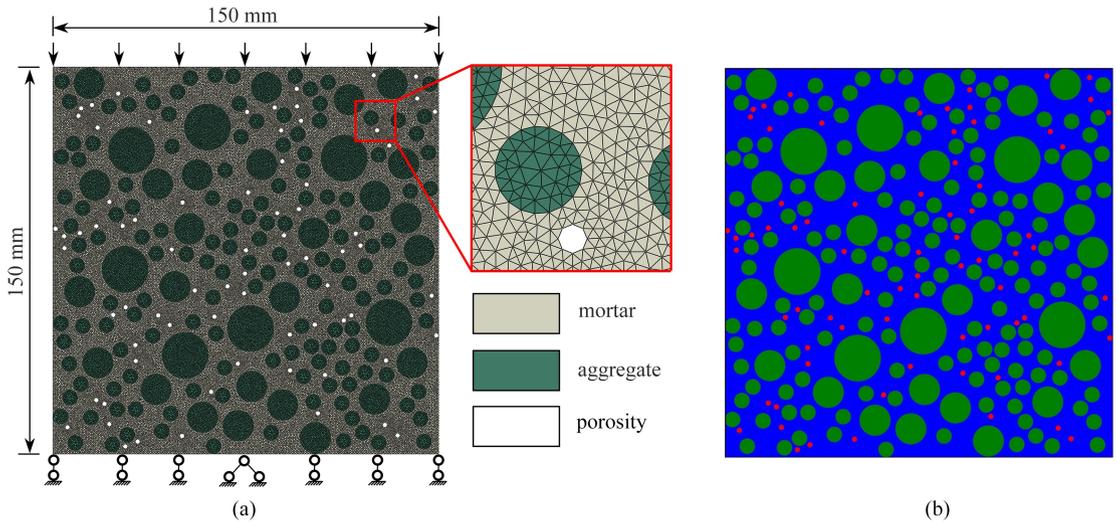


图 9 有限元模型和 PYTHON 绘制模型

Fig. 9 The finite element model and the PYTHON drawing model

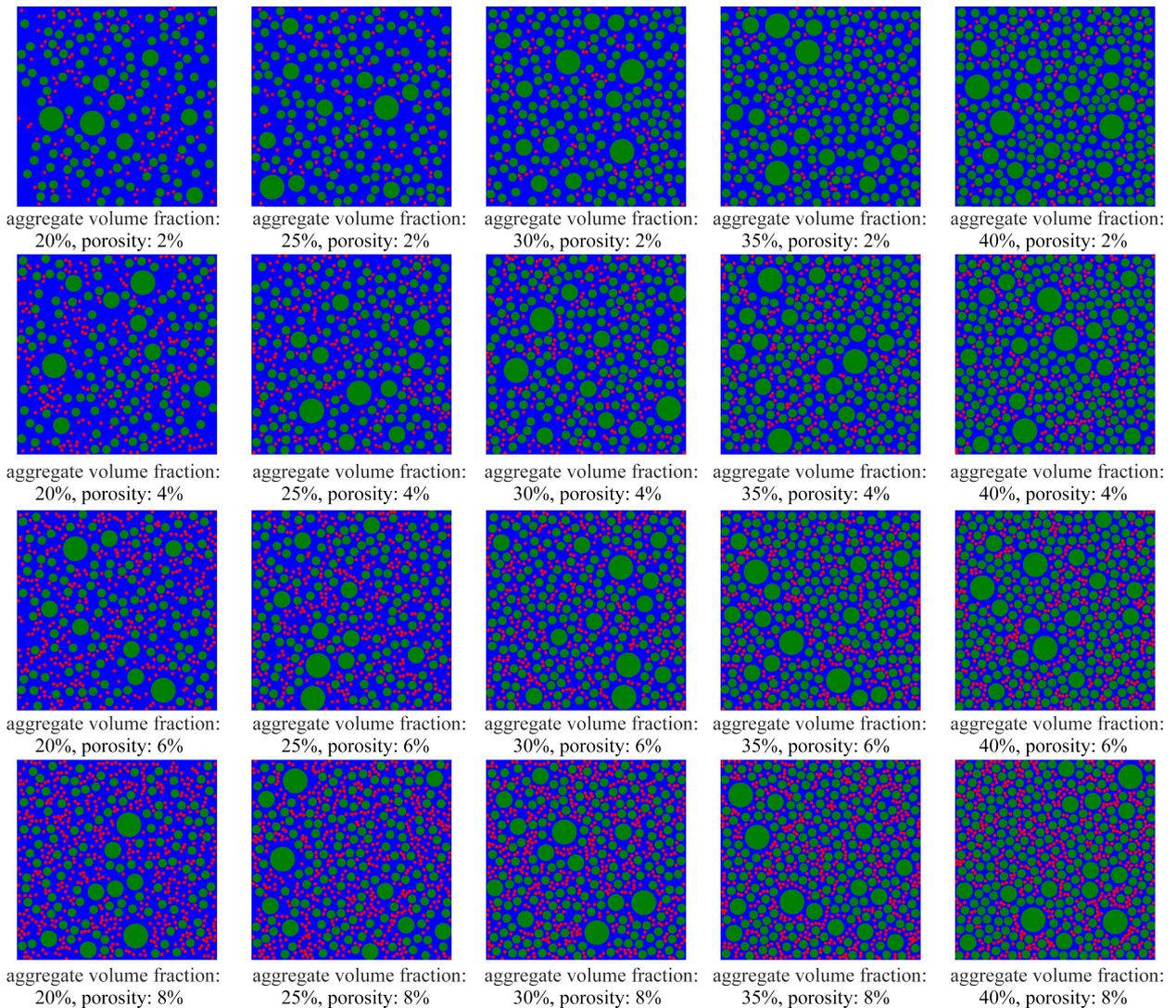


图 10 部分不同骨料体积分数和孔隙率下的混凝土微观模型样本

Fig. 10 Some concrete meso-model samples with different aggregate volume fractions and porosity

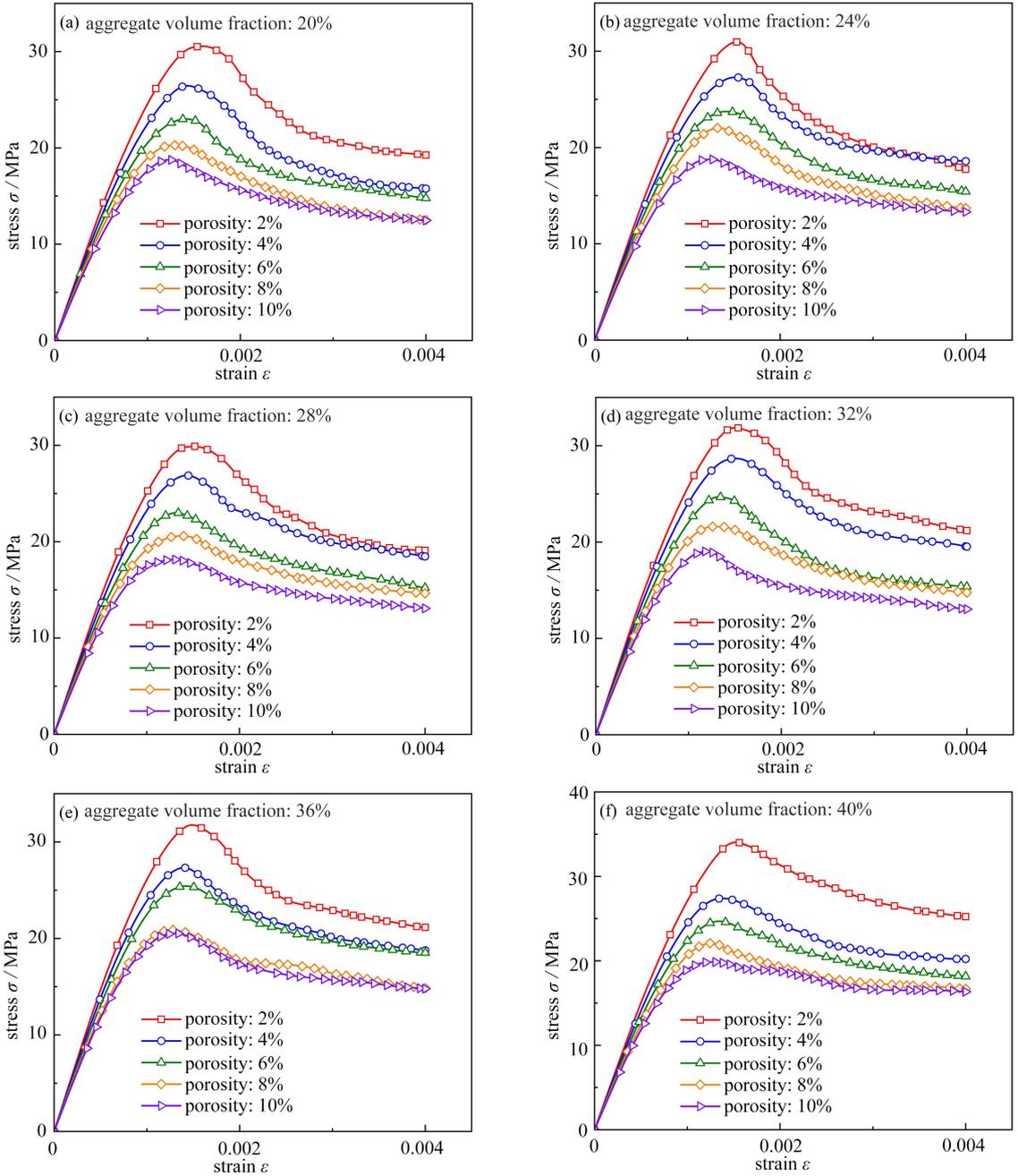


图 11 不同骨料体积分数和孔隙率下的混凝土细观模型应力-应变曲线

Fig. 11 Some concrete meso-model stress-strain curves with different aggregate volume fractions and porosities

## 2.2 训练过程

训练过程基于 PyCharm 集成编译环境中的 Tensorflow2.8.0 框架, 框架训练数据共包括训练集 209 组, 验证集 11 组, 测试集 11 组, 迭代 100 轮次, `batch_size` (即一次训练抓取的数据样本数量) 设置为 2, 完整训练过程共耗时 5.69 s, 训练采用的计算机软硬件环境如表 3 所示. 训练过程中的 MSE 曲线和 MAE 曲线如图 13(a) 和 13(b) 所示, 可以看出, 在训练过程中损失值先是快速下降随后缓慢趋于平稳, 训练结束后最终的 MSE 和 MAE 值分别为 0.07 和 0.20, 表明该问题在 BP 神经网络的训练过程中具有良好的收敛性.

然后提取最后一轮迭代的训练权重参数 (见图 12(b)), 包括输入层到隐藏层和隐藏层到输出层的权重矩阵  $\mathbf{W}_1$  和  $\mathbf{W}_2$ 、输入层到隐藏层和隐藏层到输出层的偏置矩阵  $\mathbf{B}_1$  和  $\mathbf{B}_2$ . 详细的推导过程如下所示:

权重矩阵及其转置:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0.052 & -0.463 & 0.939 \\ -0.560 & -0.864 & 0.866 \end{bmatrix}, W_1^T = \begin{bmatrix} 0.052 & -0.560 \\ -0.463 & -0.864 \\ 0.939 & 0.866 \end{bmatrix},$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 2.351 \\ 3.100 \\ 2.311 \end{bmatrix}, W_2^T = [2.351 \quad 3.100 \quad 2.311].$$

偏置矩阵:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2.972 \\ 3.353 \\ 2.881 \end{bmatrix}, B_2 = 2.315.$$

数据标准差标准化过程:

$$M_\varphi = \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_i}{n} = 0.29, M_p = \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n} = 0.05,$$

$$S_\varphi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = 0.055, S_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = 0.032,$$

$$\varphi = \frac{\varphi_{\text{input}} - M_\varphi}{S_\varphi}, p = \frac{p_{\text{input}} - M_p}{S_p}.$$

隐藏层的输出值:

$$Y_1 = W_1^T X + B_1 = \begin{bmatrix} w_{11}^1 \varphi + w_{21}^1 p \\ w_{12}^1 \varphi + w_{22}^1 p \\ w_{13}^1 \varphi + w_{23}^1 p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}^1 \\ b_{21}^1 \\ b_{31}^1 \end{bmatrix}.$$

采用 softplus 函数作为激活函数的激活值:

$$Z_1 = \ln(1 + e^{Y_1}).$$

输出层的输出值:

$$\begin{aligned} Y_2 &= W_2^T Z_1 + B_2 = \\ &w_{11}^2 \sigma(w_{11}^1 \varphi + w_{21}^1 p + b_{11}^1) + w_{21}^2 \sigma(w_{12}^1 \varphi + w_{22}^1 p + b_{21}^1) + w_{31}^2 \sigma(w_{13}^1 \varphi + w_{23}^1 p + b_{31}^1) + b_{11}^2 = \\ &w_{11}^2 \ln(1 + e^{w_{11}^1 \varphi + w_{21}^1 p + b_{11}^1}) + w_{21}^2 \ln(1 + e^{w_{12}^1 \varphi + w_{22}^1 p + b_{21}^1}) + w_{31}^2 \ln(1 + e^{w_{13}^1 \varphi + w_{23}^1 p + b_{31}^1}) + b_{11}^2 = \\ &\ln[(1 + e^{w_{11}^1 \varphi + w_{21}^1 p + b_{11}^1})^{w_{11}^2} (1 + e^{w_{12}^1 \varphi + w_{22}^1 p + b_{21}^1})^{w_{21}^2} (1 + e^{w_{13}^1 \varphi + w_{23}^1 p + b_{31}^1})^{w_{31}^2}] + b_{11}^2 = \\ &\ln[(1 + e^{0.052\varphi - 0.56p + 2.972})^{2.351} (1 + e^{-0.463\varphi - 0.864p + 3.353})^{3.1} (1 + e^{0.939\varphi + 0.866p + 2.881})^{2.311}] + 2.315. \end{aligned}$$

综上,可推导得到本文设置细观力学参数的条件下,混凝土有效弹性模量和骨料体积分数、初始孔隙率的函数关系:

$$E = \ln[(1 + e^{0.052\varphi - 0.56p + 2.972})^{2.351} (1 + e^{-0.463\varphi - 0.864p + 3.353})^{3.1} (1 + e^{0.939\varphi + 0.866p + 2.881})^{2.311}] + 2.315. \quad (27)$$

为了验证所提出公式的有效性,将不同骨料体积分数下的混凝土,孔隙率在 0~0.1 范围内变化时的弹性模量代入式(27)进行计算,并与数值模拟结果进行对比,误差采用 MAE 函数进行评估,本文训练集的骨料体积分数范围为 20%~38%,通过图 14(a)—14(e)展示的部分对比结果可以看出,对于骨料体积分数 20%~38%范围内的弹性模量预测精度较高,而对于 11 组测试集(骨料体积分数为 40%)计算得到的弹性模量,该公式依然具有较高的可靠性(图 14(f)),证明了本文提出方法的有效性以及其具有较好的泛化能力,吴震<sup>[38]</sup>和金浏<sup>[39]</sup>研究了干燥混凝土弹性模量与孔隙率的定量关系,为了验证本文所提出式(27)的精度,我们

和文献[38-39]的试验结果进行了对比。训练公式(27)所依据的神经网络数据集的混凝土骨料体积分数为20%~38%，因此用测试集(骨料体积分数为40%)的预测结果与试验数据进行对比更有意义，也可以反映该公式的外推能力和泛化能力。从图14(f)中可以看出，本文提出的理论与试验结果吻合很好，能够较准确地反映多孔混凝土的宏观有效弹性性能。需要说明的是，通过该方法建立的公式只能考虑神经网络训练时设置的变量，如果改变其他参数(如混凝土试件的尺寸、骨料的强度等)，则该公式不再适用。

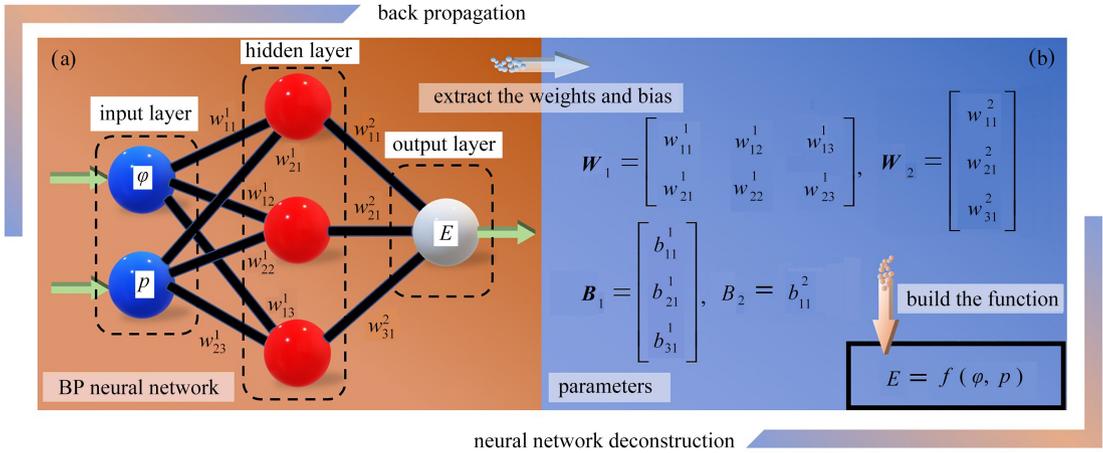


图12 BP神经网络解构流程

Fig. 12 The deconstruction process of the BP neural network

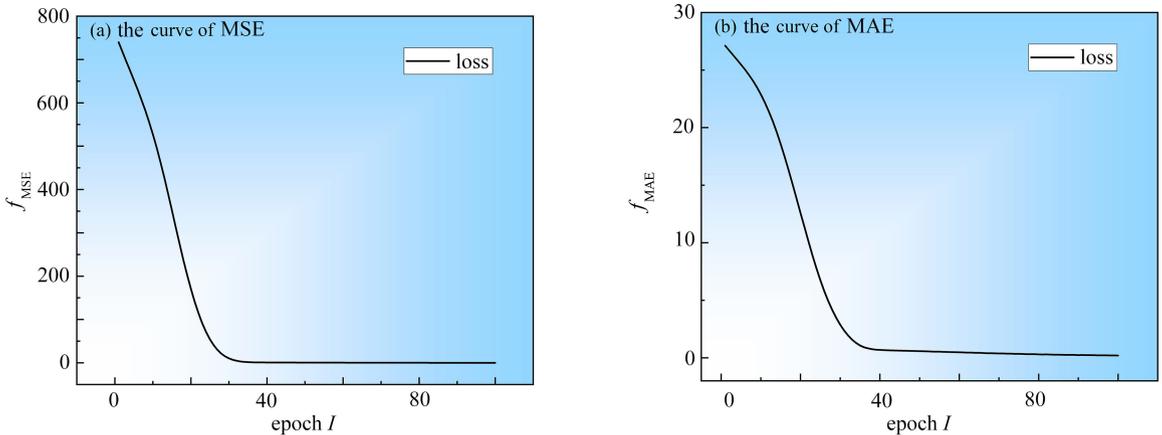
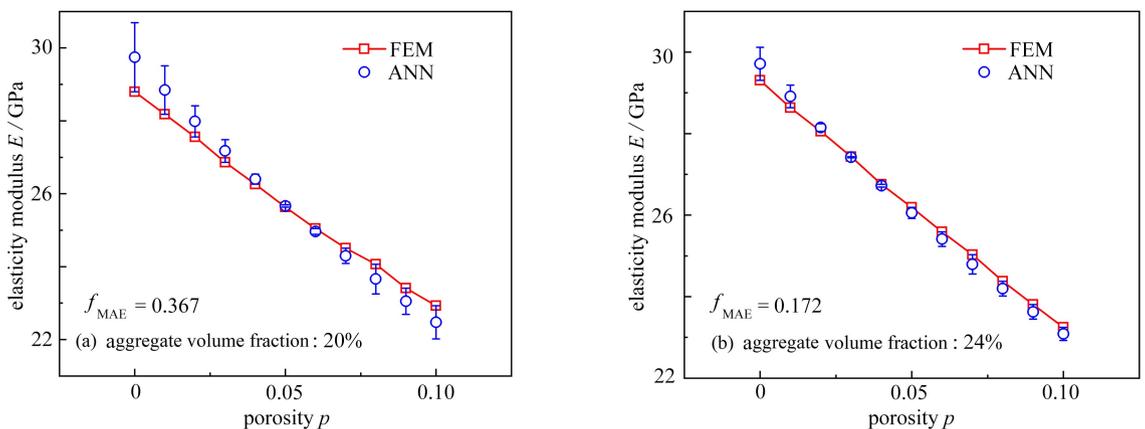


图13 训练过程的损失曲线

Fig. 13 The loss curves of the training process



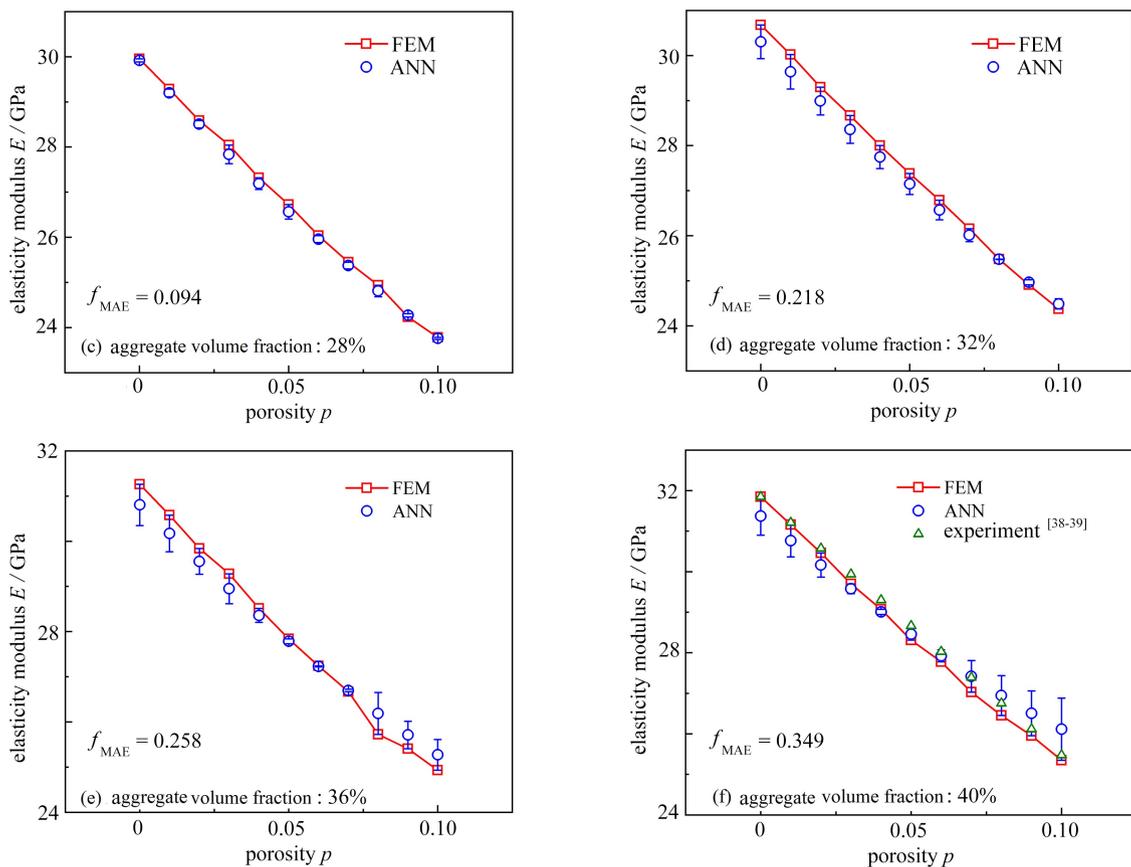


图 14 不同骨料体积分数下的弹性模量预测结果与数值模拟和试验对比

Fig. 14 The prediction results of elastic moduli under different aggregate volume fractions compared with numerical simulation and experiment

### 3 结 论

本文以混凝土这种应用广泛的复合材料为研究对象,针对其均匀化方法,选取了骨料/砂浆基质二相混凝土和骨料/砂浆基质/孔隙三相混凝土两种典型模型,进行解析解研究,得到了以下结论:

1) 在混凝土骨料体积分数 20%~40%、孔隙率 0~10% 的范围内,准静态单轴压缩的工况下:弹性模量均随着骨料体积分数的提高呈现逐渐增大的趋势;在同一骨料体积分数下,随着初始孔隙率的增加,应力-应变曲线弹性模量、峰值应力和峰值应变均逐渐减小。

2) 采用圆形随机骨料进行混凝土准静态压缩数值模拟,骨料空间随机分布对弹性模量的影响误差大约为 1%。

3) 对于骨料/砂浆基质二相组成的混凝土,采用自定义的 ANN 求解间接均匀化理论的微分法中混凝土弹性模量分别关于骨料体积分数和初始孔隙率的高度非线性耦合微分方程,并与数值模拟结果进行对比,相比于传统的近似解法,计算效率高,同时误差 (MAE) 由 2.05 降为 0.92。

4) 本文提出了一种通过解构 ANN 建立初始变量和预测值之间复杂映射关系的显式表达的方法。

5) 对于骨料/砂浆基质/孔隙三相组成的混凝土,通过解构 ANN 的方法给出了在细观力学参数不变的条件下由骨料体积分数、初始孔隙率直接计算混凝土弹性模量的公式。该公式也具有一定的外推和泛化能力,可以有效避免传统均匀化方法中的复杂分析和假设,为复合材料均匀化方法的研究提供了新思路。

### 参考文献 (References):

- [1] 杜晨, 彭雄奇. 变厚度连续纤维增强复合材料铺层设计优化方法[J]. 应用数学和力学, 2022, 43(12): 1313-

1323. (DU Chen, PENG Xiongqi. Lamination design optimization for continuous fiber reinforced composites of variable thicknesses[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(12): 1313-1323. (in Chinese))
- [2] KUMAR R D, WAGH PH, EMANOIL L. A review on synthetic fibers for polymer matrix composites: performance, failure modes and applications[J]. *Materials*, 2022, **15**(14): 1790.
- [3] 张雪琴, 马昆林, 龙广成, 等. 粗骨料形态特征表征参数及其与混凝土性能关系的研究进展[J]. 材料导报, 2023, **38**(2): 22060263. (ZHANG Xueqin, MA Kunlin, LONG Guangcheng, et al. Research progress in characterization parameters of coarse aggregate morphology and its relationship with concrete properties[J]. *Materials Reports*, 2023, **38**(2): 22060263. (in Chinese))
- [4] 陈海玉, 徐福卫. 细观等效理论预测再生混凝土宏观力学参数[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(7): 772-782. (CHEN Haiyu, XU Fuwei. Prediction of the macroscopic mechanics properties of recycled aggregate concrete based on the mesoscopic equivalence theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(7): 772-782. (in Chinese))
- [5] WU L, HUANG D. Peridynamic modeling and simulations on concrete dynamic failure and penetration subjected to impact loadings[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2022, **259**: 108135.
- [6] 李向南, 左晓宝, 周广盼, 等. 混凝土多尺度应力响应方程及其数值模拟[J]. 力学学报, 2022, **54**(11): 3113-3126. (LI Xiangnan, ZUO Xiaobao, ZHOU Guangpan, et al. Equation and numerical simulation on multiscale stress response of concrete[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, **54**(11): 3113-3126. (in Chinese))
- [7] 孙伟, 包世诚, 张嘎. 基于近场动力学均匀化的混凝土防渗墙等效损伤模型[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2022, **50**(9): 1240-1250. (SUN Wei, BAO Shicheng, ZHANG Ga. An equivalent damage model of concrete cut-off wall based on homogenization of peridynamics[J]. *Journal of Tongji University(Natural Science)*, 2022, **50**(9): 1240-1250. (in Chinese))
- [8] 鞠晓喆, 朱加文, 梁利华, 等. 石墨烯纳米复合材料的降阶均匀化方法及其数值实现[J]. 复合材料学报, 2021, **38**(12): 4362-4370. (JU Xiaozhe, ZHU Jiawen, LIANG Lihua, et al. Reduced order homogenization of graphene nanocomposites and its numerical implementation[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2021, **38**(12): 4362-4370. (in Chinese))
- [9] SUN Q, ASQARDOUST S, SARMAH A, et al. Elastoplastic analysis of AA7075-O aluminum sheet by hybrid micro-scale representative volume element modeling with really-distributed particles and in-situ SEM experimental testing[J]. *Journal of Materials Science & Technology*, 2022, **123**(28): 201-221.
- [10] 邱伊健, 郑萍, 程香平, 等. 随机多尺度短切碳纤维复合结构模型中 RVE 尺寸效应和方向模量的均一化响应[J]. 兵工学报, 2022, **44**(3): 702-717. (QIU Yijian, ZHENG Ping, CHENG Xiangping, et al. RVE size effect and homogenization response of directional modulus in stochastic multi-scale chopped carbon fiber composite structure[J]. *Acta Armamentarii*, 2022, **44**(3): 702-717. (in Chinese))
- [11] LI R, YANG M, LIANG B. The homogenized transformation method for the calculation of stress intensity factor in cracked FGM structure[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2021, **18**(2): 2050014.
- [12] 梁文鹏, 周家作, 陈盼, 等. 基于均匀化理论的含水合物土弹塑性本构模型[J]. 岩土力学, 2021, **42**(2): 481-490. (LIANG Wenpeng, ZHOU Jiazuo, CHEN Pan, et al. An elastoplastic constitutive model of gas hydrate bearing sediments based on homogenization theory[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2021, **42**(2): 481-490. (in Chinese))
- [13] REZAKHANI R, ALNAGGAR M, CUSATIS G. Multiscale homogenization analysis of alkali-silica reaction (ASR) effect in concrete[J]. *Engineering*, 2019, **5**(6): 1139-1154.
- [14] CHOU T W. A self-consistent approach to the elastic stiffness of short-fiber composites[J]. *Journal of Composite Materials*, 1980, **14**(3): 178-188.
- [15] 田十方, 李彪. 梯度优化物理信息神经网络 (GOPINNs): 求解复杂非线性问题的深度学习[J/OL]. 物理学报[2023-04-13]. <https://kns.cnki.net/kcms/detail//11.1958.04.20230201.2155.004.html>. (TIAN Shifang, LI Biao. Gradient-optimized physical information neural networks (GOPINNs): deep learning methods for sol-

- ving complex nonlinear problems[J/OL]. *Acta Physica Sinica* [2023-04-13]. <https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1958.04.20230201.2155.004.html>. (in Chinese))
- [16] SHANG M, LI H, AHMAD A, et al. Predicting the mechanical properties of RCA-based concrete using supervised machine learning algorithms[J]. *Materials*, 2022, **15**(2): 647.
- [17] HAN T, SIDDIQUE A, KHAYAT K, et al. An ensemble machine learning approach for prediction and optimization of modulus of elasticity of recycled aggregate concrete[J]. *Construction and Building Materials*, 2020, **244**: 118271.
- [18] LI X, LIU Z, CUI S, et al. Predicting the effective mechanical property of heterogeneous materials by image based modeling and deep learning[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2019, **347**: 735-753.
- [19] 查文舒, 李道伦, 沈陆航, 等. 基于神经网络的偏微分方程求解方法研究综述[J]. 力学学报, 2022, **54**(3): 543-556. (ZHA Wenshu, LI Daolun, SHEN Luhang, et al. Review of neural network-based methods for solving partial differential equations[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, **54**(3): 543-556. (in Chinese))
- [20] 闫海, 邓忠民. 基于深度学习的短纤维增强聚氨酯复合材料性能预测[J]. 复合材料学报, 2019, **36**(6): 1413-1420. (YAN Hai, DENG Zhongmin. Prediction of properties of short fiber reinforced urethane polymer composites based on deep learning[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2019, **36**(6): 1413-1420. (in Chinese))
- [21] KANI J, ELSHEIKH A. Reduced-order modeling of subsurface multi-phase flow models using deep residual recurrent neural networks[J]. *Transport in Porous Media*, 2019, **126**(3): 713-741.
- [22] YANG H, GUO X, TANG S, et al. Derivation of heterogeneous material laws via data-driven principal component expansions[J]. *Computational Mechanics*, 2019, **64**: 365-379.
- [23] ZHANG J, CHEN W S, HAO H, et al. Performance of concrete targets mixed with coarse aggregates against rigid projectile impact[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2020, **141**: 103565.
- [24] NORRIS A N. A differential scheme for the effective moduli of composites[J]. *Mechanics of Materials*, 1985, **4**(1): 1-16.
- [25] WANG H L, LI Q B. Prediction of elastic modulus and Poisson's ratio for unsaturated concrete[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2007, **44**(5): 1370-1379.
- [26] ZHANG J, WANG Z Y, YANG H W, et al. 3D meso-scale modeling of reinforcement concrete with high volume fraction of randomly distributed aggregates[J]. *Construction and Building Materials*, 2018, **164**: 350-361.
- [27] 周杰, 赵婷婷, 陈青青, 等. 基于 GoogLeNet 的混凝土细观模型应力-应变曲线预测[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(3): 290-299. (ZHOU Jie, ZHAO Tingting, CHEN Qingqing, et al. Prediction of concrete meso-model stress-strain curves based on GoogLeNet[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(3): 290-299. (in Chinese))
- [28] LI B B, JIANG J F, XIONG H B, et al. Improved concrete plastic-damage model for FRP-confined concrete based on true tri-axial experiment[J]. *Composite Structures*, 2021, **269**: 114051.
- [29] CHEN P, LIU J X, CUI S M, et al. Mesoscale analysis of concrete under axial compression[J]. *Construction and Building Materials*, 2022, **337**: 127580.
- [30] 苏捷. 混凝土受压与受拉性能的尺寸效应研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2012. (SU Jie. The research on the size effect of concrete behavior in compression and tension[D]. Changsha: Hunan University, 2012. (in Chinese))
- [31] 秦庆华, 杨庆生. 非均匀材料多场耦合行为的宏观理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 17-19. (QIN Qinghua, YANG Qingsheng. *Macro-Micro-Theory on Multi-Field Coupling Behavior of Heterogeneous Materials* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006: 17-19. (in Chinese))
- [32] 毛晓敏, 张慧华, 纪晓磊, 等. 基于 XFEM 和 GA-BP 神经网络的裂纹智能识别研究[J]. 应用数学和力学, 2022,

- 43(11): 1268-1280. (MAO Xiaomin, ZHANG Huihua, JI Xiaolei, et al. Intelligent crack recognition based on XFEM and GA-BP neural networks[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, 43(11): 1268-1280. (in Chinese))
- [33] DONG H, LINGHU J, NIE Y. Integrated wavelet-learning method for macroscopic mechanical properties prediction of concrete composites with hierarchical random configurations[J]. *Composite Structures*, 2023, 304(1): 116357.
- [34] 杜修力, 金浏. 混凝土材料宏观力学特性分析的细观单元等效化模型[J]. 计算力学学报, 2012, 29(5): 654-661. (DU Xiuli, JIN Liu. Analysis of macroscopic mechanical properties of concrete materials meso-unit equivalence model[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, 29(5): 654-661. (in Chinese))
- [35] 陈青青, 张煜航, 张杰, 等. 含孔隙混凝土二维细观建模方法研究[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(2): 182-194. (CHEN Qingqing, ZHANG Yuhang, ZHANG Jie, et al. Study on a 2D mesoscopic modeling method for concrete with voids[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, 41(2): 182-194. (in Chinese))
- [36] 陈青青. 含孔隙混凝土细观建模方法与数值研究[D]. 太原: 太原理工大学, 2020. (CHEN Qingqing. Meso-scale modeling and numerical investigation of concrete with pores[D]. Taiyuan: Taiyuan University of Technology, 2020. (in Chinese))
- [37] 金浏, 余文轩, 杜修力, 等. 低应变率下混凝土动态拉伸破坏尺寸效应细观模拟[J]. 工程力学, 2019, 36(8): 59-78. (JIN Liu, YU Wenxuan, DU Xiuli, et al. Meso-scale simulation of size effect of dynamic tensile strength of concrete under low strain rates[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, 36(8): 59-78. (in Chinese))
- [38] 吴震. EPS 多孔混凝土力学性能试验及三维数值模拟研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2012. (WU Zhen. Experimental research and 3D modeling of EPS cellular concrete[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2012. (in Chinese))
- [39] 金浏. 细观混凝土分析模型与方法研究[D]. 北京: 北京工业大学, 2014. (JIN Liu. Study on meso-scopic model and analysis method of concrete[D]. Beijing: Beijing University of Technology, 2014. (in Chinese))